ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β$^{\prime}$ ΛΥΚΕΙΟΥ

(Τελευταία ενημέρωση: Νοέμβριος 2016)

Ανέστης Τσομίδης
Κατερίνη

Περιεχόμενα

1 Συστήματα

1.1 Μη γραμμικά συστήματα

1.1. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} 2\left(x^2+x+2\right)+3\left(y^2+5\right)=22 \\ 3\left(x^2+x+2\right)-2\left(y^2+5\right)=-6 \end{cases}$ β) $\begin{cases} 2\sqrt{x+5}-3\sqrt{y-1}=5 \\ 5\sqrt{x+5}-12\sqrt{y-1}=8 \end{cases}$

1.2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} \dfrac{-2}{x}+\dfrac{5}{y}=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{y}=3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{3}=1 \\ 3\dfrac{x}{y}-2\dfrac{y}{3}=2 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2+(y-1)^2=5 \\ 3x^2-4\left(y-1\right)^2=-13 \end{cases}$

1.3. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} y-2x^2=0 \\ -2x+y=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x+y=1 \\ x^2+y^2=41 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2+y=4 \\ x+y=2 \end{cases}$

1.4. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

α) $\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ (x-4)^2+y^2=4 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^3+y^2=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} x^2+y=0 \\ x^5+y^3=0 \end{cases}$

1.5. Θεωρούμε το σύστημα με αγνώστους x, y

$$\begin{cases} ax^3+y=2 \\ x+ay=\beta \end{cases}$$

όπου a, $\beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι το σύστημα έχει λύση το ζεύγος $(1,1)$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και όλες τις λύσεις του συστήματος.

1.6. Να βρείτε δύο αριθμούς με άθροισμα 3, για τους οποίους το άθροισμα των κύβων τους είναι ίσο με 9.

1.7. Να λύσετε το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων:

$$z=3x\,, \qquad y=2z\,, \qquad x^2+y^2+z^2=46\,.$$

1.8. Να λύσετε το σύστημα των παρακάτω εξισώσεων:

$$\frac{xy}{x+y}=\frac{1}{3}\,, \qquad \frac{zy}{z+y}=\frac{2}{3}\,, \qquad \frac{zx}{z+x}=1\,.$$

2 Ιδιότητες συναρτήσεων

2.1 Μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες συνάρτησης

2.1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2x + 4$ β) $g(x) = 2x^3 - 4$ γ) $h(x) = \sqrt{4-5x} + 3$

2.2. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = x^2 + \sqrt{-x}$ β) $g(x) = x^3 + 4x - 2$ γ) $h(x) = \sqrt[5]{x-2} + 2x$

2.3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x+5, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}.$$

α) Αποδείξτε ότι σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2.4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^5 + 5x^3$.
α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^2 + 2 > x - 1$.
γ) Να δείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει

$$2\left(x^2+2\right)^5 + 5\left(x^2+2\right)^3 > 2\left(x-1\right)^5 + 5\left(x-1\right)^3.$$

2.5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - 2x$.
α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.
β) Αν a, β θετικοί αριθμοί με $a < \beta$, να δείξετε ότι

$$\frac{3}{\sqrt{a}} - \frac{3}{\sqrt{\beta}} > 2(a - \beta).$$

2.6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3\left|x-3\right| - 5$ και $g(x) = -2(x-1)^2 + 4$.
α) Αποδείξτε ότι η f έχει ελάχιστο το οποίο να βρείτε.
β) Αποδείξτε ότι η g έχει μέγιστο το οποίο να βρείτε.

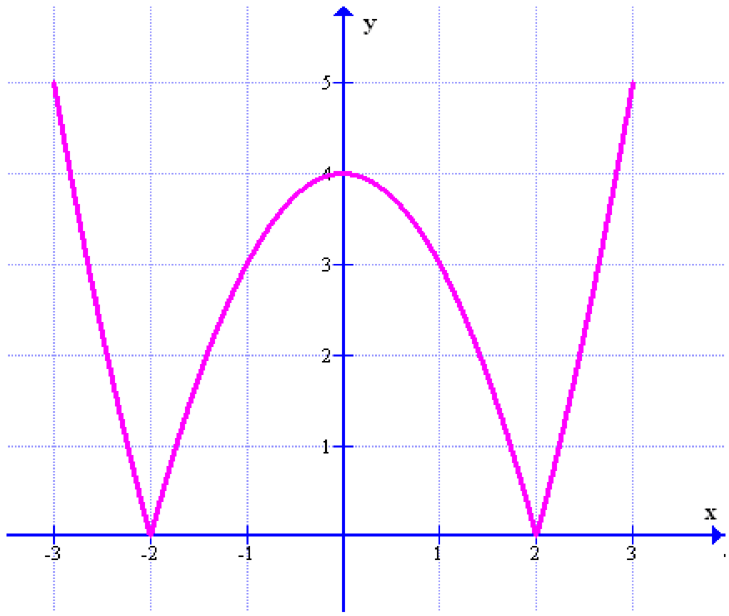
2.7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = -3x^4 + 5x^2 + 4$ β) $f(x) = 2x^3 + 4x$ γ) $f(x) = \dfrac{-3x}{x^2 - 4}$

2.8. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ β) $f(x) = \left|x+4\right| + 3$ γ) $f(x) = \dfrac{2x}{\left|x^3 - x\right|}$

2.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

2.2 Κατακόρυφη-οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

2.10. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = 2\,|x|\ , \qquad g(x) = 2\,|x-3|\ , \qquad h(x) = 2\,|x| - 4.$$

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων.

2.11. Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = -x^2\,, \qquad g(x) = -(x+3)^2\,, \qquad h(x) = -x^2 + 2.$$

Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων.

2.12. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$, με πεδίο ορισμού το διάστημα $[-1, 2]$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = f(x-2) + 1$.

3 Τριγωνομετρία

3.1 Τριγωνομετρικοί αριθμοί

3.1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 8$, $A\Gamma = 6$ και υποτείνουσα ΒΓ. Αν Δ, Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, με $A\Delta = 3$ και $\Delta E \perp AB$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{B}$ και το μήκος του τμήματος ΔΕ.

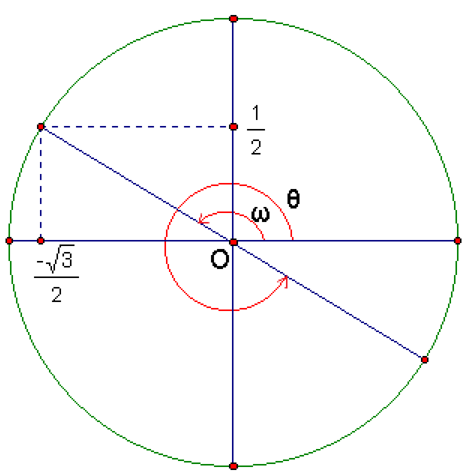
3.2. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΑΓ. Αν Δ, Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, με $A\Delta = 6$, $\Delta E = 2$ και $\Delta E \perp AB$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{A}$ και να δείξετε ότι $AB = 3B\Gamma$.

3.3. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΑΓ, $B\widehat{A}\Gamma = 37°$ και $AB = 4$. Εκτός του τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε το τρίγωνο ΑΓΔ να είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $A\Delta = \sqrt{29}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $A\widehat{\Delta}\Gamma$. Δίνεται ότι $\sigma\upsilon\nu 37° = 0,8$.

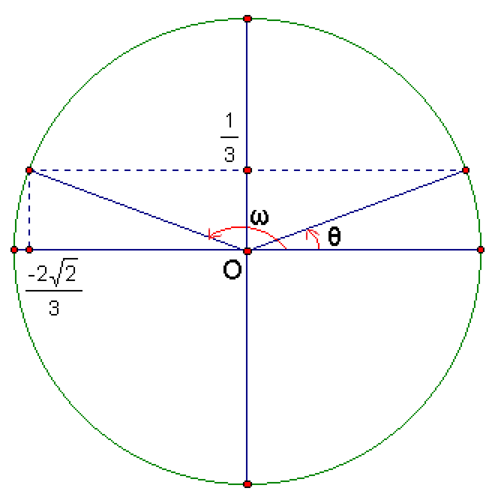
3.4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΒΓ είναι $\widehat{\Gamma} = 30°$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\Gamma\Delta = 10$ και $B\widehat{\Delta}A = 60°$. Υπολογίστε το μήκος της πλευράς ΑΒ.

3.5. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A} = 75°$, $\widehat{B} = 60°$ και $B\Gamma = 10$. Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ.

3.6. Με βάση τα στοιχεία που δίνονται σε καθένα από τους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και θ.

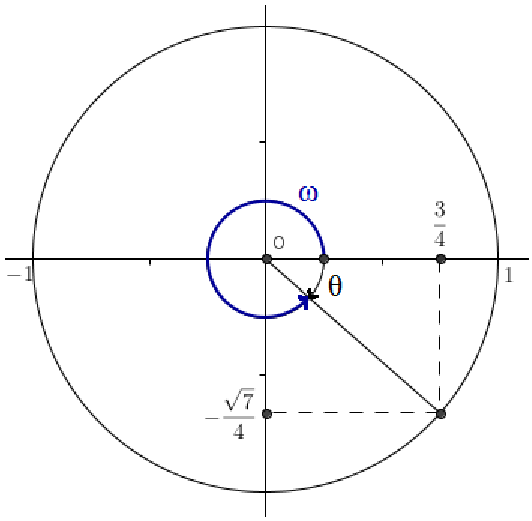


(I)

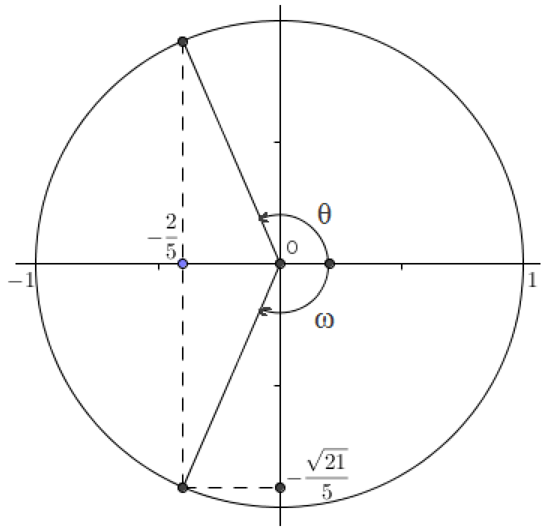


(II)

3.7. Με βάση τα στοιχεία που δίνονται σε καθένα από τους παρακάτω τριγωνομετρικούς κύκλους, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ω και θ.



(I)



(II)

3.8. Υπολογίστε τις παραστάσεις:

$A = \eta\mu 180^\circ \sigma\upsilon\nu 180^\circ + \epsilon\phi 180^\circ - \sigma\phi 270^\circ \qquad B = \sigma\upsilon\nu 0^\circ \eta\mu 90^\circ - \sigma\upsilon\nu 270^\circ \epsilon\phi(-180^\circ)$

3.9. Με δεδομένο ότι $\eta\mu 4^\circ = 0,07$ να βρείτε τα εξής: $\eta\mu 364^\circ$, $\eta\mu 1804^\circ$, $\eta\mu(-716^\circ)$.

3.10. Υπολογίστε τις τιμές: $\eta\mu 420^\circ$, $\sigma\upsilon\nu 1830^\circ$, $\sigma\phi(-690^\circ)$, $\epsilon\phi 3645^\circ$, $\sigma\upsilon\nu(-1740^\circ)$.

3.11. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω τέτοια ώστε:

α) $3\sigma\upsilon\nu\omega - 4 = 0$ β) $5\eta\mu\omega + 4 = 0$ γ) $\eta\mu\omega - 2 = \sigma\upsilon\nu^2\omega$ δ) $\eta\mu^4\omega + \sigma\upsilon\nu^4\omega = 0$

3.12. Αν $\eta\mu x + \eta\mu y = 2$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu^4 y$.

3.13. Αν $\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu y = -2$, να υπολογίσετε την παράσταση $A = \eta\mu^5 x + \eta\mu^6 y$.

3.14. Βρείτε τα πρόσημα των τιμών:

$$\sigma\upsilon\nu 217^\circ, \quad \eta\mu 130^\circ, \quad \epsilon\phi 181^\circ, \quad \sigma\phi 316^\circ, \quad \sigma\upsilon\nu(-56^\circ), \quad \eta\mu(-7^\circ).$$

3.15. Αποδείξτε ότι

α) $\sigma\upsilon\nu 99^\circ \cdot \epsilon\phi 213^\circ + \sigma\phi(-301^\circ) \cdot \eta\mu 190^\circ < 0$ β) $\epsilon\phi 95^\circ \sigma\upsilon\nu 114^\circ + \sigma\upsilon\nu(-7^\circ) > 0$

3.16. Να εκφράσετε σε ακτίνια τις γωνίες: α) 70°, β) 120°, γ) 135°, δ) -18°, ε)-100°.

3.17. Να εκφράσετε σε μοίρες τις γωνίες: α) $\frac{\pi}{3}$, β) $\frac{2\pi}{5}$, γ) $\frac{5\pi}{6}$, δ) $\frac{-3\pi}{4}$, ε) $\frac{-\pi}{9}$.

3.18. Υπολογίστε τις τιμές: α) $\eta\mu\frac{49\pi}{6}$, β) $\sigma\upsilon\nu\frac{25\pi}{4}$, γ) $\epsilon\phi\frac{13\pi}{3}$, δ) $\eta\mu\frac{85\pi}{2}$, ε) $\sigma\phi\frac{37\pi}{3}$.

3.19. Αποδείξτε ότι:

α) $\sigma\upsilon\nu\frac{8\pi}{7} \cdot \eta\mu\frac{5\pi}{7} \cdot \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{7}\right) > 0$ β) $\eta\mu\frac{\pi}{8} \cdot \sigma\phi\frac{5\pi}{8} \cdot \sigma\upsilon\nu\left(-\frac{\pi}{8}\right) < 0$

3.2 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

3.20. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x:

α) $\eta\mu x = \dfrac{2}{5}$ και $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ β) $\epsilon\phi x = -4$ και $\dfrac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

3.21. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x:

α) $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{4}$ και $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ β) $\sigma\phi x = 5$ και $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

3.22. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε:

α) $\eta\mu x = 2/3$ και $\sigma\upsilon\nu x = 1/3$ β) $\eta\mu x = -4/5$ και $\sigma\upsilon\nu x = 3/5$

3.23. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $(2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 + (\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x)^2 = 5$ β) $\dfrac{2\epsilon\phi x}{1+\epsilon\phi^2 x} = 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x$.

3.24. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{1-\epsilon\phi^2 x}{1+\epsilon\phi^2 x} = 1 - 2\eta\mu^2 x$ β) $\eta\mu^2 a\left(1+\sigma\phi^2 a\right) + \sigma\upsilon\nu^2 a\left(1+\epsilon\phi^2 a\right) = 2$.

3.25. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $(\epsilon\phi x + \sigma\phi x)^2 = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ β) $\eta\mu a\left(1 - \dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 a}{1+\eta\mu a}\right) + \sigma\upsilon\nu^2 a = 1$.

3.26. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x}$ β) $(1+\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2 = 2\left(1+\sigma\upsilon\nu x\right)\left(1+\eta\mu x\right)$

3.27. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x$ β) $\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y = \eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 y - \sigma\upsilon\nu^2 x \cdot \eta\mu^2 y$

3.28. Αποδείξτε τις ταυτότητες:

α) $\dfrac{1+\epsilon\phi^5 x}{1+\sigma\phi^5 x} = \left(\dfrac{1+\epsilon\phi x}{1+\sigma\phi x}\right)^5$ β) $\dfrac{1+\sigma\phi^3 x}{1+\epsilon\phi^3 x} = \left(\dfrac{1+\sigma\phi x}{1+\epsilon\phi x}\right)^3$

3.29. Αν $\epsilon\phi^2 x = 1 + 2\epsilon\phi^2 y$, να δείξετε ότι

α) $\sigma\upsilon\nu^2 y = 2\sigma\upsilon\nu^2 x$ β) $2\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 y = 1$.

3.30. Αν $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$, να δείξετε ότι

α) $\epsilon\phi x = \sqrt{2} - 1$ β) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$.

3.31. Αν $3\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu x = 5$, να δείξετε ότι

α) $\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = \dfrac{1}{30}\left(25 - 9\eta\mu^2 x - 25\sigma\upsilon\nu^2 x\right)$ β) $(3\sigma\upsilon\nu x - 5\eta\mu x)^2 = 9$.

3.3 Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

3.32. Υπολογίστε τις τιμές:

$$\eta\mu 210^\circ,\quad \sigma\upsilon\nu 150^\circ,\quad \epsilon\phi 300^\circ,\quad \epsilon\phi(-60^\circ),\quad \sigma\upsilon\nu(-45^\circ)\quad \sigma\upsilon\nu 240^\circ,\quad \sigma\phi 135^\circ.$$

3.33. Με δεδομένο ότι $\eta\mu 70^\circ = 0,94$ να υπολογίσετε τις τιμές:

$$\eta\mu 110^\circ,\quad \eta\mu 250^\circ,\quad \eta\mu 830^\circ,\quad \sigma\upsilon\nu 20^\circ,\quad \sigma\upsilon\nu 160^\circ,\quad \sigma\upsilon\nu 340^\circ,\quad \eta\mu 200^\circ.$$

3.34. Υπολογίστε τις τιμές:

$$\eta\mu\frac{3\pi}{4},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6},\quad \epsilon\phi\frac{4\pi}{3},\quad \sigma\phi\frac{5\pi}{4},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3},\quad \eta\mu\frac{11\pi}{6},\quad \sigma\upsilon\nu\frac{10\pi}{3},\quad \eta\mu\frac{43\pi}{4}.$$

3.35. Αποδείξτε ότι:

α) $\eta\mu 80^\circ + \eta\mu 100^\circ = 2\sigma\upsilon\nu 10^\circ$ β) $\eta\mu 450^\circ + \epsilon\phi 220^\circ + \sigma\phi 410^\circ = 1 + 2\epsilon\phi 40^\circ$

3.36. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $\sigma\upsilon\nu 1^\circ + \sigma\upsilon\nu 2^\circ + \sigma\upsilon\nu 178^\circ + \sigma\upsilon\nu 179^\circ$ β) $2\eta\mu 10^\circ + \sigma\upsilon\nu 100^\circ + \sigma\upsilon\nu 260^\circ$

3.37. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

α) $A = \eta\mu\frac{3\pi}{4} - \sigma\upsilon\nu\pi + \epsilon\phi\frac{5\pi}{4}$ β) $B = \epsilon\phi\frac{2\pi}{3} - \sigma\phi\frac{9\pi}{4} + \eta\mu\frac{17\pi}{4}$

3.38. Αποδείξτε ότι:

α) $\dfrac{\eta\mu(\pi - x)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sigma\upsilon\nu(\pi + x)}$ β) $\dfrac{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 1} + \dfrac{\eta\mu(\pi + x) - 1}{\sigma\upsilon\nu(\pi - x)} = 0.$

3.39. Αν $\eta\mu 25^\circ + \eta\mu 65^\circ = a$, να δείξετε ότι:

α) $\eta\mu 25^\circ \cdot \eta\mu 65^\circ = \dfrac{a^2 - 1}{2}$ β) $\eta\mu 25^\circ \cdot \eta\mu 65^\circ + \sigma\upsilon\nu 25^\circ \cdot \sigma\upsilon\nu 65^\circ = a^2 - 1$

3.40. Αποδείξτε ότι:

α) $\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{6} + x - 1\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3} - x + 1\right)$ β) $\epsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{10} + 21x\right) = \sigma\phi\left(\dfrac{2\pi}{5} - 21x\right)$

3.4 Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

3.41. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu x,\ g(x) = \eta\mu x + 2$ β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ g(x) = \sigma\upsilon\nu\Big(x + \dfrac{\pi}{2}\Big)$

3.42. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu x,\ g(x) = 3\eta\mu x$ β) $f(x) = \sigma\upsilon\nu x,\ g(x) = -2\sigma\upsilon\nu x$

3.43. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \eta\mu x, \quad g(x) = |\eta\mu x|$ β) $f(x) = \epsilon\phi x, \quad g(x) = |\epsilon\phi x|$

3.44. Να συγκρίνετε τις τιμές:

α) $\eta\mu 110^\circ$ και $\eta\mu 113^\circ$ β) $\eta\mu\dfrac{\pi}{10}$ και $\eta\mu\dfrac{\pi}{11}$ γ) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{7}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{9}$

3.45. Αν $2\pi < x_1 < x_2 < 3\pi$, να συγκρίνετε τις τιμές:

α) $\sigma\upsilon\nu\dfrac{x_1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\dfrac{x_2}{2}$ β) $\eta\mu\dfrac{x_1}{4}$ και $\eta\mu\dfrac{x_2}{4}$ γ) $\epsilon\phi\dfrac{x_1}{6}$ και $\epsilon\phi\dfrac{x_2}{6}$

3.46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4\eta\mu(2x)$.
α) Να βρείτε το μέγιστο, το ελάχιστο και την περίοδο της f.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = \eta\mu x$.

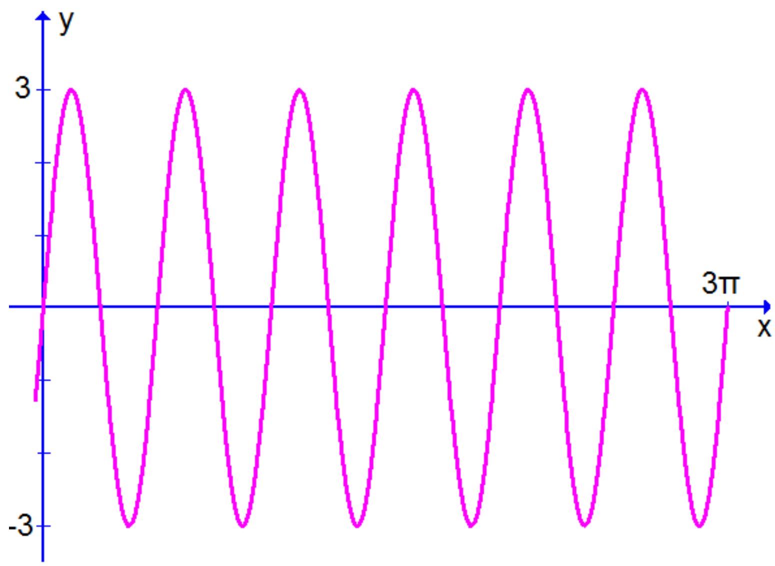
3.47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu(x/2)$.
α) Να βρείτε το μέγιστο, το ελάχιστο και την περίοδο της f.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f στο διάστημα $[-4\pi, 4\pi]$.
γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x) = -3\sigma\upsilon\nu(x/2)$.

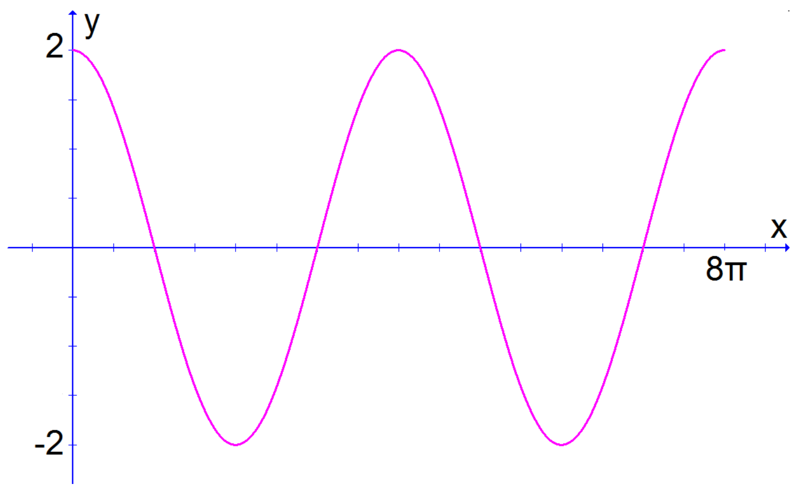
3.48. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3\epsilon\phi(2x)$. Να βρείτε την περίοδο της f και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.

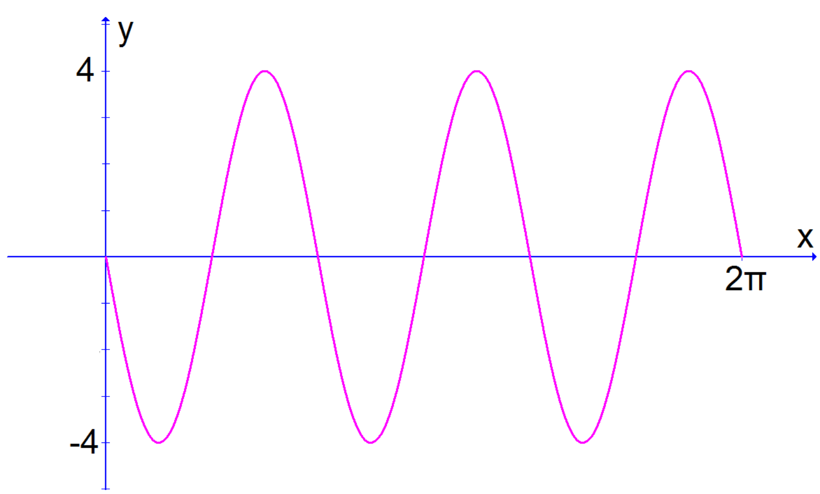
3.49. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = 4\eta\mu(-2x)$ β) $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu\left(-\dfrac{x}{2}\right)$ γ) $f(x) = 2\epsilon\phi(-x)$

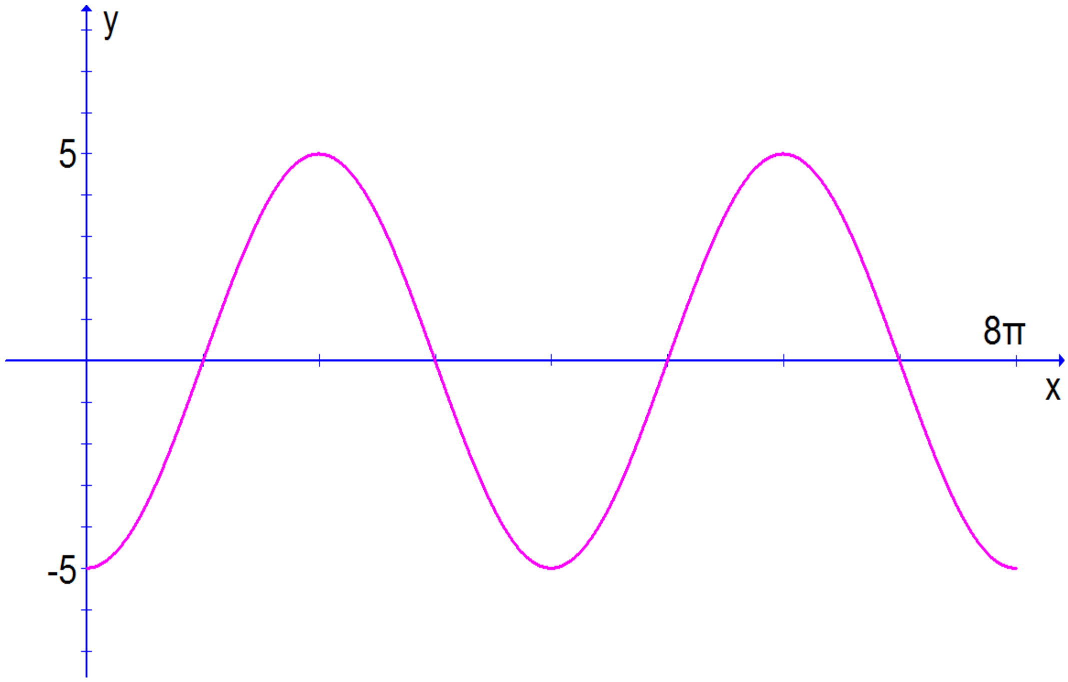
3.50. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τον τύπο της τριγωνομετρικής συνάρτησης αν είναι γνωστό ότι είναι της μορφής $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ ή $\rho\eta\mu(\omega x)$.







3.51. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $[0, 8\pi]$, η οποία είναι της μορφής $\rho\sigma\upsilon\nu(\omega x)$ ή $\rho\eta\mu(\omega x)$.



α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 0$.

3.52. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ σε κάποια περιοχή, για δύο συνεχόμενες ημέρες, τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Theta(t) = 8\eta\mu\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 4, \qquad 0 \le t \le 48$$

όπου η θερμοκρασία είναι μετρημένη σε βαθμούς Κελσίου και ο χρόνος μετρημένος σε ώρες.
α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας αυτό το διήμερο.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης.
γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία είναι μικρότερη των 4^oC.

3.53. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\varGamma = 4$ και ύψος $A\varDelta$. Θέτουμε $\theta = \varDelta\widehat{A}\varGamma$ και $E(\theta)$ το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει της γωνίας θ.
α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(\theta)$.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(\theta)$.
γ) Να βρείτε για ποια τιμή της γωνίας θ το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό εμβαδό.
Υπόδειξη: Θεωρούμε γνωστό ότι αν x, y είναι δύο πλευρές ενός τριγώνου και ω η περιεχόμενη σ' αυτές γωνία τότε το εμβαδό του τριγώνου δίνεται από τον τύπο

$$E = \frac{1}{2}xy\eta\mu\omega.$$

3.5 Τριγωνομετρικές εξισώσεις

3.54. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ γ) $\sqrt{3}\sigma\phi x = 1$ δ) $\eta\mu x = 0$

3.55. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $6\eta\mu x + 3 = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3} = 0$ γ) $\sqrt{2}\epsilon\phi x = -\sqrt{6}$ δ) $\sigma\upsilon\nu x = -1$

3.56. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$ β) $4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\sqrt{2}\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$

3.57. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 x + 2 = 3\eta\mu x$ β) $-2\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ γ) $\epsilon\phi^4 x = 9$

3.58. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\eta\mu x - 1)(\epsilon\phi x - 1) = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi^2 x = 0$ γ) $3\epsilon\phi^2 x = \dfrac{7}{\sigma\upsilon\nu x} - 5$

3.59. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu(3x) = \sigma\upsilon\nu x$ β) $\sigma\upsilon\nu(2x) + \eta\mu\dfrac{\pi}{5} = 0$ γ) $\eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

3.60. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα $[-\pi, 3\pi]$:

α) $\epsilon\phi 2x = \sqrt{3}$ β) $\eta\mu x = \dfrac{1}{2}$ γ) $2\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2}$ δ) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

3.61. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 1$ β) $3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$ γ) $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = 1$

3.62. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 x + \left(1 - \sqrt{3}\right)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$ β) $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x = 1$

3.63. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες:

α) $\epsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) \cdot \epsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} + 3x\right) = 2$ β) $\eta\mu^4 x + 3\sigma\upsilon\nu^6 x = 5$ γ) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) = 1$

3.64. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu(2x)$, με $x \in [0, 2\pi]$.
α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
β) Να λύσετε την ανίσωση $\eta\mu(2x) > 0$ στο $[0, 2\pi]$.
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 1/2$.

3.65. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x$, με $x \in [0, 2\pi]$.
α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 3/2$.
γ) Να λύσετε στο $[0, 2\pi]$ την ανίσωση

$$f(x) < \frac{3}{2}.$$

4 Πολυώνυμα

4.1 Η έννοια του πολυωνύμου

4.1. α) Είναι το πολυώνυμο $f(x) = 2(x-1)^2 - 2x^2 + 5$ δευτέρου βαθμού; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
β) Να βρείτε τα α, β, γ ώστε το $f(x) = 2(x-1)^2 - 2x^2 + 5$ να είναι ίσο με το πολυώνυμο

$$g(x) = (a-1)x^2 + (a+\beta)x + \beta + \gamma - 3.$$

4.2. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = (\lambda^2 - 4)\,x^3 + (\mu+2)\,x^2 + \lambda^2 - 3\lambda + 2$, όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα λ, μ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) Το $f(x)$ είναι το μηδενικό β) Ο βαθμός του $f(x)$ είναι 0 γ) $f(x) = 5x^2$

4.3. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = (4-a^2)\,x^2 - (a-2)\,x + 5$, όπου a πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $f(x)$ για τις διάφορες τιμές του α.
β) Να βρείτε το α ώστε η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $f(x)$ για $x=-1$ να είναι ίση με 7.

4.4. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = (\lambda-2)\,x^4 - 5\lambda x^2 - 5$ για το οποίο είναι γνωστό ότι η αριθμητική του τιμή για $x=-1$ είναι ίση με -7. Να βρείτε το λ και στη συνέχεια τους πραγματικούς αριθμούς a, β για τους οποίους ισχύει $f(x) = 2x\,(ax^3+\beta) - 5(x+1)$.

4.5. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 2$.
α) Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς 1, -1, 2 είναι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$.
β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β έτσι ώστε $f(x) = (x^2-2)\,(ax+\beta)$.

4.6. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = 2x^3 + (\mu+5)\,x^2 + \mu - 1$, όπου μ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το μ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Το -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x)$.
β) Η αριθμητική του τιμή για $x=2$ είναι ίση με -3.
γ) $f(1) + 2f(0) = 2$.

4.7. Θεωρούμε πολυώνυμα $f(x) = x^3 - 2x + 1$ και $g(x) = 2x^2 - 3x + 2$. Να βρείτε τα πολυώνυμα:

α) $\varphi_1(x) = f(x) - 2g(x)$ β) $\varphi_2(x) = f(x)\cdot g(x)$ γ) $\varphi_3(x) = f(2x) + g(x-1)$

4.8. Να βρείτε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $f(x)$, τέτοιο ώστε $f(1)=1$, $f(-1)=7$ και

$$f(x) = x^2 f(\frac{1}{x}).$$

4.9. α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $f(x)$ για το οποίο ισχύει η ισότητα

$$\left(x^2-1\right) f(x) = 3x^3 + 2x^2 - 3x - 2.$$

β) Να βρείτε το πολυώνυμο $f(x)$ του (α) ερωτήματος και την αριθμητική του τιμή για $x=2$.

4.2 Διαίρεση πολυωνύμων

4.10. Να κάνετε τις διαιρέσεις:

α) $\left(2x^5 - x^3 + 2x^2 + 8\right) : \left(x^2 - 1\right)$ β) $\left(5x^4 + 3x^3 - 4x + 1\right) : \left(x^2 + 1\right)$

4.11. Να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των παρακάτω διαιρέσεων με δύο τρόπους:

α) $\left(x^3 - 2x^2 + 5x - 4\right) : (x - 2)$ β) $\left(x^4 - x^3 + ax + 3\right) : (x + 2)$

4.12. Να βρείτε πολυώνυμο $f(x)$ το οποίο όταν διαιρεθεί με το $x^2 + 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο $2x + 7$.

4.13. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + (a-1)x^2 + 5x + 2$, όπου α πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το α ώστε το $f(x)$ να έχει παράγοντα το $x - 3$.

4.14. Να βρείτε το υπόλοιπα των διαιρέσεων:

α) $\left(35x^{103} - 24x^{34} + 4x^4 - 5\right) : (x - 1)$ β) $\left(13x^{53} - 27x^{22} + 3\right) : (x + 1)$

4.15. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 4$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Αν το $f(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x) : (x - 1)$ είναι ίσο με 8, να βρείτε τα α, β.

4.16. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $x^2 - x + 5$ είναι τέλεια και το 1 είναι ρίζα του $f(x)$. Αποδείξτε ότι το $f(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $x^3 - 2x^2 + 6x - 5$.

4.17. Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $f(x)$ με το $2x + 1$ είναι τέλεια και το $x + 2$ είναι παράγοντας του $f(x)$. Αποδείξτε ότι το $f(x)$ έχει παράγοντα το πολυώνυμο $2x^2 + 5x + 2$.

4.18. Για καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x)$ δεν έχει παράγοντα της μορφής $x - \rho$:

α) $f(x) = 3x^8 + 5x^2 + 4$ β) $f(x) = -2x^{10} - 3x^4 - 4x^2 - 5$

4.19. Θεωρούμε το πολυώνυμο $f(x) = x^3 + ax^2 + \beta x + 5$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.
α) Να βρείτε τα α, β ώστε το $f(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 - 1$.
β) Να βρείτε τα α, β ώστε το $f(x)$ να έχει παράγοντα το $x^2 + x + 1$.

4.20. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - 2$, να δείξετε ότι το πολυώνυμο $f(x) = P\left(5x^2 - 3\right)$ έχει παράγοντα το $x + 1$.

4.21. Το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρεθεί με το $(x - 3)^5$ δίνει υπόλοιπο 4. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $f(x) : (x - 3)^2$.

4.22. Το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρεθεί με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο 3, ενώ όταν διαιρεθεί με το $x + 3$ δίνει υπόλοιπο 5. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $(x - 2)(x + 3)$.

4.23. Το πολυώνυμο $f(x)$ όταν διαιρεθεί με το $x - 1$ δίνει υπόλοιπο 2, ενώ όταν διαιρεθεί με το $x + 2$ δίνει υπόλοιπο 4. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x^2 + x - 2$.

4.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις

4.24. Να βρείτε το πλήθος των ακεραίων ριζών των εξισώσεων:

α) $x^7 + x^4 - 2 = 0$ β) $x^5 + x + 3 = 0$ γ) $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x + 1 = 0$

4.25. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - 8x + 7 = 0$ β) $2x^3 - x^2 + 3 = 0$ γ) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

4.26. Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(x^2 - 5x + 8\right)^3 - \left(x^2 - 5x + 8\right)^2 - \left(x^2 - 5x + 8\right) - 2 = 0.$$

4.27. Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(x^2 - 3x + 3\right)^3 - 2\left(x^2 - 3x + 3\right)^2 + 3\left(x^2 - 3x + 1\right) + 4 = 0.$$

4.28. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$ β) $\dfrac{1}{4}\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + \dfrac{1}{4}\eta\mu x + \dfrac{1}{2} = 0.$

4.29. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $(2x - 3)\left(x^2 - 3x + 2\right) \leq 0$ β) $(-5x + 3)\left(-x^2 + 6x - 5\right) > 0$

4.30. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 < 0$ β) $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 15x - 10 \geq 0$

4.31. Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς $x\,cm$ και ύψος $2x\,cm$. Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης και αυξήσουμε κατά $1\,cm$ το ύψος του τότε ο όγκος του αυξάνεται κατά $25\,cm^3$. Να βρείτε τον όγκο του αρχικού παραλληλεπιπέδου.

4.32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-1)(x+1)(x+2) = 24$ β) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

4.33. Αν η εξίσωση $ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + a = 0$ έχει ρίζα τον ρ, να δείξετε ότι έχει ρίζα και τον αριθμό $1/\rho$.

4.34. Η εξίσωση $ax^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta = 0$, με α, β, γ, δ μη μηδενικούς ακεραίους, έχει ρίζα τον ακέραιο ρ. Αν $a\rho^2 + \gamma = 0$, να βρείτε τις άλλες δύο ρίζες τις εξίσωσης.

4.35. Η εξίσωση $x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με α, β, γ ακεραίους, έχει ρίζα τον ακέραιο ρ. Να δείξετε ότι $|\rho| \leq |a| + |\beta| + |\gamma|$.

4.4 Ρητές και άρρητες εξισώσεις και ανισώσεις

4.36. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2-x}{x-3}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{1-x}{x^2-5x+6}$ β) $\dfrac{x}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{2x^3}{x^2-1}$

4.37. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2+2x+4}{x}+\dfrac{2x-5}{x-2}=\dfrac{-2}{x^2-2x}$ β) $\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{1}{x^2-x}=-\dfrac{1}{x}$

4.38. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^3-6x^2+4x+1}{10-x}\geq 0$ β) $\dfrac{x^3-2x^2-3x-6}{x-3}\geq 5$

4.39. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\dfrac{x^2}{x+1}\geq\dfrac{3x^2+4x-1}{x^2-1}$ β) $\dfrac{2x^2}{x+1}+\dfrac{5}{3-x}\geq\dfrac{x^2+11}{-x^2+2x+3}$

4.40. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{3x^2-9x+7}-x=x-3$ β) $x+\sqrt{5x+10}=8$ γ) $x-\sqrt{25-x^2}=1$

4.41. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $x\geq 1+\sqrt{x+5}$ β) $x\leq 2+\sqrt{x+10}$ γ) $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}<\sqrt{4x+1}$

4.42. Δίνεται η εξίσωση

$$\sqrt[3]{x^4}-3x+6\sqrt[3]{x}-a=0$$

όπου α πραγματικός αριθμός, της οποίας μία ρίζα είναι ο αριθμός 8. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α και στη συνέχεια να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

5 Εκθετική και Λογαριθμική συνάρτηση

5.1 Η εκθετική συνάρτηση

5.1. Ποιες από τις παρακάτω δυνάμεις ορίζονται;

$$3^{-\sqrt{2}}, \quad (-3)^5, \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad (-3)^{\sqrt{2}}, \quad (-3)^{-\sqrt{5}}, \quad 2^{\pi}, \quad (-1)^{\pi}, \quad 3^{-\frac{2}{3}}$$

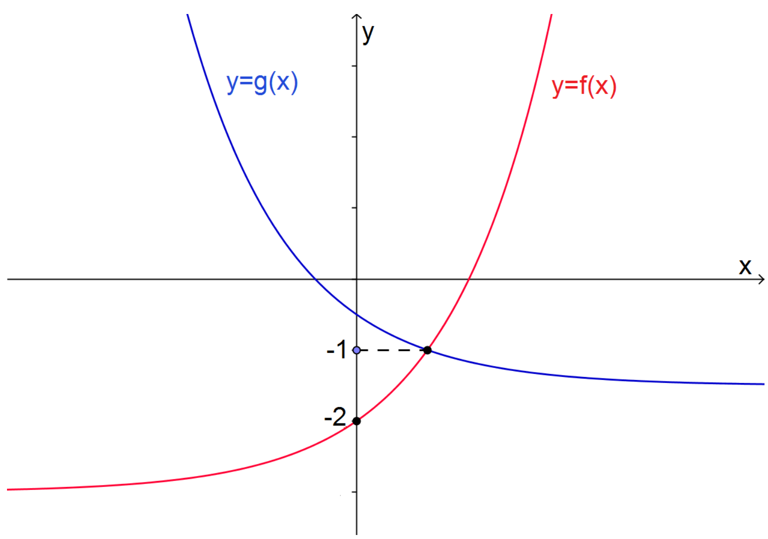
5.2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x, \quad g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x, \quad h(x) = f(x)g(x).$$

5.3. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = (3\mu - 2)^x$.
α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου μ.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η f είναι γνησίως φθίνουσα.
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του μ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-1, 5)$.

5.4. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και τύπο $f(x) = \left(\dfrac{\mu - 1}{3 - \mu}\right)^x$.
α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου μ.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η f είναι γνησίως αύξουσα.
γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του μ για την οποία η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, -2)$.

5.5. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 2^x - a$ και $g(x) = 2^{-x} - \frac{3}{2}$, όπου α πραγματικός αριθμός, των οποίων οι γραφικές παραστάσεις δίνονται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.
γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $2^{-x} = -x + \frac{3}{2}$.

5.6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot 2^{x+5} = 24$ β) $\dfrac{5}{8^x} = 20$ γ) $9 \cdot 3^x = \dfrac{1}{3^{2x-1}}$ δ) $5^{2x+3} = 1$ ε) $\dfrac{1}{e^x} = e^{3x}$

5.7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{-4x+3} = \sqrt[3]{2^5}$ β) $49 \cdot 7^{x-1} = \sqrt{7}$ γ) $3^{x-1} = 9\sqrt{3}$ δ) $\left(\sqrt{5}\right)^x = 5^{x+1}$

5.8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $9^x = 3^{4x}$ β) $7^x = \dfrac{1}{7^x}$ γ) $3^{x-6} = 0$ δ) $5^{2x-1} + 2 = 0$ ε) $5^x = 1^x$

5.9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot 5^x = 5 \cdot 3^x$ β) $3 \cdot 4^{2x} = 2 \cdot 3^{4x}$ γ) $\dfrac{2}{9} \cdot 3^{x+2} + \dfrac{1}{3} \cdot 3^{x+1} = \dfrac{1}{4} \cdot 2^{x+2} + 8 \cdot 2^{x-3}$

5.10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5^{2x+1} = 9^{x+\frac{1}{2}}$ β) $8 \cdot 3^{x+1} = 27 \cdot 2^{x+1}$ γ) $3^x - \dfrac{1}{40} \cdot 5^{x+1} = 3 \cdot 5^x - \dfrac{3}{8} \cdot 3^{x-1}$

5.11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{2x} - 4 \cdot 3^x + 3 = 0$ β) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ γ) $2^x - 5\sqrt{2^x} + 4 = 0$

5.12. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $8^{3x} - 4 \cdot 8^{2x} = 4 - 2^{3x}$ β) $3^{3x} - 9^x = 3^{x+1} - 3$

5.13. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2^{2x+1} = 0$ β) $5 \cdot 5^{2x} + 3 \cdot 9^x = 8 \cdot 3^x \cdot 5^x$

5.14. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left(x^2 - 5x + 5\right)^{x+2} = 1$ β) $\left(x^2 - x - 1\right)^{3x-2} = 1$ γ) $(2^x - 1)^{e^x - \sqrt{e}} = 1$

5.15. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $3^{x^2-7x+6} < 1$ β) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2-2x} < \left(\dfrac{1}{4}\right)^{x+\frac{5}{2}}$ γ) $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0$

5.16. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} 9^{x+1} = 3^{y+3} \\ 4^{x+y} = 8 \cdot 2^x \end{cases}$ β) $\begin{cases} 3^x - 2^y = 1 \\ 9^x - 4^y = 17 \end{cases}$ γ) $\begin{cases} e^x - \pi^y = 0 \\ 3e^x - 2\pi^y = 1 \end{cases}$

5.17. Η θερμοκρασία $f(t)$ σε $°C$ ενός ασθενούς με υψηλό πυρετό, t ώρες μετά την λήψη ενός αντιπυρετικού δίνεται από τον τύπο

$$f(t) = 36 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^t.$$

α) Να βρείτε πόσο πυρετό είχε ο ασθενής τη στιγμή που του χορηγήθηκε το αντιπυρετικό.
β) Να βρείτε σε πόσο χρόνο από τη στιγμή χορήγησης του αντιπυρετικού, η θερμοκρασία του ασθενούς θα πάρει την φυσιολογική τιμή των $36,5°C$.
γ) Είναι δυνατόν η θερμοκρασία του ασθενούς να πάρει τιμή κάτω από $36°C$;

5.18. Σε κάποιο πείραμα μελέτης της ανάπτυξης ενός πληθυσμού βακτηριδίων, ο τύπος που δίνει τον αριθμό των βακτηριδίων t ώρες από την έναρξη του πειράματος είναι της μορφής

$$f(t) = a \cdot 2^{\beta t}$$

όπου a, β θετικές σταθερές. Δίνεται ότι 2 ώρες από την έναρξη του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων είναι 60 ενώ 6 ώρες από την έναρξη του πειράματος 240.
α) Να βρείτε τις σταθερές α, β. Τι εκφράζει η σταθερά α;
β) Σε πόσο χρόνο από την έναρξη του πειράματος ο αριθμός των βακτηριδίων τετραπλασιάστηκε;

5.19. Μια ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού διασπάται σύμφωνα με τον τύπο

$$f(t) = a \cdot e^{-\beta t}$$

όπου a, β θετικές σταθερές και $f(t)$ η ποσότητα σε κιλά που έχει απομείνει μετά από t λεπτά μετά την μέτρηση της αρχικής μάζας 2 κιλών του ραδιενεργού υλικού. Το μισό της αρχικής ποσότητας διασπάστηκε σε 30 λεπτά. Να βρείτε τη μάζα του ραδιενεργού υλικού που θα έχει απομείνει 3 ώρες μετά από την μέτρηση της αρχικής μάζας.

5.2 Λογάριθμοι

5.20. Να βρείτε τον αριθμό x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $log_8 4 = x$ β) $log_4 x = -2$ γ) $log_x 3 = 2$ δ) $lnx = e$ ε) $logx = -3$

5.21. Αποδείξτε ότι

α) $5log2 + log10 - 3log4 = \frac{1}{2}log25$ β) $4ln\sqrt{5} + \frac{1}{2}ln25 + \frac{1}{3}ln125 = 4ln10 - ln16$

5.22. Με δεδομένο ότι $x > 0$ αποδείξτε ότι

α) $log_5 5^x + 5^x = e^{xln5} + e^{lnx}$ β) $ln1 + lne + lne^9 = 10^{log2} + e^{3ln2}$

5.23. Αποδείξτε ότι

α) $3ln100 + 5ln1000 = \frac{21}{loge}$ β) $loge + log\sqrt{e} = \frac{3}{2ln10}$ γ) $ln10 + loge \geq lne^2$

5.24. Με δεδομένο ότι a, β θετικοί αριθμοί διαφορετικοί του 1, αποδείξτε ότι

α) $log_a\beta \cdot log_{a^2}\beta \cdot log_{a^3}\beta = \frac{1}{6}\left(log_a\beta\right)^3$ β) $log_{a^3}\beta^3 \cdot log_{\beta^5}a^5 = 1$

5.25. α) Αν a, β, γ θετικοί αριθμοί με $a^{log\beta} = \gamma^2$ να δείξετε ότι $loga \cdot log\beta = 2log\gamma$.
β) Αν a, β, γ θετικοί αριθμοί με $\beta \cdot e^{loga} = a \cdot e^{\gamma}$ να δείξετε ότι $ln\frac{\beta}{a} = \gamma - loga$.
γ) Αν x, y θετικοί αριθμοί να δείξετε ότι $x^{logy} = y^{logx}$.

5.26. Ο θόρυβος y ενός ήχου σε dB δίνεται από τον τύπο $y = 20\left(log\frac{x}{2} - 1\right)$, όπου x η πίεση που ασκεί το ακουστικό κύμα στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα μετρούμενη σε μP.
α) Πόση πίεση ασκεί ένα κύμα θορύβου $20dB$ στα μόρια του αέρα;
β) Ένας κεραυνός άσκησε πίεση $2 \cdot 10^7 \mu P$ στα μόρια του ατμοσφαιρικού αέρα. Πόσα dB ήταν ο θόρυβος που προξένησε;

5.3 Η λογαριθμική συνάρτηση

5.27. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = lnx$ και $g(x) = log_{1/e}x$ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. Τι παρατηρείτε;

5.28. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = lnx + lnx^2 + a$$

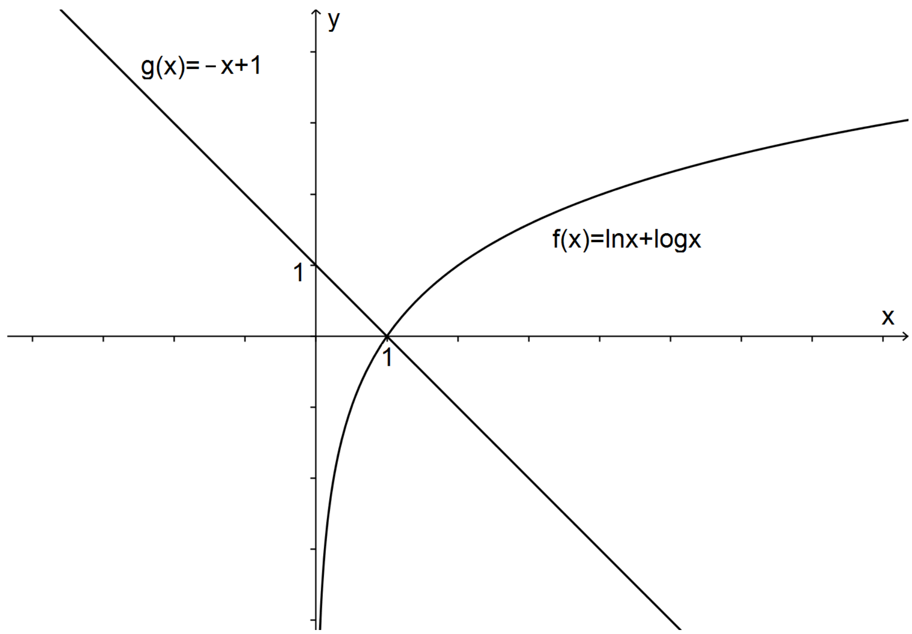
με α πραγματικό αριθμό, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(e, 3)$.
α) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = 3lnx$.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

5.29. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = lnx$ και $g(x) = logx$.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) - g(x) = \frac{(ln10 - 1)\, lnx}{ln10}.$$

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) > g(x)$, ενώ για κάθε $0 < x < 1$ ισχύει $f(x) < g(x)$.
γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

5.30. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = lnx + logx$ και $g(x) = -x + 1$.



α) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$.
β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > g(x)$.
γ) Αν $0 < a < 1$, αποδείξτε ότι $lna + a < 1 - loga$.

5.31. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $log(x-4) + log(x-2) = 2log\sqrt{3}$ β) $log(5-x) + 1 = log(x-2)$

5.32. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(logx)^2 - logx^5 + 6 = 0$ β) $(logx)^3 + 1 = (logx)^2 + logx$

5.33. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^x = 3$ β) $5^{1-4x} = e^2$ γ) $3^{logx} = 10$ δ) $x^{logx} \cdot \sqrt{x} = 1000$

5.34. Αφού πρώτα αποδείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό x ισχύει $x^{log3} = 3^{logx}$, να λύσετε την εξίσωση

$$3^{2logx} - 2 \cdot x^{log3} - 100^{log\sqrt{3}} = 0.$$

5.35. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α) $ln(2x+4) \geq 2ln4$ β) $ln\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{lnx}{2}$ γ) $ln\left(logx\right) < 0$

5.36. Να λύσετε τα συστήματα:

α) $\begin{cases} y^{logx} = 100 \\ log(xy) = 3 \end{cases}$ β) $\begin{cases} x^{logy} + y^{logx} = 20 \\ log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

5.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x),\ x > 0,$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
α) Αν $f(10) = 25$, να δείξετε ότι $\alpha = 1$.
β) Για την τιμή $\alpha = 1$ να δείξετε ότι η $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$$

και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

5.38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-2\left(\frac{1}{5}\right)^{2x} + 3\left(\frac{1}{5}\right)^{x} - 1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

5.39. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \ln(e^{2x} - 2e^x + 3) \quad \text{και} \quad g(x) = \ln 3 + \ln(e^x - 1)\,.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.
γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$.

5.40. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)\,.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.
β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.