

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

(Τελευταία ενημέρωση: Νοέμβριος 2016)

Ανέστης Τσομίδης
Κατερίνη

Περιεχόμενα

1	Οι πραγματικοί αριθμοί	2
1.1	Πράξεις στο \mathbb{R} - Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο	2
1.2	Μέθοδοι απόδειξης - Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση	4
1.3	Διάταξη πραγματικών αριθμών	8
1.4	Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού	10
1.5	Ρίζες πραγματικών αριθμών	12
2	Εξισώσεις	14
2.1	Εξισώσεις 1ου βαθμού	14
2.2	Η εξίσωση $x^{\nu} = a$	16
2.3	Εξισώσεις 2ου βαθμού	17
3	Ανισώσεις	19
3.1	Ανισώσεις 1ου βαθμού	19
3.2	Ανισώσεις 2ου βαθμού	20
4	Πρόοδοι	21
4.1	Αριθμητική πρόοδος	21
4.2	Γεωμετρική πρόοδος	22
5	Συναρτήσεις	23
5.1	Η έννοια της συνάρτησης	23
5.2	Γραφική παράσταση συνάρτησης	24
5.3	Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$	26
5.4	Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$	28

1 Οι πραγματικοί αριθμοί

1.1 Πράξεις στο \mathbb{R} - Δυνάμεις με εκθέτη ακέραιο

1.1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, τοποθετώντας σε κάθε τετραγωνάκι το σύμβολο \in αν ο αριθμός της στήλης ανήκει στο αριθμοσύνολο της αντίστοιχης γραμμής και το σύμβολο \notin αν δεν ανήκει.

	4	-5	-2/5	1,3	2, $\bar{5}$	$\sqrt{2}$	π
\mathbb{N}							
\mathbb{Z}							
\mathbb{Q}							
\mathbb{R}							

1.2. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη:

- α) Αν $a = \beta$ τότε $a(x - 1) = \beta(x - 1)$.
β) Αν $a(x - 1) = \beta(x - 1)$ τότε $a = \beta$.
γ) Αν $(x - 1)(x - 3) \neq 0$ τότε $x \neq 1$ ή $x \neq 3$.
δ) Αν $(x - 2)(x + 3) = 0$ τότε $x = 2$ ή $x = -3$.

1.3. Με δεδομένο ότι $a + \beta = 3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2(a + 3\beta - 1) + 3(2a + \beta + 5) - \beta + 4 \quad \text{και} \quad B = -2(a - \beta) + 4(a + 3\beta) - 12\beta + 2$$

1.4. Με δεδομένο ότι $a - \beta = 5$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2(-2a + 5\beta) + 4(a + \beta + 1) + 6a - 20\beta \quad \text{και} \quad B = 3(a + 2\beta) - 5(a + 3\beta) + 11\beta + 2$$

1.5. Για τις τιμές των μεταβλητών που οι παρακάτω παραστάσεις ορίζονται, να τις απλοποιήσετε αν αυτό είναι δυνατόν:

$$A = \frac{a\beta}{a\gamma} \quad B = \frac{a}{3} \cdot \frac{6}{a} \quad \Gamma = \frac{a + \beta}{a\gamma} \quad \Delta = \frac{a\gamma}{a\beta + \gamma} \quad E = \frac{a\gamma - 2a\beta}{\gamma - 2\beta}$$

1.6. Για τις μεταβλητές a , β , γ ισχύουν $2a + \beta + \gamma = 11$, $a + 2\beta + \gamma = 8$ και $a + \beta + 2\gamma = 9$. Να υπολογίσετε το άθροισμα $a + \beta + \gamma$.

1.7. Για τις μεταβλητές a , β , x ισχύουν οι σχέσεις $a + 1 = 5 + x$ και $\beta + 4 = 3 + x$.

- α) Να υπολογίσετε τη διαφορά $a - \beta$.
β) Αν $a + \beta = 2$, να βρείτε την τιμή του x .

1.8. Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{3 + 5(xy - 1) - y(x - 2) - 4(1 + xy)}{x(y - 5) - y(x - 1)}$$

- α) Να απλοποιήσετε την παράσταση A.
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης A για $x = 1/10$ και $y = 1/3$.

1.9. Με δεδομένο ότι $x/y = 2/3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{2x + y}{x - y} \quad B = \frac{3x + y}{x + 3y} \quad \Gamma = \frac{x - 4y}{2x - y}$$

1.10. Με δεδομένο ότι $x/y = a/\beta = -3$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = \frac{x + a}{y + \beta} \quad B = \frac{2x + 3a}{2y + 3\beta} \quad \Gamma = \frac{-2x + a}{-2y + \beta}$$

1.11. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

$$a = 2^{-6} \cdot 2^9 \quad b = 5^7 : 5^{-4} \quad c = 2^5 \cdot 3^5 \quad d = 6^{12} : 2^{12} \quad e = (3^{-4})^{-12}$$

1.12. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις ως μια δύναμη:

$$a = \frac{3^{-8} \cdot 3^{11}}{3 \cdot 3^{-4}} \quad b = \frac{125 \cdot 5^6}{5^{-2} \cdot 5^{-9}} \quad c = \frac{(3^{-5})^4 \cdot 81}{9^{-2} \cdot (-27)^4} \quad d = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5$$

1.13. Να υπολογίσετε τις τιμές των παρακάτω παραστάσεων:

$$a = 2^{-11} \cdot 2^{10} \quad b = 5^{13} : 5^{15} \quad c = (0, 25)^{-6} \cdot 4^{-6} \quad d = [8^{12} : 2^{31}] \cdot (-3)^{-9} \cdot 3^9$$

1.14. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = (x^3)^5 \cdot 4x^{-3} \quad B = xy^5 \cdot (x^{-2}y^3)^4 \cdot (-2xy)^{-1} \quad \Gamma = (-2x^3) : (-4x)^2$$

1.15. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{3x^2}{2} : \frac{(-2x^2)^3}{4}\right) : (2y)^3 \quad B = (-2x^2y^{-3})^{-2} \cdot (-3x^3 : y^2)^3 \cdot (2x^2 : y^3)$$

1.16. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \left(\frac{x^2}{y} : \frac{2x}{3y^3}\right) \left(\frac{2x}{y}\right)^2 \quad B = \left(\frac{2a^2}{3\beta}\right)^3 \left(\frac{9\beta}{4a^4}\right)^2$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της Α για $x = 1/10$, $y = 19,023$ και την τιμή της Β για $a = \sqrt{3}$, $\beta = 5/2$.

1.17. Έστω n θετικός ακέραιος. Να δείξετε ότι οι παραστάσεις

$$A = 3^\nu + 3^{\nu+1} + 3^{\nu+2} \quad \text{και} \quad B = 2^\nu + 2^{\nu+2} + 2^{\nu+3}$$

είναι πολλαπλάσια του 13.

1.18. α) Αν n θετικός ακέραιος και $a \neq 0$, $a \neq -1$, να απλοποιηθεί η παράσταση

$$A = \frac{1}{a^{-n} + 1} + \frac{1}{a^n + 1}.$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$B = \frac{1}{13^{-2012} + 1} + \frac{1}{13^{-2013} + 1} + \frac{1}{13^{2012} + 1} + \frac{1}{13^{2013} + 1}.$$

1.2 Μέθοδοι απόδειξης - Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση

1.19. Αν για τους πραγματικούς x και y ισχύουν οι ισότητες $3x + 2y = 5$ και $2x + 3y = 10$, να δείξετε ότι $x + y = 3$.

1.20. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β, γ ισχύει η σχέση $\gamma = (a + \beta)/2$, να δείξετε ότι $\beta - \gamma = (\beta - a)/2$.

1.21. Αν ο αριθμός x είναι ακέραιος, να δείξετε ότι ο αριθμός $x(x + 1)$ είναι άρτιος. (Να διακρίνετε δύο περιπτώσεις: x άρτιος, x περιττός.)

1.22. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις $x^2 + 1 = y^2$, $x \neq 0$ και $y \neq 1$, να δείξετε ότι

$$\frac{1 + y}{x} = \frac{x}{y - 1}.$$

1.23. Αν x, y είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να αποδείξετε την ανισότητα

$$\frac{x}{x + 1} < \frac{x + y + 3}{x + y + 2}.$$

1.24. Αν για τους αριθμούς a, β, γ ισχύει η σχέση $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = a\beta + \beta\gamma + \gamma a$, να δείξετε ότι

$$a(a - \beta) + \beta(\beta - \gamma) = \gamma(a - \gamma).$$

1.25. Αν για τον αριθμό x ισχύει $x^9 - 5x^6 = 2x^2 - 3$, να δείξετε ότι $x \neq 1$.

1.26. Αν $(2a - \beta)^5 + (2\beta - a)^5 = a^5 + \beta^5 + 1$, να δείξετε ότι $a \neq \beta$.

1.27. Έστω x ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε ο x^2 να είναι περιττός. Να δείξετε ότι ο x περιττός ακέραιος.

1.28. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα και η διαφορά δύο ρητών αριθμών είναι ρητός. Αν x ρητός και y άρρητος, να δείξετε ότι το άθροισμα $x + y$ είναι άρρητος.

1.29. Να δείξετε ότι η σχέση $x^4 > x$ δεν είναι δυνατόν να αληθεύει για όλους τους θετικούς αριθμούς x .

1.30. Να δείξετε ότι η σχέση $x \cdot y > x + y$ δεν είναι δυνατόν να αληθεύει για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y .

1.31. Αν x, y είναι άρρητοι αριθμοί να δείξετε ότι το γινόμενο τους δεν είναι πάντοτε άρρητος.

1.32. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\text{α) } (2x + 3y)^2 \quad \text{β) } (5x - y)^2 \quad \text{γ) } (-3x + 5y)^2 \quad \text{δ) } (-2x - 4y)^2$$

1.33. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\text{α) } \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 \quad \text{β) } (x^2 - 2y^3)^2 \quad \text{γ) } \left(-\frac{2}{x} + \frac{1}{y}\right)^2 \quad \text{δ) } \left(-x - \frac{3}{2x}\right)^2$$

1.34. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (2x + 3y)^3 \quad \beta) (2x - y)^3 \quad \gamma) (-3x + 2y)^3 \quad \delta) (-2x - 3y)^3$$

1.35. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$\alpha) (2x + y + 2)^2 \quad \beta) (3x^2 - y + 1)^2 \quad \gamma) (3x + y - 2z + 1)^2$$

1.36. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(5a - 1)^2 + (5a + 1)^2 = 2(25a^2 + 1) \quad (1)$$

$$(x(x + 1))^2 - (x(x - 1))^2 = 4x^3 \quad (2)$$

$$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = (x^2 + y^2)^2 \quad (3)$$

$$(x + y)^3 (x - y) - (x^4 - y^4) = 2xy(x^2 - y^2) \quad (4)$$

$$(a^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) - (ax + \beta y)^2 = (ay - \beta x)^2 \quad (5)$$

$$(a + \beta)^4 + a^4 + \beta^4 = 2(a^2 + a\beta + \beta^2)^2 \quad (6)$$

1.37. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(a + \beta + \gamma)^3 = a^3 + \beta^3 + \gamma^3 + 3(a + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + a) \quad (1)$$

$$(x + y - z)^2 + 4z(x + y) = (x + y + z)^2 \quad (2)$$

$$4\gamma(a + \beta) + (a + \beta - \gamma)^2 = 4\beta(a + \gamma) + (a - \beta + \gamma)^2 \quad (3)$$

$$(a^2 - \beta^2)(a + \beta)^2 = a(a - 2\beta)^3 - \beta(\beta - 2a)^3 \quad (4)$$

$$\left(\frac{1}{x - y} + \frac{1}{y - z} + \frac{1}{z - x}\right)^2 = \frac{1}{(x - y)^2} + \frac{1}{(y - z)^2} + \frac{1}{(z - x)^2} \quad (5)$$

1.38. Αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(a + \beta)^2 + 2(a + \beta)(a - \beta) + (a - \beta)^2 = 4a^2 \quad (1)$$

$$(a + 2\beta)^2 - 2(a + 2\beta)(2a - \beta) + (2a - \beta)^2 = (3\beta - a)^2 \quad (2)$$

$$(a + \beta)^3 + 3(a + \beta)^2(a - \beta) + 3(a + \beta)(a - \beta)^2 + (a - \beta)^3 = 8a^3 \quad (3)$$

1.39. Αποδείξτε την παρακάτω ταυτότητα:

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 + 2(x - y)(y - z) + 2(y - z)(z - x) + 2(z - x)(x - y) = 0$$

1.40. Υπολογίστε τις τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2, 71^2 + 7, 29^2 + 2 \cdot 2, 71 \cdot 7, 29 \quad B = 2, 13^2 + 0, 13^2 - 0, 26 \cdot 2, 13$$

1.41. Αν $x + y + z = 0$, αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(xy + yz + zx)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \quad (1)$$

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 3xy(x + y) + 3yz(y + z) + 3zx(z + x) \quad (2)$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = (2x + y)^2 + (2y + z)^2 + (2z + x)^2 \quad (3)$$

1.42. Αν $x + y + z = 0$, αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(x + y)^4 + (y + z)^4 + (z + x)^4 = x^4 + y^4 + z^4 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} x(y - z)^2 + y(z - x)^2 + z(x - y)^2 = \\ (y^2 - z^2)(z - y) + (z^2 - x^2)(x - z) + (x^2 - y^2)(y - x) \end{aligned} \quad (2)$$

1.43. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ισχύει η σχέση

$$(2x - 1)^3 + (5x - 9)^3 + (10 - 7x)^3 = 0.$$

β) Αποδείξτε την ταυτότητα $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x)$.

1.44. Αν $x + y + z = 2$, αποδείξτε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + 1 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1)$$

$$(x + y - 2)^2 + (y + z - 2)^2 + (z + x - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2)$$

1.45. Αν για τον πραγματικό αριθμό $a \neq 0$ ισχύει $(a + 1/a)^2 = 4$, να δείξετε ότι

$$a^{1821} - \frac{1}{a^{1821}} = 0.$$

1.46. Αν $a + \beta + \gamma = 1$ και $a\beta + \beta\gamma + \gamma a = 0$, να δείξετε ότι $a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$.

1.47. Να δείξετε ότι:

α) Αν $a + \beta - \gamma = 2$, τότε $a^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 2(2 + 2\gamma - a\beta)$.

β) Αν $a - \beta = 1$, τότε $a^3 - a^2\beta + \beta^3 - a\beta^2 = a + \beta$.

γ) Αν $a + \beta = 1$, τότε $(a^2 - \beta^2)^2 = a^3 + \beta^3 - a\beta$

1.48. Αν για τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει η σχέση $1/xy + 1/yz + 1/zx = 1$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) x + y + z = xyz \quad \beta) \frac{x + y}{z} + \frac{y + z}{x} + \frac{z + x}{y} = xy + yz + zx - 3$$

1.49. α) Να δείξετε ότι $(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = (x + y)(y + z)(z + x)$.

β) Με δεδομένο ότι οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z και $x + y + z$ είναι μη μηδενικοί και ισχύει η σχέση

$$\frac{1}{x + y + z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$

να δείξετε ότι

$$\frac{1}{(x + y + z)^{1821}} = \frac{1}{x^{1821}} + \frac{1}{y^{1821}} + \frac{1}{z^{1821}}.$$

1.50. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 3x^2y + 5xy^2 - 2xy \quad \beta) -2x^2y^4 + 3x^3y^2 + x^2y^2 \quad \gamma) 5x + x^2y - 5y - xy^2$$

1.51. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 2x + 2y + ax + ay \quad \beta) 2x^3 + 2x^2 + x + 1 \quad \gamma) x + y - xy - 1$$

1.52. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) x^2 + 7x + 6 \quad \beta) x^2 - 4x + 3 \quad \gamma) 2x^2 + 5x + 3 \quad \delta) x^2 - 3ax + 2a^2$$

1.53. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 4x^2 - 9y^2 \quad \beta) x^2 - (4y + 3)^2 \quad \gamma) x^4 - 4y^2 \quad \delta) 16x^4 - 81y^4$$

1.54. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$\alpha) 8x^3 + y^3 \quad \beta) x^3 - 27 \quad \gamma) (2x - 1)^3 - 8 \quad \delta) x^3 + 125y^3 - x - 5y$$

1.55. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{xa - x\beta + ya - y\beta}{a^2 - \beta^2} \quad B = \frac{2x^2 + x - 3(2x + 1)}{x^2 - 9} \quad \Gamma = \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 5x + 6}$$

1.56. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x^3 + y^3}{x - y} \quad B = \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} \quad \Gamma = \frac{x^3 - 4x}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$$

1.57. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$A = \frac{x - y}{x^2 - y^2} \left(\frac{x}{xy - y^2} + \frac{y}{xy - x^2} \right) \quad B = \frac{1}{a^2 - ax} + \frac{1}{a^2 + ax} - \frac{x - a + 2}{a^2 - x^2}$$

1.3 Διάταξη πραγματικών αριθμών

1.58. Αν $2 \leq x \leq 4$ και $1 \leq y \leq 3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x + y$ β) xy γ) $x^2 + y^2$ δ) $x^3 + 2y$

1.59. Αν $4 \leq x \leq 5$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x - y$ β) $\frac{x}{y}$ γ) $3x - 2y$ δ) $\frac{x + 2y}{y^2 + 1}$

1.60. Αν $-2 \leq x \leq 3$ και $-4 \leq y \leq -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^2 + 2y$ β) $x^2 + y^2$ γ) $x^3 + y^3$ δ) $x^3 - 3y$

1.61. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x, y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(x + 5)^2 + x^2 + y^2 - 2xy = 0$ β) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$

1.62. Μια πλατεία σχήματος ορθογωνίου έχει εμβαδό μεταξύ $190m^2$ και $205m^2$. Το μήκος της πλατείας είναι $20m$. Να βρείτε το πλάτος της πλατείας αν είναι γνωστό ότι αυτό είναι θετικός ακέραιος αριθμός.

1.63. Να συγκρίνετε τις παραστάσεις A και B σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $A = (a + \beta)^2, B = 4a\beta$ β) $A = (x + y)(x + 2y), B = xy$

1.64. Αν $a > 2$ να συγκρίνετε τις παραστάσεις A και B σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $A = 2a^2 + 2, B = a^3 + a$ β) $A = a^4 + a, B = 4a^2 + 2$

1.65. Αποδείξτε ότι:

α) $2a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 2a(\beta + \gamma)$ β) $(a^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2) \geq (a\gamma + \beta\delta)^2$

Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα στην περίπτωση (α).

1.66. Αποδείξτε ότι:

α) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$, όπου $x, y > 0$. β) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \leq -2$, όπου $x > 0 > y$.

1.67. Αν $a < \beta < \gamma$ και $\lambda, \mu > 0$, να δείξετε ότι:

α) $a\gamma + \beta^2 < \beta(a + \gamma)$ β) $3a - \beta < 2\gamma$ γ) $a < \frac{\lambda a + \mu\beta}{\lambda + \mu} < \beta$

1.68. Αν a, β θετικοί πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{a + \beta}{1 + a + \beta} < \frac{a}{1 + a} + \frac{\beta}{1 + \beta} \quad \beta) \frac{1}{50 + a} + \frac{1}{50 + 2a} + \dots + \frac{1}{50 + 50a} < 1$$

1.69. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x^2 + y^2 \geq 2xy$ ή αλλιώς, να δείξετε ότι

$$a^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq a\beta + \beta\gamma + \gamma a.$$

1.70. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $x + 1/x \geq 2$ για $x > 0$ ή αλλιώς, να δείξετε ότι για θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, β, γ ισχύει

$$\frac{a^2 + 1}{a} + \frac{\beta^2 + 1}{\beta} + \frac{\gamma^2 + 1}{\gamma} \geq 6.$$

1.71. Αποδείξτε ότι για $x, y > 0$ ισχύει $x + y \geq 2\sqrt{xy}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι για $a, \beta, \gamma > 0$ ισχύει

$$(a + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + a) \geq 8a\beta\gamma.$$

1.72. Αποδείξτε ότι $2(x^2 + y^2) \geq (x + y)^2$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και στη συνέχεια να δείξετε ότι για $a, \beta, \gamma > 0$ ισχύει

$$\frac{a^2 + \beta^2}{a + \beta} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{\beta + \gamma} + \frac{\gamma^2 + a^2}{\gamma + a} \geq a + \beta + \gamma.$$

1.73. Αποδείξτε ότι $x^3 + y^3 \geq xy(x + y)$, όπου x, y θετικοί πραγματικοί αριθμοί και στη συνέχεια να δείξετε ότι για $a, \beta, \gamma > 0$ ισχύει

$$2(a^3 + \beta^3 + \gamma^3) \geq a\beta(a + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma a(\gamma + a).$$

1.4 Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

1.74. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \left| -\frac{3}{4} \right| + 2|-2 + 4| \quad B = |3 - 8| - 3|-2 + 5, 5| \quad \Gamma = |(-2)^3| - |(-1)^{11}|$$

1.75. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής:

$$\left| \sqrt{2} - 1 \right|, \quad |3 - \pi|, \quad \left| \sqrt{2} - 2 \right|, \quad |x^2 + 1|$$

1.76. Αν $1 < x < 5$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) |x - 1| + |x - 5| = 4 \quad \beta) |x - 1| + |x - 5| < |x + 2| + |x - 6|$$

1.77. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, για τις διάφορες τιμές του x .

$$A = |-2x + 6| + 4x \quad B = |3x - 15| - 7 \quad \Gamma = |x - 3| - 4|x - 5|$$

1.78. Υπολογίστε τις δυνατές τιμές των παραστάσεων:

$$\alpha) \left(\frac{x}{|x|} - 1 \right) (|x| + x) \quad \beta) \frac{|x|}{x} + \frac{x}{|x|} \quad \gamma) 3\frac{x}{|x|} + 5\frac{y}{|y|}$$

1.79. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) \frac{x^2 - 4}{|x| + 2} = |x| - 2 \quad \beta) \frac{x(x + 2) + 2x(x - 1)}{|x|(x + 1) - x|x|} = 3|x| \quad \gamma) x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$$

1.80. Αν $|x| < 1$ και $|y| < 1$, να δείξετε ότι $|x + y| < |1 + xy|$.

1.81. Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύουν οι σχέσεις:

$$|x + y| \leq |z|, \quad |y + z| \leq |x|, \quad |z + x| \leq |y|.$$

Να δείξετε ότι $x + y + z = 0$.

1.82. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) |x + 13| + |-2y + 14| = 0 \quad \beta) |3x - y| + |y + 33| = 0.$$

1.83. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) \frac{a}{|a|} \leq 1 \text{ με } a \neq 0 \quad \beta) \frac{-a}{|a|} \leq 1 \text{ με } a \neq 0 \quad \gamma) 4\frac{x + 2}{|x + 2|} + 5\frac{2 - x}{|x - 2|} \leq 9 \text{ με } x \neq \pm 2$$

1.84. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) |x + 5| = 8 \quad \beta) |3x - 7| = -2 \quad \gamma) |x - 1| = |3x - 5| \quad \delta) |x - 2| - |x + 1| = 0$$

1.85. Αν $x, y \neq 0$, θέτουμε $a = \frac{-2x}{|x| + |y|}$ και $\beta = \frac{-2y}{|x| + |y|}$. Αποδείξτε ότι $|a| + |\beta| = 2$.

1.86. Αν $|x - y| = 5$ και $|x + y| = 6$ να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

$$\alpha) |-2x + 2y| \quad \beta) |x^2 - y^2| \quad \gamma) \left| \frac{12x - 12y}{x + y} \right| \quad \delta) \left| \frac{y - x}{4x + 4y} \right|$$

1.87. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) |x - 2| + |-4x + 8| = 15 \quad \beta) |x - 7| + 2|7 - x| + 3|14 - 2x| = 18$$

1.88. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) |x - y| \leq |x - 3a| + |3a - y| \quad \beta) |3x + y| \leq |x + y - a| + |2x + a|$$

1.89. Με δεδομένο ότι $a \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $a \neq \pm\beta$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \frac{|a + 2\beta|}{|a| + |\beta|} + \frac{|2a - \beta|}{|a| + |\beta|} \leq 3 \quad \beta) \frac{|a|}{|a + \beta|} + \frac{|\beta|}{|a - \beta|} \geq 1$$

1.90. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) |4x - 3| > 5 \quad \beta) |x - 3| \leq 2 \quad \gamma) |x - 3| \geq -8 \quad \delta) |2x - 1| < -8$$

1.91. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\alpha) |x - 5| \geq 2 \quad \beta) |x + 4| < 2 \quad \gamma) |x - 3| \geq |x + 2| \quad \delta) 1 < |x - 1| < 3$$

1.92. Αν $|x - 4| \leq 3$, να δείξετε ότι: $\alpha) 1 \leq 4x - 3 \leq 25$ $\beta) |x^2 - 25| \leq 24$.

1.93. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 1$, να δείξετε ότι: $\alpha) |4x + 3y| \leq 15$ $\beta) |x - y + 10| \leq 14$.

1.94. Να βρείτε την απόσταση των αριθμών α , β στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) \alpha = -5 \text{ και } \beta = -8 \quad \beta) \alpha = \sqrt{5} \text{ και } \beta = \pi \quad \gamma) \alpha = 55 \text{ και } \beta = -55$$

1.95. Η απόσταση των αριθμών x , 4 είναι μικρότερη του 1 και η απόσταση των αριθμών y , 7 είναι μικρότερη του 2. Να δείξετε ότι $|x + y - 11| < 3$.

1.96. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς x , y ισχύει $(x - 5)(5 - y) > 0$.

$\alpha)$ Να δείξετε ότι ο 5 βρίσκεται μεταξύ των x , y .

$\beta)$ Αν επιπλέον $|x - y| = 13$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $|x - 5| + |y - 5|$.

1.97. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α , β , γ , δ του διαστήματος $[0, 1)$. Αποδείξτε ότι δύο τουλάχιστον από τους αριθμούς αυτούς, έχουν απόσταση μικρότερη του $1/3$.

1.5 Ρίζες πραγματικών αριθμών

1.98. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{\sqrt{3}\sqrt{27}}{18} \quad \beta) \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} \quad \gamma) \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}\sqrt{21}}{21} \quad \delta) \sqrt{(-1,67)^2} + \sqrt{(-2,11)^2}$$

1.99. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) (3 + 2\sqrt{2})(3 - \sqrt{8}) = 1 \quad \beta) 2\sqrt{75} - \sqrt{48} - 2\sqrt{27} = 0 \quad \gamma) \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{6} = 6$$

1.100. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) (\sqrt{12} + \sqrt{27})\sqrt{3} + \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = 18 \quad \beta) (\sqrt{18} - \sqrt{2}) : \sqrt{2} + \sqrt{0,32}\sqrt{2} = 2,8$$

1.101. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{(-5)^2} + \sqrt{(-1,43)^2} \quad B = \sqrt{7}\sqrt{0,07} - (\sqrt{3})^4 \quad \Gamma = (\sqrt{2})^6 + (\sqrt{2})^8$$

1.102. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$A = \sqrt{4 + \sqrt{25}} \quad B = \sqrt{\sqrt{25} - \sqrt{16}} \quad \Gamma = \sqrt{\sqrt{2}\sqrt{18} + \sqrt{49} + \sqrt{2}\sqrt{72}}$$

1.103. Αν $0 < x < 1$, να δείξετε ότι

$$\alpha) \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} = 2 \quad \beta) \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 10x + 25}}{\sqrt{(-3)^2} - 1} = 3$$

1.104. Αν $1 < x < 5$, να δείξετε ότι

$$\alpha) \frac{\sqrt{(x-1)^2} - x}{\sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-5)^2}} = -\frac{1}{6} \quad \beta) \frac{\sqrt{(-16)^2} + \sqrt{(-9)^2} + \sqrt{\sqrt{81}}}{\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 16x + 64}} = 4$$

1.105. Να βρείτε τα αναπτύγματα των $(\sqrt{3} + 1)^2$ και $(\sqrt{3} - 1)^2$ και να δείξετε ότι

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} = 2.$$

1.106. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

$$\alpha) \frac{7}{\sqrt{2}} \quad \beta) \frac{4}{\sqrt{3}} \quad \gamma) \frac{5}{\sqrt{5} - 2} \quad \delta) \frac{3}{\sqrt{8} - \sqrt{5}} \quad \epsilon) \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}$$

1.107. Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) \alpha = \sqrt{7} - \sqrt{5}, \beta = \sqrt{3} - \sqrt{\pi} \quad \beta) \alpha = \sqrt{12} - \sqrt{5}, \beta = \sqrt{10} - \sqrt{6}$$

1.108. Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β στις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) a = \sqrt{2} - \sqrt{3}, \beta = \sqrt{7} - \sqrt{6} \quad \beta) a = 5 - 2\sqrt{6}, \beta = 3 - 2\sqrt{2}$$

1.109. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8} \quad \beta) \frac{5 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{250}} \quad \gamma) \sqrt[3]{\sqrt{10} - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{10} + \sqrt{2}} \quad \delta) \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{34} - 3} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{34} + 3}$$

1.110. Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές:

$$\alpha) \frac{10}{\sqrt[7]{5^4}} \quad \beta) \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} \quad \gamma) \frac{2}{\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}}$$

1.111. Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς α και β σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) a = \sqrt[3]{2} \text{ και } \beta = \sqrt[4]{3} \quad \beta) a = \sqrt[3]{5} \text{ και } \beta = \sqrt{3} \quad \gamma) a = \sqrt[4]{2} \text{ και } \beta = \sqrt[5]{3}$$

1.112. Αποδείξτε ότι:

$$\alpha) \sqrt[3]{2^5} \cdot \sqrt[3]{2^4} = 8 \quad \beta) \sqrt[130]{2^{70}} \cdot \sqrt[26]{2^{10}} \cdot \sqrt[13]{2} = 2 \quad \gamma) \sqrt[3]{\sqrt[7]{16}} \cdot \sqrt[21]{2^{17}} = 2 \quad \delta) \frac{\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[12]{3}} = 3$$

2 Εξισώσεις

2.1 Εξισώσεις 1ου βαθμού

2.1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 3(x - 2) = 1 - 2(x - 4) \quad \beta) 2(3 - 4x) + 1 = 7 - 8x \quad \gamma) 2(1 - x) = 3 - 2x$$

2.2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{x+1}{2} - \frac{2x}{5} = x - 4 \quad \beta) \frac{4x-1}{8} = \frac{x}{2} - \frac{1}{8} \quad \gamma) \frac{4x-1}{8} = \frac{x-1}{2}$$

2.3. Να λύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς x , a , R και m αντίστοιχα:

$$\alpha) y = \frac{a}{x} \quad \beta) V = V_0(1 + a\theta) \quad \gamma) F = m\frac{v^2}{R} \quad \delta) I = \frac{mnE}{mR_1 + nR_2}$$

2.4. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\alpha) (\lambda - 1)x = \lambda + 5 \quad \beta) (\lambda^2 - 2\lambda)x = \lambda - 2 \quad \gamma) \lambda^2x - 2\lambda = 25x + 10$$

2.5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\alpha) (\lambda - 2\mu)x + \mu = -3\lambda x + 5 \quad \beta) (\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2)x + \lambda\mu = \lambda^2$$

2.6. Ο Νίκος διάβασε ένα βιβλίο 300 σελίδων σε 4 ημέρες. Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;

2.7. Αγόρασε κάποιος ένα σαλόνι που αποτελείται από τέσσερις πολυθρόνες και ένα καναπέ και πλήρωσε 960€. Αν ο καναπές κοστίζει όσο 2 πολυθρόνες, να βρείτε πόσο κοστίζει κάθε πολυθρόνα και πόσο κοστίζει ο καναπές.

2.8. Από τους μαθητές μιας τάξης, οι μισοί πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια, το $1/3$ αυτών χρησιμοποιεί ποδήλατο, το $1/9$ αυτών πηγαίνει στο σχολείο με το λεωφορείο και δύο μαθητές τους πηγαίνουν οι γονείς τους με το αυτοκίνητό τους. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

2.9. Ένας πατέρας είναι 43 ετών και ο γιος του 12 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιου του;

2.10. Σε ένα κριτήριο αξιολόγησης με 20 ερωτήσεις κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες, για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται 5 μονάδες, ενώ αν σε κάποια ερώτηση δεν δοθεί κάποια απάντηση ούτε δίνονται ούτε αφαιρούνται μονάδες. Ο Γιώργος δεν έδωσε κάποια απάντηση σε 2 ερωτήσεις και πήρε στο κριτήριο αυτό 120 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;

2.11. Μια βρύση μπορεί να αδειάσει μια γεμάτη δεξαμενή σε 8 ώρες, ενώ μια άλλη μπορεί να γεμίσει την ίδια δεξαμενή όταν είναι άδεια σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε ταυτόχρονα και τις δύο βρύσες;

2.12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 3x = 0 \quad \beta) x^3 - 8x^2 - x + 8 = 0 \quad \gamma) (x - 4)^2 - (4 - x)(x + 3) = 0$$

2.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) 9x^3 - 5x^2 - 9x + 5 = 0 \quad \beta) (x^2 - 4)(x + 3) + (x - 2)^2(x^2 + 5x + 6) = 0$$

2.14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{-3}{x+2} + \frac{5}{x^2-4} = \frac{1}{x-2} \quad \beta) \frac{1}{x^2-x} + \frac{3}{x-1} = \frac{5}{x} \quad \gamma) \frac{1}{x+3} = \frac{x}{x^2-9}$$

2.15. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-11}{9989} + \frac{x-13}{9987} + \frac{x-15}{9985} = \frac{x-9989}{11} + \frac{x-9987}{13} + \frac{x-9985}{15}$$

2.16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \frac{|x-2|}{4} - \frac{1}{3} = \frac{|x-2|}{6} \quad \beta) |8-x| = \frac{1}{3}|x-8| + 4 \quad \gamma) \frac{|x-3|}{2} + \frac{|-2x+6|}{3} = 1$$

2.17. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = |3x + 4| \quad \beta) ||2x - 1| - 2| = 3 \quad \gamma) |x - 1| = 2x - 4$$

2.18. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) |x - 2| + 3x - 1 = 5 - x \quad \beta) |x - 1| + |x - 2| = 5 \quad \gamma) |x + 1| + |x - 2| = x$$

2.2 Η εξίσωση $x^{\nu} = a$.

2.19. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 = 64 \quad \beta) x^4 - 16 = 0 \quad \gamma) x^4 - 5 = 0 \quad \delta) x^4 + 5 = 0$$

2.20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^5 = 32 \quad \beta) x^5 - 11 = 0 \quad \gamma) x^3 + 27 = 0 \quad \delta) x^3 + 9 = 0$$

2.21. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^4 - 8x = 0 \quad \beta) 2x^4 + 6x = 0 \quad \gamma) x^{10} + 2x^2 = 0 \quad \delta) x^9 - 2x = 0$$

2.22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^{10} = 2^{10} \quad \beta) x^{21} = 2^{21} \quad \gamma) (x + 1)^4 = 16 \quad \delta) (2x + 3)^3 = 27$$

2.23. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^8 + 3x^7 - 2x - 6 = 0 \quad \beta) x^9 + x^8 - 2^8x - 2^8 = 0$$

2.24. Ένας κύβος ακμής x , έχει όγκο μικρότερο από τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων $x, x, 5x$ κατά $32cm^3$. Να βρείτε το μήκος της ακμής του κύβου.

2.3 Εξισώσεις 2ου βαθμού

2.25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \beta) 3x^2 + 2x + 5 = -4x + 2 \quad \gamma) 3x^2 - x + 2 = 0$$

2.26. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^2 - 8x = 0 \quad \beta) x^2 - 5 = 0 \quad \gamma) x^2 + 3 = 0 \quad \delta) x^2 + 20x + 100 = 0$$

2.27. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x + \frac{1}{3}\right) = 5x^2 + 2x - \frac{1}{9} \quad \beta) \frac{x+2}{2} - (x+2)^2 = \frac{3x-4}{2} + 1$$

2.28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) x^4 + 2x^2 - 8 = 0 \quad \beta) x^{20} - 6x^{10} + 8 = 0 \quad \gamma) (x-5)^2 = |x-5| + 6$$

2.29. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) (x^2 - 3x + 2)^2 + 2(x^2 - 3x + 3) - 5 = 0 \quad \beta) \frac{x}{x-2} - \frac{8}{x^2 - 2x} = \frac{4}{x}$$

2.30. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε $a \geq 0$, η εξίσωση $2x^2 - 3x + a + 5 = 0$ είναι αδύνατη στο \mathbb{R} .

2.31. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε $a \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $x^2 - ax + a - 1 = 0$ έχει λύση στο \mathbb{R} . Στη συνέχεια να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

2.32. Δίνεται η εξίσωση $a^2x^2 + (a^2 - \beta^2)x - \beta^2 = 0$ όπου $a \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση στο \mathbb{R} την οποία να βρείτε.

2.33. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4x + 2\lambda = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο τον πραγματικό αριθμό λ .

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.

β) Αν η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό 5, να βρείτε την παράμετρο λ και την άλλη ρίζα.

2.34. Δίνεται η εξίσωση $x^4 + (\lambda - 4)x^2 + 1 - 2\lambda = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ , η εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο πραγματικές ρίζες.

2.35. Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι αριθμητικά ίσο με το εννιαπλάσιο της πλευράς του αυξημένο κατά 10. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

2.36. Θεωρούμε ορθογώνιο με εμβαδό 10 cm^2 , η μία πλευρά του οποίου είναι κατά 3 cm μικρότερη από την άλλη. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

2.37. Να βρείτε έναν αριθμό ο οποίος όταν προστεθεί στον αντίστροφό του δίνει άθροισμα 5.

2.38. Σε μια γιορτή κάθε καλεσμένος τσούκρισε το ποτήρι του με κάθε έναν από τους υπόλοιπους καλεσμένους. Ακούστηκαν 36 τσουγκρίσματα. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι;

2.39. Μια τάξη νοίκιασε για εκδρομή ένα λεωφορείο αντί 240 €. Επειδή δύο μαθητές αρρώστησαν, το εισιτήριο αυξήθηκε για καθένα από τους υπόλοιπους κατά 0,5 €. Πόσοι μαθητές πήγαν εκδρομή;

2.40. Δύο ποδηλάτες διανύουν μια απόσταση 45 km με μέσες ταχύτητες που διαφέρουν κατά 5 km/h . Ο ένας ποδηλάτης χρειάζεται 1,5 h περισσότερο από τον άλλο. Να βρείτε τις ταχύτητες των ποδηλατών.

2.41. Χαρακτηρίστε σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η εξίσωση $2x^2 - 5x + 1 = 0$, έχει 2 ρίζες στο \mathbb{R} με άθροισμα $5/2$.

β) Η εξίσωση $2x^2 - 5x + 10 = 0$, έχει 2 ρίζες στο \mathbb{R} με γινόμενο 5.

2.42. Να βρείτε δύο αριθμούς, εφόσον υπάρχουν, που να έχουν:

α) Άθροισμα 6 και γινόμενο -3. β) Άθροισμα 6 και γινόμενο 10.

2.43. Να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις $1/2$ και $1/3$.

2.44. Η εξίσωση $x^2 - 5x - \sqrt{3} = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 .

α) Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της παραπάνω εξίσωσης.

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = x_1 + 2$ και $\rho_2 = x_2 + 2$.

2.45. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - (\sqrt{17} + 1)x + \sqrt{17} = 0$.

α) Να λύσετε την εξίσωση με τη βοήθεια του τύπου που δίνει τις ρίζες μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.

β) Να λύσετε την εξίσωση με τη βοήθεια των συμπερασμάτων για το άθροισμα και το γινόμενο ριζών μιας εξίσωσης 2ου βαθμού.

2.46. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda^2 - 4)x + \lambda = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει 2 ρίζες αντίθετες.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει 2 ρίζες αντίστροφες.

3 Ανισώσεις

3.1 Ανισώσεις 1ου βαθμού

3.1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$3(x-1) + 2(5-x) > 4-x \quad \beta) -2(x-3) + 5 > x-7 \quad \gamma) -2(x+2) > 5(x+2)$$

3.2. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) -3x + 5x < 2 + 2x \quad \beta) 2x - 5 > 8 + 2x \quad \gamma) 2x - 4 + 3x \leq -10 + 5x + 6$$

3.3. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{2x-1}{3} - \frac{x+1}{4} \geq 1 + \frac{2x+2}{3} \quad \beta) \frac{x-1}{3} \leq \frac{2x-1}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \left(x + \frac{x-1}{3} \right)$$

3.4. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) \begin{cases} 5x - 8 \leq 3(x-1) \\ 2(3x-1) < 3(4x+7) \end{cases} \quad \beta) \begin{cases} 4(x-2) - 3(x-1) \geq -2x+4 \\ x+4 > -3x+8 \end{cases}$$

3.5. Να βρείτε για ποιες τιμές του x αληθεύει η σχέση που δίνεται σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

$$\alpha) 3 < 4x + 5 \leq 8 \quad \beta) -2x + 2 \leq 5x + 1 \leq 6x + 4 \quad \gamma) -1 \leq \frac{4x}{3} - \frac{1}{2} \leq 4$$

3.6. Μια τάξη ετοιμάζει μια εκδρομή στο τέλος της σχολικής χρονιάς. Δύο ταξιδιωτικά γραφεία Α και Β προσφέρουν τις υπηρεσίες τους νοικιάζοντας εκδρομικά λεωφορεία ως εξής:

Γραφείο Α: 200€ και για κάθε χιλιόμετρο 15 λεπτά.

Γραφείο Β: 210€ και για κάθε χιλιόμετρο 10 λεπτά.

Για ποιες τιμές της χιλιομετρικής απόστασης είναι πιο συμφέρουσα η προσφορά του γραφείου Α;

3.7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\alpha) \frac{|2x-1|}{5} + \frac{1}{2} > \frac{|2x-1|}{2} \quad \beta) 5 \leq |x-10| \leq 7 \quad \gamma) ||x-1| - 3| < 2$$

3.8. Να βρείτε για ποιες τιμές του x αληθεύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) |x-1| < |x-2| \quad \beta) |x-2| + |2x-4| \leq |3x| \quad \gamma) |x| < |x-1| < |x-3|$$

3.2 Ανισώσεις 2ου βαθμού

3.9. Να παραγοντοποιήσετε, αν αυτό είναι δυνατόν, τα τριώνυμα:

α) $2x^2 - 3x + 1$ β) $9x^2 - 6x + 1$ γ) $x^2 + 3x + 5$ δ) $x^2 - x + 1$

3.10. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ β) $\frac{5x^2 + 4x - 1}{x^2 - 1}$ γ) $\frac{2x^2 - (2a + 1)x + a}{x^2 - a^2}$

3.11. α) Όταν το x μεταβάλλεται από 3 έως 5, το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 8x + 12$ μεταβάλλεται;

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 8x + 12 \geq 0$.

3.12. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $-2x^2 + x + 3 > 0$ β) $x^2 - 4x \leq 4$ γ) $x^2 + x + 5 > 0$ δ) $2x^2 + x + 1 < 0$

3.13. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $5x^2 + 3x - 2 > 4x^2 - 2x + 4$ β) $2x^2 - 3x + 2 > 6x^2 - 8$

3.14. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $|x - 1| > |2x - 3|$ β) $|2x^2 - 3x + 5| > |-x^2 + x - 1| + 4$

3.15. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων

α) $x^2 - 8 < 0$ και $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ β) $x^2 < 4$ και $x^2 + 12 < 7x$

3.16. Να βρείτε για ποιες τιμές του x αληθεύει καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

α) $-3 < -x^2 + 2x + 3 < 0$ β) $x^2 + x + 1 < 2x^2 + 1 < x^2 + x + 3$

3.17. Αποδείξτε ότι η ανίσωση

$$x^2 + 5ax + 9a^2 \geq 0$$

όπου a πραγματικός αριθμός, αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x .

3.18. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

α) Το τριώνυμο $(\lambda - 5)x^2 - 3x + 4$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Το τριώνυμο $-2x^2 + 4x + \lambda - 1$ είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4 Πρόοδοι

4.1 Αριθμητική πρόοδος

4.1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: 5, 9, 13, ...

α) Να βρείτε τον πενήτηκοστό όρο της προόδου και να υπολογίσετε το άθροισμα

$$a_{49} + a_{50} + a_{51}.$$

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 405.

γ) Να βρείτε τον νιοστό όρο της προόδου.

4.2. Οι αριθμοί $\frac{1}{2}|x-1|$, $|x-1|$ και $|x-1|+2$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε το x .

4.3. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = 3n + 2$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να βρείτε το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της.

γ) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 62.

4.4. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι ίσος με 6 και ο δωδέκατος όρος της είναι ίσος με 94. Να βρείτε την διαφορά της προόδου και τον δέκατο όρο της.

4.5. Μεταξύ των αριθμών 5 και 50 παρεμβάλλουμε τους αριθμούς

$$x_1 < x_2 < \dots < x_\mu.$$

Αν $x_\mu = 3x_2$ και οι αριθμοί 5, $x_1, x_2, \dots, x_\mu, 50$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε το μ και τη διαφορά αυτής της προόδου.

4.6. Σ' έναν ουρανοξύστη 60 ορόφων, τα γραφεία του ίδιου ορόφου έχουν το ίδιο ενοίκιο. Κάθε γραφείο του πρώτου ορόφου ενοικιάζεται 200 € το μήνα. Κάθε γραφείο ενός ορόφου, ενοικιάζεται 20 € το μήνα ακριβότερα από ένα γραφείο του προηγούμενου ορόφου.

α) Ποιο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του πέμπτου ορόφου;

β) Πόσο ακριβότερο είναι το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου του εικοστού ορόφου από ένα του ογδόου ορόφου;

γ) Σε ποιους ορόφους το μηνιαίο ενοίκιο ενός γραφείου ξεπερνά τα 950 € ;

4.2 Γεωμετρική πρόοδος

4.7. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος: 5, 10, 20, ...

Να βρείτε το νιοστό όρο της προόδου και να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$\frac{a_{10}}{a_8} + \frac{a_{12}}{a_{10}} + \frac{a_{14}}{a_{12}}.$$

4.8. Οι αριθμοί \sqrt{x} , $\sqrt{x+1}$ και $4\sqrt{x}$, όπου $x \geq 0$, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Να βρείτε το x .

4.9. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = 3 \cdot 2^n$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος.

β) Να βρείτε το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της.

γ) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 3072.

4.10. Σε μια γεωμετρική πρόοδο το άθροισμα του τρίτου και του τέταρτου όρου της είναι ίσο με 20 και η διαφορά του δεύτερου από τον τέταρτο όρο της είναι ίση με 10. Να βρείτε τον πρώτο όρο και το λόγο της προόδου.

4.11. Η τιμή αγοράς ενός αυτοκινήτου στην αρχή της φετινής χρονιάς ήταν 10.000 €. Είναι γνωστό ότι στο τέλος κάθε χρόνου, το αυτοκίνητο χάνει το 10% της αξίας που είχε στην αρχή του χρόνου.

α) Ποια είναι η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος του πρώτου χρόνου;

β) Αν a_n είναι η αξία του αυτοκινήτου στο τέλος της νιοστής χρονιάς, να εξετάσετε αν η ακολουθία a_n είναι γεωμετρική πρόοδος. Στην περίπτωση που είναι, να βρείτε το λόγο της προόδου.

γ) Πόσο θα μειωθεί η αξία του αυτοκινήτου 10 χρόνια μετά;

δ) Στο τέλος ποιου χρόνου η αξία του αυτοκινήτου θα γίνει ίση με 7290 €;

5 Συναρτήσεις

5.1 Η έννοια της συνάρτησης

5.1. Ποιες από τις παρακάτω αντιστοιχίες είναι συναρτήσεις;

- α) Μαθητής ενός σχολείου \rightarrow Ημέρα γενεθλίων
- β) Μαθητής ενός σχολείου \rightarrow Διδασκόμενα μαθήματα στο σχολείο
- γ) Έλληνας πολίτης \rightarrow Α.Μ.Κ.Α.
- δ) Έλληνας πολίτης \rightarrow Αριθμός αστυνομικής ταυτότητας.

5.2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \sqrt[3]{-4x+2} \quad \beta) g(x) = \frac{x^3+1}{x^2-16} \quad \gamma) h(x) = \frac{\sqrt{x^2-5x+4}}{x-4}$$

5.3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2-8x} \quad \beta) g(x) = \sqrt{2-\sqrt{|x|-1}} \quad \gamma) h(x) = \frac{3x+4}{\sqrt{x-3}-2}$$

5.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + 3x - 1, x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x) = f(x+1) + f(x-1)$.
- β) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x) = f(x^2) + f(2x)$.

5.5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 - 2x, & -3 \leq x \leq 5 \\ 5x + 4a, & x > 5 \end{cases}$$

όπου a πραγματικός αριθμός.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.
- β) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου a για την οποία ισχύει $f(6) = f(1)$.

5.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 8, & x \geq 3 \\ |x - 3| + 1, & x < 3 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές $f(0), f(3), f(4)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2$.

5.7. Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 μέτρων, ένα οικοπέδο σχήματος ορθογωνίου, από τις τρεις πλευρές του. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος μήκους x μέτρων. Να βρείτε το εμβαδό του οικοπέδου ως συνάρτηση του x .

5.8. Σε μια κοινότητα η χρέωση της μηνιαίας κατανάλωσης νερού γίνεται ως εξής:

- α) 25 € πάγιο κάθε μήνα, ανεξαρτήτως αν υπάρχει ή όχι κατανάλωση νερού.
- β) 0,3 €/m³, για τα πρώτα 20 κυβικά μέτρα νερού.
- γ) 0,5 €/m³, για όσα κυβικά μέτρα νερού είναι πάνω από τα πρώτα 20.

Να βρείτε μια συνάρτηση η οποία να δίνει τη χρέωση της μηνιαίας κατανάλωσης νερού συναρτήσει των x κυβικών μέτρων νερού που καταναλώθηκαν.

5.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

5.9. Θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κορυφές σημεία $A(1, 4)$, $B(5, 4)$, $\Gamma(5, -2)$, $\Delta(1, -2)$.

α) Να βρείτε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

β) Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται εντός του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για τα x, y ;

5.10. Θεωρούμε το σημείο $A(-2, 4)$. Να βρείτε το συμμετρικό του Α:

α) ως προς τον άξονα x'

β) ως προς τον άξονα y'

γ) ως προς την αρχή των αξόνων $O(0, 0)$

δ) ως προς την διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

5.11. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} - 4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να κάνετε ένα πίνακα τιμών της f και με τη βοήθεια αυτού να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης.

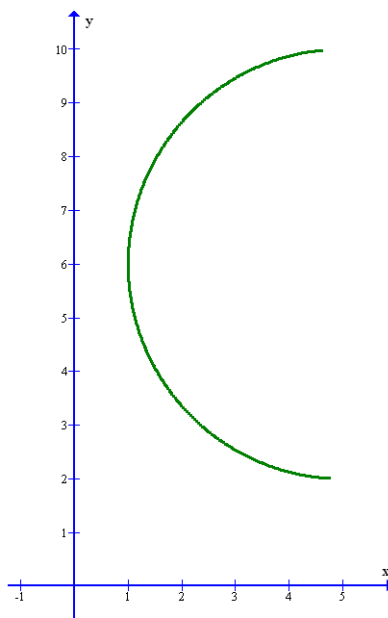
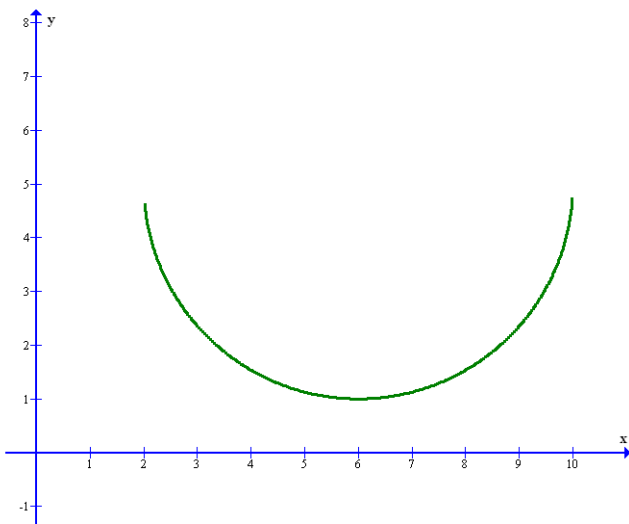
5.12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x} - 2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Να κάνετε ένα πίνακα τιμών της f και με τη βοήθεια αυτού να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f με τη βοήθεια της γραφικής της παράστασης.

5.13. Να εξετάσετε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αν το αντίστοιχο διάγραμμα αποτελεί γραφική παράσταση συνάρτησης.



5.14. Δίνονται το σημείο $A(-1, 9)$ και οι συναρτήσεις $f(x) = -2x^3 + 8$ και $g(x) = x + ax^3$, όπου a πραγματικός αριθμός.

α) Να εξετάσετε αν το σημείο A ανήκει στην γραφική παράσταση της f .

β) Να βρείτε το a ώστε το σημείο A να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

5.15. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης f με τους άξονες $x'x$, $y'y$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ β) $g(x) = \sqrt{x-2} - 3$ γ) $h(x) = \sqrt{x-2} + 5$

5.16. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g , σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = 2x^2 - 5x$, $g(x) = x^2 - 4$ β) $f(x) = 2x^2 + x + 6$, $g(x) = x^2 + 5$

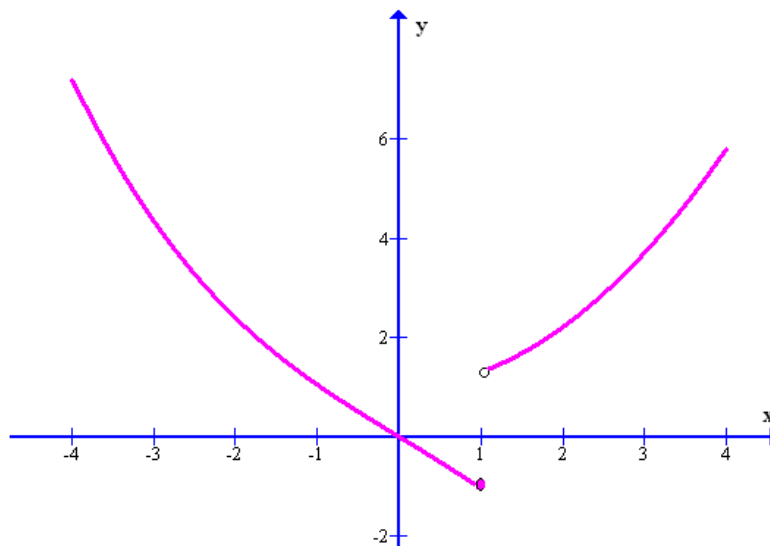
5.17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2|x| - 4$ και $g(x) = 9x - x^2$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

5.18. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(x) = 3x + 1$. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g .

5.19. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της f .



α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο της τιμής $f(1)$.

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων των εξισώσεων $f(x) = 0$ και $f(x) = 4$.

5.3 Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

5.20. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων, τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x$, $\varepsilon_2 : y = 2x$ και $\varepsilon_3 : y = 3x$.

5.21. Να σχεδιάσετε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = 4$, $\varepsilon_2 : y = 3x - 2$, $\varepsilon_3 : y = -2x + 1$.

5.22. Θεωρούμε την ευθεία ε η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και το σημείο $A(2, -3)$.

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας ε .

γ) Να εξετάσετε αν τα σημεία $B(4, -6)$ και $\Gamma(-2, 5)$ ανήκουν στην ευθεία ε .

5.23. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 4x - 8$ και $\varepsilon_2 : y = (3\lambda - 5)x + 4$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α) Να σχεδιάσετε την ευθεία ε_1 σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

β) Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.

5.24. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Η ε έχει κλίση -3 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $H(0, 4)$.

β) Η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $\zeta : y = 5x + 3$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$.

γ) Η ε διέρχεται από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-2, -1)$.

5.25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax + 4$, όπου $a < 0$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της f και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

γ) Για ποια τιμή του a το εμβαδό του παραπάνω τριγώνου είναι ίσο με 4;

5.26. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x \geq 2 \\ -x + 3, & x < 2 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} 3x - 1, & x \leq 1 \\ -2x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

5.27. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

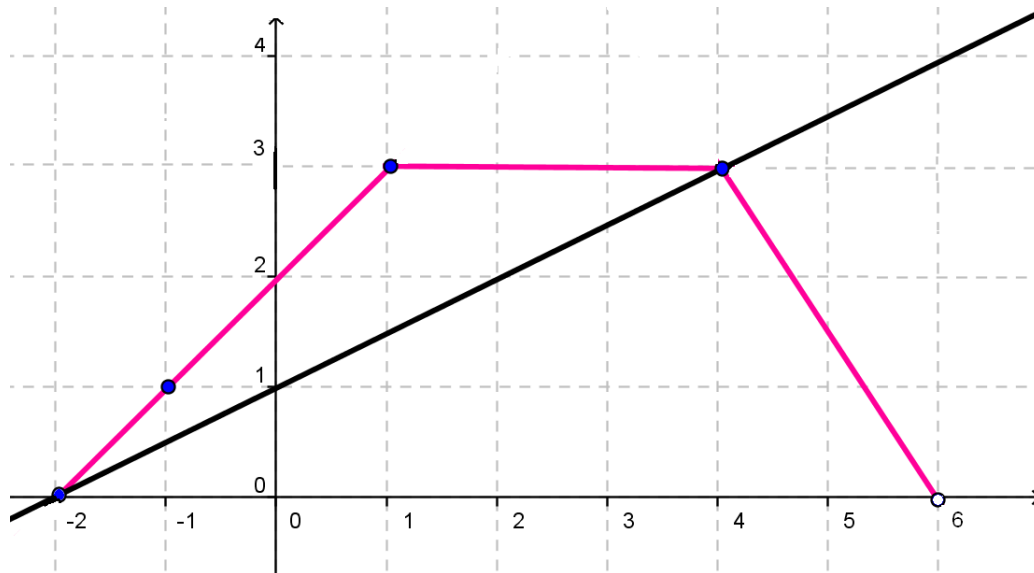
$$\alpha) f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x + 2, & x < 0 \end{cases} \quad \beta) g(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x < 1 \\ \sqrt{x - 1}, & x \geq 1 \end{cases}$$

5.28. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να γράψετε τον τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

$$\alpha) f(x) = |3x - 6| + 2x - 1 \quad \beta) f(x) = |-2x + 4| + 3x$$

$$\gamma) f(x) = |5x - 10| + 5x + 3 \quad \delta) f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x) - 2$$

5.29. Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία γραμμή είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g .



- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- β) Να βρείτε τις τιμές $f(-2)$, $f(1)$ και $f(4)$.
- γ) Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) = 3$;
- δ) Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $f(x) = 2$;
- ε) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \geq g(x)$.

5.30. Μια άδεια δεξαμενή έχει όγκο $2m^3$. Μια αντλία παροχής νερού αρχίζει να τη γεμίζει με ρυθμό 10 λίτρα ανά λεπτό. Μόλις γεμίσει η δεξαμενή η αντλία σταματά να λειτουργεί με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού.

- α) Να βρείτε τον όγκο του νερού (σε λίτρα) στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου (σε λεπτά) που έχει μείνει ανοιχτή η αντλία.
- β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

5.31. Το εισιτήριο του λεωφορείου που συνδέει δύο πόλεις κοστίζει 0 € για άτομα μικρότερα των έξι ετών, 5 € για άτομα από έξι ετών και άνω αλλά μικρότερα των δεκαοκτώ ετών και 10 € για άτομα από δεκαοκτώ ετών και άνω.

- α) Να εκφράσετε την τιμή του εισιτηρίου ως συνάρτηση της ηλικίας.
- β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.

5.4 Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$

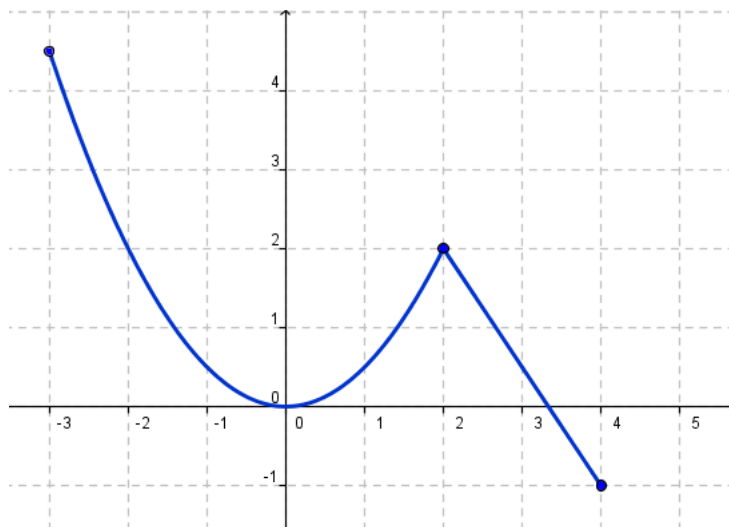
5.32. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{4}x^2$ και $g(x) = -\frac{1}{4}x^2$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

5.33. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = x^2$ και $h(x) = 2x^2$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Τι παρατηρείτε;

5.34. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = x^2 + 4$ και $h(x) = x^2 - 4$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

5.35. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^2$, $g(x) = (x - 3)^2$ και $h(x) = (x + 3)^2$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

5.36. Στο σχήμα που ακολουθεί δίνεται η γραφική παράσταση της f η οποία αποτελείται από ένα τμήμα παραβολής και ένα ευθύγραμμο τμήμα.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -f(x)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο της f .

5.37. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ και $g(x) = 3x^2$.

α) Να γράψετε τον τύπο της f στη μορφή $a(x - p)^2 + q$.

β) Να βρείτε με ποια οριζόντια μετατόπιση και ποια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g μπορεί να προκύψει η γραφική παράσταση της f .

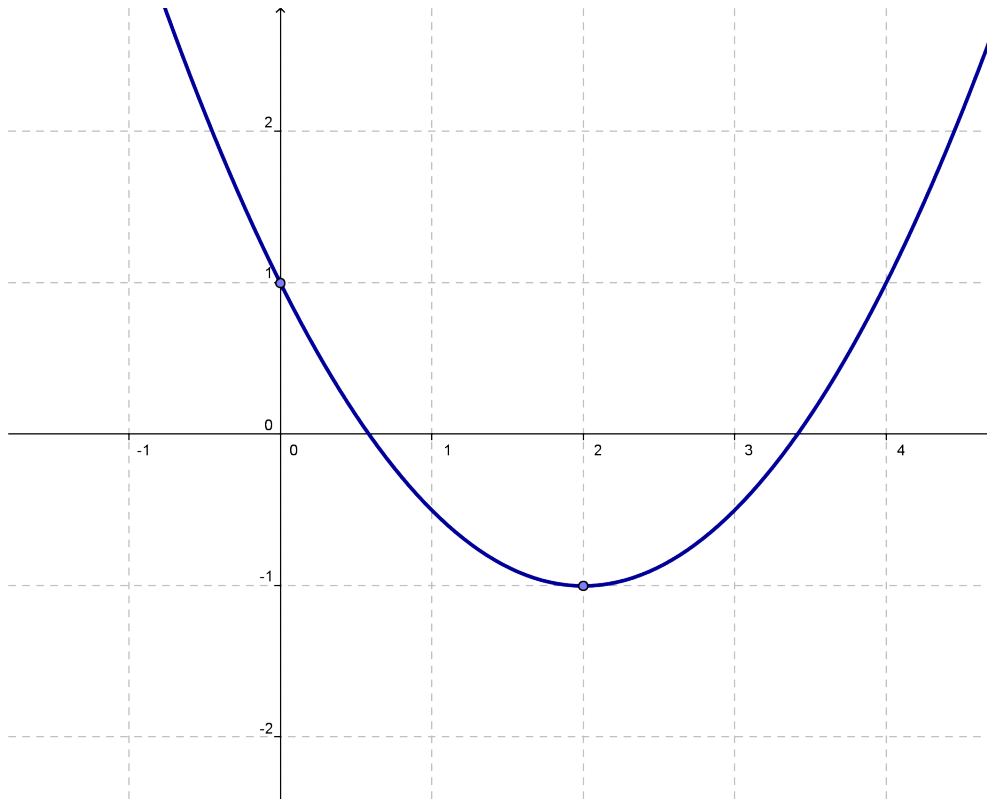
5.38. Να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$\text{α) } f(x) = x^2 - 4x + 7 \quad \text{β) } g(x) = -x^2 + 2x + 3$$

5.39. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + (\lambda + 3)x + \mu$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί. Είναι δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της f εφάπτεται του άξονα x' και έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$.

Να βρείτε τους αριθμούς λ, μ και στη συνέχεια να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

5.40. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$.



α) Να βρείτε το πρόσημο του a , το πρόσημο της διακρίνουσας του τριωνύμου $f(x)$ καθώς και το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)$ για $1 \leq x \leq 3$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

5.41. Με 200 μέτρα συρματοπλέγμα θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με σκοπό να κατασκευαστεί σ' αυτήν ένα θερμοκήπιο. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το εμβαδό του να είναι το μέγιστο δυνατό.

5.42. Η ημερήσια παραγωγή μιας περιοχής με 30 πηγάδια άντλησης πετρελαίου είναι 6000 βαρέλια. Όλα τα πηγάδια έχουν την ίδια ημερήσια παραγωγή. Για κάθε νέο πηγάδι που ανοίγεται η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού μειώνεται κατά 5 βαρέλια.

α) Να εκφράσετε την ολική παραγωγή ως συνάρτηση του αριθμού x των νέων πηγαδιών.

β) Να βρείτε τον αριθμό των νέων πηγαδιών ώστε να έχουμε τη μέγιστη ημερήσια παραγωγή.