

10 ασκήσεις για δυνατούς λύτες

ΣΧΟΛΙΟ : Τα θέματα που ακολουθούν χαρακτηρίζονται από αυξημένη δυσκολία και χαρακτηρίζονται ως «προβλήματα» με την έννοια ότι για τη λύση τους δεν απαιτείται η χρήση μιας τυποποιημένης μεθοδολογίας αλλά χρόνος, δοκιμές και αυτενέργεια.

Ανέστης Τσομίδης - Μαθηματικός

1. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί αποδείξτε ότι

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3\alpha\beta\gamma \geq \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha).$$

2. Αν α, β, γ θετικοί αριθμοί αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\alpha^3 + \beta^3 + \alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\beta^3 + \gamma^3 + \alpha\beta\gamma} + \frac{1}{\alpha^3 + \gamma^3 + \alpha\beta\gamma} \leq \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

3. Να λύσετε το σύστημα (x, y πραγματικοί):

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

4. Σε ένα μακρινό νησί ζουν 13 γκριζοί, 15 καφέ και 17 κόκκινοι χαμαιλέοντες. Αν δύο χαμαιλέοντες διαφορετικού χρώματος συναντηθούν τότε και οι δύο αλλάζουν το χρώμα τους και παίρνουν το τρίτο χρώμα. Είναι δυνατόν να έχουν όλοι τελικά το ίδιο χρώμα;

5. Σε μια επίπεδη περιοχή 3 σπίτια A, B, Γ σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο. Μια κεραία K βρίσκεται στην ίδια περιοχή και δεν ανήκει στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία AB και το Γ. Οι ιδιοκτήτες των σπιτιών A, B συνδέουν τα σπίτια τους με την κεραία K για καλύτερο τηλεοπτικό σήμα με τεντωμένα καλώδια μήκους 20 και 30 μέτρων αντίστοιχα. Το ίδιο θέλει να κάνει και ο ιδιοκτήτης του σπιτιού Γ. Διαθέτει για το σκοπό αυτό 50 μέτρα καλώδιο. Θα του φτάσει το καλώδιο; Θεωρείστε ότι τα K, A, B, Γ και τα καλώδια βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

6. Έστω κυρτό τετράπλευρο ABΓΔ και M, N τα μέσα των BΓ, ΓΔ αντίστοιχα. Αν $AM + AN = a$, να δείξετε ότι $2(ABΓΔ) < a^2$.

7. Δίνονται 5 ευθύγραμμα τμήματα. Είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε τρίγωνο με κάθε τρία από τα παραπάνω 5 ευθύγραμμα τμήματα. Αποδείξτε ότι ένα τουλάχιστον από τα τρίγωνα αυτά είναι οξυγώνιο.

8. Έστω τρίγωνο ABΓ και Δ εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $\widehat{\Delta AB} = 10^\circ$, $\widehat{A B \Delta} = 20^\circ$, $\widehat{\Delta \Gamma A} = 30^\circ$ και $\widehat{\Delta \hat{A} \Gamma} = 40^\circ$. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

9. Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε 50 σημεία μέσα σ' ένα τετράγωνο πλευράς 3, ώστε οποιοδήποτε ορθογώνιο με εμβαδό 1 τοποθετηθεί μέσα στο τετράγωνο με πλευρές παράλληλες στις πλευρές του, να περιέχει ένα τουλάχιστον από τα σημεία;

10. Έστω ABΓΔ ένα ισοσκελές τραπέζιο με $AB \parallel \Gamma\Delta$. Ο εγγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου BΓΔ εφάπτεται της ΓΔ στο E. Έστω Z ένα σημείο στην εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{\Delta \hat{A} \Gamma}$ έτσι ώστε $EZ \perp \Gamma\Delta$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AΓZ τέμνει την προέκταση του ΓΔ στο H. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο AZH είναι ισοσκελές.