ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

(Τελευταία ενημέρωση: Νοέμβριος 2016)

Ανέστης Τσομίδης
Κατερίνη

Περιεχόμενα

1 Διανυσματικός Λογισμός

1.1 Η έννοια του διανύσματος

1.1. Να σχεδιάσετε:
α) δύο ομόρροπα διανύσματα, β) δύο αντίρροπα διανύσματα, γ) δύο κάθετα διανύσματα.

1.2. Να σχεδιάσετε:
α) δύο ίσα διανύσματα, β) δύο αντίθετα διανύσματα, γ) δύο συγγραμμικά διανύσματα.

1.3. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη.
α) Για δύο διαφορετικά σημεία Α και Β ισχύει $\overrightarrow{AA} \neq \overrightarrow{BB}$.
β) Το διάνυσμα με αρχή το Κ και πέρας το Η συμβολίζεται $\overrightarrow{HK}$.
γ) Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλες ή ταυτίζονται.
δ) Αν $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
ε) Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ είναι το μηδενικό τότε ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

1.4. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λανθασμένη.
α) Αν $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα ή αντίθετα.
β) Αν $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|$ και $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα.
γ) Αν $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ τότε το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
δ) Αν $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ τότε το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.
ε) Αν το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο τρίγωνο τότε ισχύει $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma A}$.

1.5. Για ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για το τετράπλευρο ΑΒΓΔ;

1.6. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Υπολογίστε τις παρακάτω γωνίες:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \qquad (\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma B}) \qquad (\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Delta}) \qquad (\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Delta}) \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta})$$

1.7. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ. Υπολογίστε τις παρακάτω γωνίες:

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) \qquad (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) \qquad (\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{B\Gamma}) \qquad (\overrightarrow{A\Delta}, \overrightarrow{\Gamma A}) \qquad (\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{\Gamma\Delta})$$

1.8. Με δεδομένο ένα τρίγωνο ΑΒΓ, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ β) $\left|\overrightarrow{MA}\right| < \left|\overrightarrow{MB}\right|$ γ) $\overrightarrow{AM} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ δ) $\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$

ε) $\left|\overrightarrow{MA}\right| = 5$ ϛ) $\left|\overrightarrow{MA}\right| \geq 5$ ζ) $2\left|\overrightarrow{MA}\right|^2 = 5\left|\overrightarrow{MA}\right| - 2$ η) $1 < \left|\overrightarrow{MA}\right| < 2$

1.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

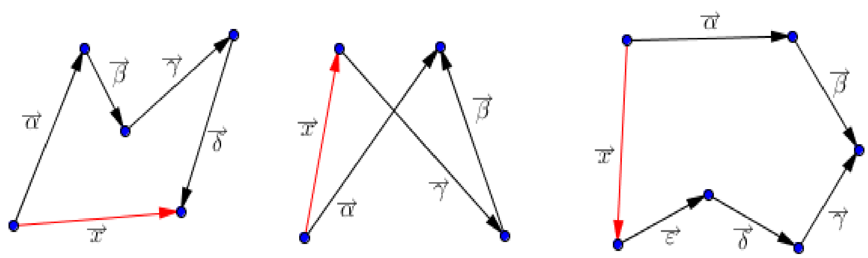
1.9. Να σχεδιάσετε ένα σκαληνό οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και να φέρετε τη διάμεσό του ΑΜ. Να βρείτε τα διανύσματα που ορίζονται από τις παρακάτω πράξεις:

α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ β) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}$ γ) $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{\Gamma M}$ δ) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}$

1.10. Να σχεδιάσετε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Να βρείτε τα διανύσματα που ορίζονται από τις παρακάτω πράξεις:

α) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Delta}$ β) $\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}$ γ) $\overrightarrow{B\Gamma}-\overrightarrow{BA}$ δ) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

1.11. Να βρείτε το διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:



1.12. Αν τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα και έχουν διαφορετικά μέτρα, να βρείτε τις δυνατές τιμές της γωνίας των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}$.

1.13. Αποδείξτε ότι για τα σημεία Α, Β, Μ, Ν ισχύει $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MN}$.

1.14. Για τυχαίο πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ αποδείξτε ότι ισχύει η ισότητα

$$\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{0}.$$

1.15. Έστω $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}, \overrightarrow{\gamma}, \overrightarrow{\delta}$ τα διανύσματα θέσεως των σημείων Κ, Λ, Μ, Ν ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Αν $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\gamma}=\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\delta}$, να δείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{\Lambda K}=\overrightarrow{MN}$ β) $\overrightarrow{NK}=\overrightarrow{M\Lambda}$

1.16. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$. Αποδείξτε ότι:

α) $|\overrightarrow{\alpha}|+\left|\overrightarrow{\beta}\right|<2\left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|$ β) $2|\overrightarrow{\alpha}|<\left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|+\left|\overrightarrow{\alpha}-\overrightarrow{\beta}\right|$

1.17. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ ισχύουν $|\overrightarrow{\alpha}|=4\left|\overrightarrow{\beta}\right|$ και $\left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|=5\left|\overrightarrow{\beta}\right|$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα.

1.18. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ ισχύουν $\left|\overrightarrow{\beta}\right|=2|\overrightarrow{\alpha}|$ και $\left|\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}\right|=|\overrightarrow{\alpha}|$. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι αντίρροπα.

1.19. Αν $\overrightarrow{\alpha}+\overrightarrow{\beta}+\overrightarrow{\gamma}=\overrightarrow{0}$ και $3|\overrightarrow{\alpha}|=4\left|\overrightarrow{\beta}\right|=12|\overrightarrow{\gamma}|$, να δείξετε ότι τα $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ είναι ομόρροπα ενώ τα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι αντίρροπα.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

1.20. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ, Λ, Μ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AK = \frac{2}{3}AB$, $B\Lambda = \frac{1}{4}B\Gamma$ και $\Gamma M = \frac{2}{5}\Gamma A$. Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $K\Lambda$ και ΛM ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\beta}$.

1.21. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε που ορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{B\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AE}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{\beta}$.

1.22. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{\beta}$. Παίρνουμε σημεία Ε, Ζ στη διαγώνιο ΑΓ τέτοια ώστε $AE = \Gamma Z = \frac{1}{4}A\Gamma$.

α) Να γράψετε καθένα από τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta E}$ και $\overrightarrow{ZB}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$.

β) Τι μπορούμε να συμπεράνουμε για το τετράπλευρο ΔΕΒΖ;

1.23. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma})$ β) $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

1.24. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$ β) $\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{B\Delta} = 2\overrightarrow{K\Lambda}$

1.25. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ και Μ το μέσο του ΚΓ. Αποδείξτε ότι

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta} + 2\overrightarrow{A\Gamma} = 4\overrightarrow{AM}.$$

1.26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ και Μ το μέσο του ΑΚ. Έστω Ν σημείο της πλευράς ΑΒ τέτοιο ώστε $5\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB}$. Αποδείξτε ότι

$$5\overrightarrow{A\Delta} = 3\overrightarrow{\Delta\Gamma} - 20\overrightarrow{MN}.$$

1.27. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ, ώστε $\overrightarrow{M\Gamma} = -2\overrightarrow{MB}$. Αποδείξτε ότι:

α) $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$ β) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Delta} + 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$

1.28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ τέτοιο ώστε $3\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{M\Gamma} = \overrightarrow{0}$. Να δείξετε ότι:

α) $\overrightarrow{BM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}$ β) $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma}$

1.29. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{\Gamma E} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B\Gamma}, \qquad \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{5}\overrightarrow{A\Gamma}.$$

Να δείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

1.30. Με δεδομένο ότι:

$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma}, \quad \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}, \quad \overrightarrow{O\Gamma} = -4\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta} - 5\overrightarrow{\gamma},$$

να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

1.31. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

α) $7\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{\Gamma M} = 4\overrightarrow{MA}$ β) $3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = 3\overrightarrow{M\Gamma}$

1.32. Θεωρούμε οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε το σημείο Μ.

α) $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} + 3\overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{0}$ β) $\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{\Gamma M}$

1.33. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta} = 5\overrightarrow{MA} - 8\overrightarrow{M\Gamma} + 3\overrightarrow{MB}$ είναι σταθερό.

1.34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\delta} = \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{M\Gamma}$ να είναι ανεξάρτητο της θέσης του σημείου Μ.

1.35. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ. Να δείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ ισχύει

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 4\overrightarrow{MK}.$$

1.36. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ. Θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{AM}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{H\Gamma} = 6\overrightarrow{AM}$.

1.37. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Κ και τις κάθετες χορδές του ΑΒ, ΓΔ οι οποίες τέμνονται στο σημείο Μ. Να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + \overrightarrow{M\Delta} = 2\overrightarrow{MK}.$$

1.38. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν $\overrightarrow{A\Gamma} = -\kappa\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \kappa\overrightarrow{\Delta B}$ και το Γ είναι μέσο του τμήματος ΑΔ.

1.39. Θεωρούμε τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\beta}$. Να δείξετε ότι ο φορέας του διανύσματος

$$\overrightarrow{\delta} = \frac{\overrightarrow{\alpha}}{|\overrightarrow{\alpha}|} + \frac{\overrightarrow{\beta}}{\left|\overrightarrow{\beta}\right|}$$

με αρχή το Ο, διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{O}B$.

1.40. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ τα οποία είναι ανά δύο μη συγγραμμικά. Αν $\overrightarrow{\alpha} \parallel (\overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma})$ και $\overrightarrow{\beta} \parallel (\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\gamma})$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{\gamma} \parallel (\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta})$.

1.41. Αν κ, λ είναι θετικοί αριθμοί και $\overrightarrow{AM} = \kappa\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{AN} = \lambda\overrightarrow{NB}$, να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\lambda - \kappa}{(1+\kappa)(1+\lambda)}\overrightarrow{AB}.$$

1.42. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ να δείξετε ότι:

α) $\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| \leq \left|\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}\right| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$ β) $\left|\overrightarrow{\alpha} + 3\overrightarrow{\beta}\right| \leq \left|\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\beta}\right| + \left|\overrightarrow{\beta}\right|$

1.43. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 4. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right| = \left|4\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB}\right|.$$

1.44. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Δ το μέσο της ΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda\overrightarrow{A\Delta}$$

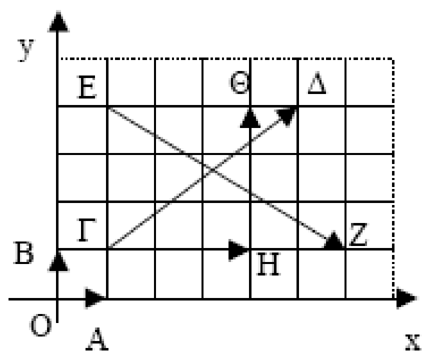
όπου ο λ διατρέχει το κλειστό διάστημα $[-1, 2]$.

1.45. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} + 2\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} - 2\overrightarrow{MA}\right|.$$

1.4 Συντεταγμένες στο επίπεδο

1.46. Στο σύστημα συντεταγμένων του παρακάτω σχήματος είναι $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{i}$ και $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{j}$. Να γράψετε ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, $\overrightarrow{EZ}$, $\overrightarrow{H\Theta}$, $\overrightarrow{\Gamma H}$ και να βρείτε τις συντεταγμένες τους.



1.47. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (\lambda^2 - 4, \lambda + 2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (4\lambda - 7, 3)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{0}$.
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$.

1.48. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (\lambda^2 - 16, -4\lambda + \lambda^2)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{\alpha} \parallel x'x$ και $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$.
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε $\overrightarrow{\alpha} \parallel y'y$ και $\overrightarrow{\alpha} \neq \overrightarrow{0}$.

1.49. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, -3)$, $\overrightarrow{\beta} = (-1, 2)$ και $\overrightarrow{\gamma} = (-1, 1)$.
α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{\alpha} - 2\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{\alpha} + 4\overrightarrow{\gamma}$.
β) Να γράψετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.

1.50. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (-2, 5)$. Να βρείτε τα διανύσματα τα οποία είναι συγγραμμικά με το $\overrightarrow{\alpha}$ και έχουν μέτρο τριπλάσιο του μέτρου του $\overrightarrow{\alpha}$.

1.51. Δίνονται τα σημεία $A(1, 2)$, $B(3, 5)$, $\Gamma(5, 7)$, $\Delta(-10, -11)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και στη συνέχεια να γράψετε το $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$.

1.52. Θεωρούμε τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(3, -1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{AB}$ β) $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$ γ) $\overrightarrow{AM} = -3\overrightarrow{MB}$

1.53. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-1, 4)$, $B(5, 2)$ και κέντρο βάρους $G(0, -3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της ΒΓ και της κορυφής Γ.

1.54. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο $K(4, 5)$ και $A(1, 2)$, $B(5, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ.

1.55. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα $K(4,0)$, $\Lambda(6,2)$, $M(3,5)$ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β, Γ.

1.56. Δίνονται τα σημεία $A(3,-4)$ και $B(2,1)$.
α) Να βρείτε το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β.
β) Να βρείτε το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α.

1.57. Έστω το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = (\lambda - 1, -2)$, όπου λ πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το λ ώστε $|\overrightarrow{\alpha}| = 3$.

1.58. Θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = \left(|\overrightarrow{\alpha}| - 1, \sqrt{5}\right)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{\alpha}$.

1.59. Έστω $\overrightarrow{x} = |\overrightarrow{x}|\,\overrightarrow{i} + (|\overrightarrow{x}| - 1)\,\overrightarrow{j}$, όπου $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{i}$.

1.60. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(-2,-5)$ και $\Gamma(1,7)$. Να βρείτε τα μέτρα των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$.

1.61. Δίνονται τα σημεία $A(-2,3)$ και $B(3,4)$.
α) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ ώστε το τρίγωνο ΑΒΜ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ.
β) Να βρείτε σημείο Ν του άξονα $y'y$ ώστε το τρίγωνο ΑΒΝ να είναι ισοσκελές με κορυφή το Ν.

1.62. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (\lambda^2 - 5, -2\lambda)$ και $\overrightarrow{\beta} = (-2,1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι συγγραμμικά.
β) Για ποιά τιμή του λ τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι ομόρροπα;

1.63. Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ, έτσι ώστε τα σημεία $A(\kappa, \kappa-1)$, $B(-1,3)$, $\Gamma(2\kappa, 6)$ να είναι συνευθειακά.

1.64. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha} = \left(\sqrt{12}, \kappa^2 + 2\right)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε το κ ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ να σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα $x'x$.
β) Για τις τιμές του κ που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να δείξετε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{\alpha}$ είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta} = \left(\sqrt{75}, 15\right)$.

1.65. Θεωρούμε τα σημεία $A(1,2)$, $B(4,3)$, $\Gamma(6,-1)$, $\Delta(\lambda, 2\lambda - 1)$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο.

1.66. Θεωρούμε τα σημεία $A(1,2)$ και $B(3,4)$.
α) Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$, ώστε το άθροισμα των αποστάσεών του από τα Α, Β να είναι ελάχιστο.
β) Να βρείτε σημείο Ν του άξονα $x'x$, ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών του από τα Α, Β να είναι μέγιστη.

1.5 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

1.67. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 2 και ΑΔ ύψος του τριγώνου. Να υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

1.68. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (\kappa - 1, -2)$ και $\overrightarrow{\beta} = (-4, 10)$, όπου κ πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 20$.
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ, αν τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

1.69. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = -9$, $|\overrightarrow{\alpha}| = 3$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 6$ β) $\overrightarrow{\alpha} = (0, -\sqrt{2})$, $\overrightarrow{\beta} = (1, -1)$

1.70. Έστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\left(3\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right) \cdot \left(\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}\right)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\overrightarrow{\alpha}| = 2$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 1$, $\varphi = 60^\circ$ β) $\overrightarrow{\alpha} = (-1, 4)$, $\overrightarrow{\beta} = (3, -2)$

1.71. Έστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$. Να βρείτε το $\left|2\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}\right|$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 2$, $\varphi = 120^\circ$ β) $\overrightarrow{\alpha} = (2, 3)$, $\overrightarrow{\beta} = (1, -2)$

1.72. Έστω φ η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ και ω η γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha} - 3\overrightarrow{\beta}$, $2\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$. Να βρείτε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $|\overrightarrow{\alpha}| = 2$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 3$, $\varphi = 60^\circ$ β) $\overrightarrow{\alpha} = (-3, 1)$, $\overrightarrow{\beta} = (2, -3)$

1.73. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$ με $\left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\alpha}| = \left|\overrightarrow{\beta}\right| \neq 0$.
α) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\beta}$.
β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $2\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}$.

1.74. Θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma}$ με $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} - \sqrt{3}\overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ και $|\overrightarrow{\alpha}| = \left|\overrightarrow{\beta}\right| = |\overrightarrow{\gamma}| = 1$.
α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{\beta}$ και $\overrightarrow{\gamma}$.
β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$ και $\overrightarrow{\gamma}$.

1.75. Αν $\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ και $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 2$, $|\overrightarrow{\gamma}| = 3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma} + \overrightarrow{\gamma} \cdot \overrightarrow{\alpha}$.

1.76. α) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $x^2 + y^2 = 4$, να δείξετε ότι

$$-20 \leq 8x + 6y \leq 20.$$

β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν οι σχέσεις $x^{38} + y^{12} = 2$ και $x^{12} + y^{38} = 2$, να δείξετε ότι

$$-2 \leq x^{25} + y^{25} \leq 2.$$

1.77. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (\kappa, \lambda)$, $\overrightarrow{\beta} = (\mu, \nu)$ είναι κάθετα μεταξύ τους και το καθένα έχει μέτρο ίσο με 2. Να δείξετε ότι

$$|\kappa\nu - \lambda\mu| = 4.$$

1.78. Αν $|\overrightarrow{\alpha}| = 2$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 5$, $|\overrightarrow{\gamma}| = 2$ και $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma} = -20$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ είναι συγγραμμικά.

1.79. Θεωρούμε τα μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ για τα οποία ισχύει η σχέση

$$\frac{\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta}}{|\overrightarrow{\alpha}|\left|\overrightarrow{\beta}\right|} + \frac{\overrightarrow{\beta} \cdot \overrightarrow{\gamma}}{\left|\overrightarrow{\beta}\right||\overrightarrow{\gamma}|} = 2.$$

Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ είναι ομόρροπα.

1.80. Θεωρούμε τα κάθετα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$. Να βρείτε τα $|\overrightarrow{\alpha}|$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right|$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\left|2\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right| = \sqrt{13}$ β) $\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = 2$, $\left|\overrightarrow{\alpha} + 2\overrightarrow{\beta}\right| = 3$

1.81. Αν $|\overrightarrow{\alpha}| = \left|\overrightarrow{\beta}\right| = \left|\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right|$, τότε να δείξετε ότι $\left|\overrightarrow{\alpha} - \overrightarrow{\beta}\right| = \sqrt{3}\,|\overrightarrow{\alpha}|$.

1.82. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ η γωνία των οποίων είναι ίση με $\pi/3$. Για το διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ ισχύουν $\overrightarrow{x} \parallel \left(\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta}\right)$ και $\overrightarrow{\beta} \perp (\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{x})$. Να δείξετε ότι

$$\overrightarrow{x} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{\alpha} - \frac{1}{3}\overrightarrow{\beta}.$$

1.83. Για τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ και $\overrightarrow{x}$ ισχύουν οι σχέσεις $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\beta} = 3$, $\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{\gamma} = 8$ και $(\overrightarrow{\alpha} \cdot \overrightarrow{x})\,\overrightarrow{\beta} = \overrightarrow{\gamma} + \overrightarrow{x}$. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{x} = 4\overrightarrow{\beta} - \overrightarrow{\gamma}$.

1.84. α) Αν για τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$ ισχύει $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\beta} = 0$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.
β) Αν για κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{x}$ του επιπέδου ισχύει $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{\beta}$, να δείξετε ότι $\overrightarrow{\alpha} = \overrightarrow{\beta}$.

1.85. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και το μέσο Μ της ΒΓ. Αν ισχύει η σχέση

$$\left(\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}\right) \overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}\right) \overrightarrow{B\Gamma}$$

τότε να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

1.86. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (3,4)$, $\overrightarrow{\beta} = (2,-1)$ και $\overrightarrow{\gamma} = (4,1)$.
α) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\gamma}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις αυτές των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$.
β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ σε δύο συνιστώσες, μία παράλληλη προς το $\overrightarrow{\alpha}$ και μία κάθετη σ' αυτό.

1.87. Τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\beta}$, $\overrightarrow{\gamma}$ σχηματίζουν γωνίες $20°$, $50°$, $80°$ αντίστοιχα, με τον άξονα $x'x$. Ακόμη είναι $|\overrightarrow{\alpha}| = 1$, $\left|\overrightarrow{\beta}\right| = 2$ και $|\overrightarrow{\gamma}| = 3$. Να αναλύσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\beta}$ σε δύο συνιστώσες με διευθύνσεις αυτές των διανυσμάτων $\overrightarrow{\alpha}$, $\overrightarrow{\gamma}$.

1.88. Στο επίπεδο δίνονται τα σταθερά σημεία Α, Β και έστω Κ το μέσο του τμήματος ΑΒ. Αν Ο είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{OM}^2 - 2\overrightarrow{OK} \cdot \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

1.89. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου του για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{A\Gamma} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$.

1.90. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2.$$

1.91. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ με $B(3,2)$ και $\Delta(1,0)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ.

1.92. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με διαμέσους ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ και κέντρο βάρους G. Έστω Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου.
α) Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{B\Lambda} + \overrightarrow{\Gamma M} = \overrightarrow{0}$ και $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{0}$.
β) Αποδείξτε ότι η παράσταση $\overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{O\Gamma}^2$ γίνεται ελάχιστη όταν το σημείο Ο ταυτίζεται με το G.

2 Η ευθεία στο επίπεδο

2.1 Εξίσωση ευθείας

2.1. Έστω η ευθεία ε η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(2, \mu)$, $B(5, 2\mu)$, όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το μ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Η ευθεία ε σχηματίζει γωνία $135°$ με τον άξονα $x'x$.
β) Η ευθεία ε είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\overrightarrow{a} = (6, 10)$.
γ) Η ευθεία ε είναι παράλληλη στην ευθεία ε_1 η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης -2.
δ) Η ευθεία ε είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 η οποία έχει συντελεστή διεύθυνσης $1/9$.

2.2. Θεωρούμε τα σημεία $A(4, 3)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(-2, 5)$. Αποδείξτε ότι τα Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου και στη συνέχεια ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

2.3. Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία Α και Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα $x'x$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $A(-8, -4)$, $B(5, 9)$ β) $A(5, -7)$, $B(5, -2)$ γ) $A(2, 4)$, $B(-3, 4)$

2.4. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία ζ. Να βρείτε την εξίσωση της ε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\zeta : y = 4x - 5$ β) $\zeta : y = 5$ γ) $\zeta : x = 3$

2.5. Η ευθεία ε διέρχεται από το σημείο $A(3, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ζ. Να βρείτε την εξίσωση της ε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\zeta : y = 3x + 5$ β) $\zeta : y = 4$ γ) $\zeta : x = -2$

2.6. Η ευθεία ε διέρχεται από τα σημεία $A(2, -3)$ και Β. Να βρείτε την εξίσωση της ε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $B(7, 12)$ β) $B(0, 0)$ γ) $B(6, -3)$ δ) $B(2, 5)$

2.7. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -4x + 5$ και $\varepsilon_2 : y = -2x + 3$.
α) Να εξετάσετε αν το σημείο $M(2, -4)$ ανήκει στην ευθεία ε_1.
β) Να βρείτε το $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε το σημείο $N(2\mu, \mu - 1)$ να ανήκει στην ευθεία ε_2.

2.8. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = 3x + 2$ και $\varepsilon_2 : y = 5x + 6$.
α) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας ε_1 με τους άξονες $x'x$, $y'y$.
β) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2.

2.9. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1, ε_2 (τεμνόμενες, παράλληλες, ταυτιζόμενες), για τις διάφορες τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\varepsilon_1 : y = 2\lambda x - 5$, $\varepsilon_2 : y = 4x - \mu$ β) $\varepsilon_1 : y = \lambda x + 3$, $\varepsilon_2 : y = x + 2\mu$

2.10. Θεωρούμε το σημείο $M(3\lambda - 1, \mu + 2)$, όπου λ, $\mu \in \mathbb{R}$ και τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = x + 3$, $\varepsilon_2 : y = 2x - 1$ και $\varepsilon_3 : y = -x + 4$. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται στο Α, ενώ οι ευθείες ε_2 και ε_3 τέμνονται στο Β. Να βρείτε τα λ, μ αν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

2.11. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y = -x + 1$ και το σημείο $M(2, 3)$.
α) Να βρείτε την προβολή του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ε.
β) Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου Μ ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ε.

2.12. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : y = -2x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = 2x - 3$. Να βρείτε την εξίσωση της συμμετρικής της ε_1 ως προς άξονα συμμετρίας την ε_2.

2.13. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : y = -5x + 3$. Να βρείτε την εξίσωση της συμμετρικής της ε ως προς:

α) τον $x'x$ β) τον $y'y$ γ) την ευθεία $y = x$ δ) το σημείο $O(0, 0)$

2.14. Θεωρούμε το τρίγωνο με κορυφές $A(-1, 2)$, $B(-2, -2)$, $\Gamma(-1, 2)$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου μ_α.
β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους υ_α.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΓ.
δ) Να βρείτε την εξίσωση της διχοτόμου δ_β.

2.15. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-1, 1)$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3 τ.μ.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, η οποία είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = -2x + 13$ και σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 12 τ.μ.

2.16. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $M(\lambda - 1, 2\lambda)\,, \lambda \in \mathbb{R}$ β) $M(\lambda + 3, 5\lambda - 2)\,, \lambda \neq 1$ γ) $M(4\lambda, \lambda)\,, \lambda \geq 0$

2.17. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(\lambda - 4, 2\lambda - 5)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lambda \in \mathbb{R}$ β) $\lambda \neq 2$ γ) $\lambda \geq 1$ δ) $0 \leq \lambda \leq 4$ ε) $2 < \lambda < 5$

2.18. Σε χάρτη με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι συντεταγμένες δύο πλοίων είναι $\Pi_1(t + 2, t + 5)$ και $\Pi_2(3t, 6t - 5)$, για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$.
α) Όταν το Π_1 έχει συντεταγμένες $(5, 8)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του Π_2.
β) Να δείξετε ότι τα δύο πλοία κινούνται πάνω σε ευθείες ε_1, ε_2 των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.
γ) Να δείξετε ότι οι ε_1, ε_2 τέμνονται.
δ) Να εξετάσετε αν τα δύο πλοία θα συγκρουστούν.

2.19. Σε χάρτη με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy οι συντεταγμένες ενός πλοίου είναι $\Pi(2t - 40, t - 30)$, για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$. Το πλοίο ξεκινά από το λιμάνι Α με εντολή να φτάσει στο λιμάνι $B(-44, -32)$.
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του λιμανιού Α.

β) Να δείξετε ότι το πλοίο Π κινείται πάνω σε ευθεία ε, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
γ) Να δείξετε ότι το σημείο B ανήκει στην ευθεία ε.
δ) Να εξετάσετε αν το πλοίο θα φτάσει στο λιμάνι B.

2.20. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,2)$. Οι εξισώσεις των υψών του υ_β, υ_γ είναι $y=-x$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

2.21. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,2)$. Οι εξισώσεις των διαμέσων του μ_β, μ_γ είναι $y=2x-1$, $y=-2x+5$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

2.22. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,3)$. Οι εξισώσεις των διχοτόμων του δ_β, δ_γ είναι $y=x$, $y=-\frac{1}{2}x$ αντίστοιχα. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

2.23. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1,1)$. Αν $\mu_\gamma : y=-x+1$ και $\upsilon_\beta : y=2$, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ.

2.24. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κέντρο βάρους $G(-1,0)$. Οι εξισώσεις των πλευρών ΒΓ και ΑΓ είναι $y=-1$ και $y=-x+1$ αντίστοιχα. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

2.2 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας

2.25. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : \mu x+(\mu-1)y=3\mu$, $\varepsilon_2 : (\mu-1)x+\mu y=2\mu$, όπου $\mu\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το μ ώστε οι ευθείες ε_1, ε_2 να είναι κάθετες.

2.26. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x+y+2=0$, $\varepsilon_2 : x+y+1=0$ και $\varepsilon_3 : 5x-y+5=0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 συντρέχουν σε σημείο Μ του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

2.27. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x-2y+4=0$, $\varepsilon_2 : x+y-5=0$ και $\varepsilon_3 : 4x-y+\kappa=0$ όπου $\kappa\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το κ ώστε οι ευθείες ε_1, ε_2, ε_3 να συντρέχουν.

2.28. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\lambda^2-4\right)x+\left(\lambda^2-3\lambda+2\right)y+\lambda=0 \qquad (1)$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$.
γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$.

2.29. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x+y+1=0$ και $\varepsilon_2 : 2x+2y+3=0$. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες και να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1, ε_2.

2.30. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : \lambda x - y + 3 = 0$ και $\varepsilon_2 : (2\lambda - 1)x - y - 5 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.
α) Αποδείξτε ότι για τις τιμές του λ που οι ευθείες τέμνονται, το σημείο τομής τους βρίσκεται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
β) Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών α, β ώστε η ευθεία ε να είναι η μεσοπαράλληλη των ευθειών $\delta_1 : x - y - 2 = 0$ και $\delta_2 : \alpha x - \beta y + 3 = 0$.

2.31. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1, ε_2 σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\varepsilon_1 : 3x - y = 0,\ \varepsilon_2 : 4x + 2y + 7 = 0$ β) $\varepsilon_1 : \sqrt{3}x - y = 0,\ \varepsilon_2 : \sqrt{3}x + y = 0$

2.32. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

α) $(x - 3y)(x + 3y) = 0$ β) $|x - 3y + 2| = |2x + y|$ γ) $6x^2 + xy - 2y^2 = 0$

2.33. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις:

α) $|3x| - |y| = 0$ β) $x^2 - xy - 2y^2 = 0$ γ) $2x^2 + y^2 - 3xy + x - 1 = 0$

2.34. Δίνεται η εξίσωση

$$\left(\lambda^2 - 1\right) x + \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) y + 6\lambda - 6 = 0 \qquad (1)$$

όπου λ πραγματικός αριθμός.
α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \neq 1$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από σταθερό σημείο (αν αυτό συμβαίνει να βρείτε και τις συντεταγμένες του).

2.35. Δίνεται η εξίσωση

$$(1 + \sigma\upsilon\nu\vartheta)\, x + (1 - \sigma\upsilon\nu\vartheta)\, y + \sigma\upsilon\nu\vartheta + 3 = 0 \qquad (1)$$

όπου ϑ πραγματικός αριθμός.
α) Να δείξετε ότι για κάθε ϑ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
β) Να εξετάσετε αν οι ευθείες της μορφής (1) διέρχονται από σταθερό σημείο (αν αυτό συμβαίνει να βρείτε και τις συντεταγμένες του).

2.36. Θεωρούμε το τρίγωνο ΟΑΒ, όπου Ο η αρχή των αξόνων και $A(2,0)$, $B(0,2)$. Αν Μ είναι ένα μεταβλητό σημείο της πλευράς ΑΒ και Κ, Λ οι προβολές του Μ πάνω στις πλευρές ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα, να δείξετε ότι η μεσοκάθετος του τμήματος ΚΛ διέρχεται από σταθερό σημείο.

2.3 Απόσταση σημείου από ευθεία και εμβαδό τριγώνου

2.37. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 7 = 0$. Να βρείτε σημείο Μ του άξονα $x'x$ το οποίο να απέχει 2 μονάδες μήκους από την ευθεία ε.

2.38. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 6x + 8y - 2 = 0$. Να βρείτε σημείο Μ της ε_1 το οποίο να απέχει 4 μονάδες μήκους από την ευθεία ε_2.

2.39. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 4y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : 6x + 8y + 3 = 0$. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες και στη συνέχεια να βρείτε την απόστασή τους.

2.40. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία $A(-2, 3)$, $B(4, -5)$, $\Gamma(-3, 1)$.

2.41. Θεωρούμε την ευθεία $\varepsilon : x - 2y - 1 = 0$ και τα σημεία $A(1, 1)$, $B(5, 5)$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε, τέτοιο ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ να είναι ίσο με 4.

2.42. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ και $\varepsilon_2 : \sqrt{3}x + y + 5 = 0$. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1, ε_2 τέμνονται και στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1, ε_2.

2.43. Θεωρούμε τις ευθείες $\varepsilon_1 : x - 2y = 0$ και $\varepsilon_2 : x + 2y = 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει

$$\frac{d\,(M, \varepsilon_1)}{d\,(M, \varepsilon_2)} = 2.$$

2.44. Θεωρούμε τα σημεία $A(-5, 0)$ και $B(3, 1)$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(MAB) = 2$.

3 Κωνικές τομές

3.1 Κύκλος

3.1. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(3,-1)$ και διέρχεται από το $A(7,3)$.
β) Ο κύκλος έχει αντιδιαμετρικά τα σημεία $A(5,-2)$ και $B(-1,-4)$.
γ) Ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $A(2,-6)$, $B(1,7)$ και το κέντρο του είναι σημείο της ευθείας $\varepsilon : 3x+2y=0$.
δ) Ο κύκλος διέρχεται από τα σημεία $A(3,3)$, $B(0,2)$ και έχει ακτίνα 5.

3.2. Να βρείτε τη σχετική θέση των κύκλων C_1, C_2 σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $C_1 : (x-1)^2+(y+1)^2=121$ $\qquad$ $C_2 : (x+7)^2+(y-5)^2=1$
β) $C_1 : (x+5)^2+(y-2)^2=5$ $\qquad$ $C_2 : (x+2)^2+(y-6)^2=2$

3.3. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1 : (x-3)^2+y^2=4$ και $C_2 : x^2+(y-4)^2=9$. Να δείξετε ότι οι C_1, C_2 εφάπτονται εξωτερικά και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

3.4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει ακτίνα 10 και εφάπτεται του κύκλου $x^2+y^2=25$ στο σημείο $A(-4,3)$.

3.5. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1 : x^2+y^2=1$ και $C_2 : (x-3)^2+(y-2)^2=4$.
α) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_1, C_2.
β) Να βρείτε την εξίσωση της διακεντρικής ευθείας.
γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του (AB), όπου το A ανήκει στον C_1 και το B στον C_2.

3.6. Θεωρούμε τα σημεία $M(1+3\sigma\upsilon\nu t, -2+3\eta\mu t)$ όπου $t\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι τα σημεία M βρίσκονται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

3.7. Μία σκάλα AB μήκους 6 είναι τοποθετημένη κατακόρυφα σε ένα τοίχο. Το κάτω άκρο της σκάλας A γλιστράει και τελικά η σκάλα πέφτει στο έδαφος. Να βρείτε το είδος της γραμμής που διαγράφει το μέσο M της σκάλας AB.

3.8. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2+y^2=4$ και την ευθεία $\varepsilon : 3x-y+1=0$. Να δείξετε ότι τα μέσα των χορδών του C οι οποίες είναι παράλληλες στην ε βρίσκονται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

3.9. Θεωρούμε τον κύκλο $C_1 : (x+1)^2+y^2=36$ και τους κύκλους C_A με την ιδιότητα να εφάπτονται στον C_1 και να διέρχονται από το σημείο $A(1,0)$. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C_A βρίσκονται στη γραμμή με εξίσωση $8x^2+9y^2=72$.

3.10. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις παριστάνει κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα:

α) $x^2+y^2-x+6y+5=0$ β) $2x^2+2y^2=3x$ γ) $(3x-9)^2+(3y+15)^2=36$

3.11. Θεωρούμε το σημείο $M(3,0)$ και την εξίσωση $x^2+y^2-4x-4y=0 \quad (1)$.
α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο C, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β) Αποδείξτε ότι το Μ είναι εσωτερικό του κύκλου C.
γ) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής του κύκλου C η οποία έχει μέσο το Μ.

3.12. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2,1)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(1,4)$.
α) Αποδείξτε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
β) Να βρείτε την εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

3.13. Έστω λ πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2+y^2-x-7+\lambda(3x-2y+1)=0. \qquad (1)$$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι για τις διάφορες τιμές του λ, τα κέντρα των κύκλων της μορφής (1), βρίσκονται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

3.14. Θεωρούμε τους κύκλους

$$C_1 : x^2+y^2-2x+4y+1=0 \quad \text{και} \quad C_2 : x^2+y^2+4x+6y+2=0.$$

Αποδείξτε ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται και να βρείτε την εξίσωση της κοινής χορδής τους.

3.15. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου, των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία $A(0,2)$, $B(0,-2)$ είναι σταθερός και ίσος με 3.

3.16. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2+y^2=36$ και το σημείο $A(-2,2)$ εντός αυτού. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων Μ των χορδών του C, οι οποίες διέρχονται από το Α.

3.17. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2+y^2+4x+1=0$. Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου C και της ευθείας ε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\varepsilon : y=-x$ β) $\varepsilon : y=2x$ γ) $\varepsilon : y=\sqrt{3}x$

3.18. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2+y^2-2x-1=0$. Αποδείξτε ότι η ευθεία $\varepsilon : y=x-3$ εφάπτεται του κύκλου C και να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.

3.19. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(3,-1)$ και εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon : y=2x+3$.
β) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(3,-1)$ και αποκόπτει χορδή μήκους 6 από την ευθεία $\varepsilon : 2x-5y+18=0$.
γ) Ο κύκλος έχει κέντρο το $K(3,-1)$ και εφάπτεται του άξονα $x'x$.
δ) Ο κύκλος εφάπτεται στις ευθείες $\varepsilon_1 : 2x+3y-2=0$, $\varepsilon_2 : 2x+3y+4=0$ και το ένα από τα δύο σημεία επαφής είναι το $A(1,-2)$.

3.20. Θεωρούμε τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(-2, -5)$ και $\Gamma(10, 4)$.
α) Αποδείξτε ότι τα σημεία Α, Β, Γ αποτελούν κορυφές τριγώνου.
β) Να βρείτε την εξίσωση του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

3.21. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ και την ευθεία $\varepsilon : 8x - 6y + 19 = 0$.
α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε και ο κύκλος C τέμνονται.
β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 + \lambda(8x - 6y + 19) = 0$, παριστάνει κύκλο C_λ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
γ) Να δείξετε ότι ο κύκλος C_λ διέρχεται από τα σημεία τομής των ε και C.

3.22. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων ε_A, ε_B του C στα σημεία του $A(1, -3)$ και $B(3, \mu)$ αντίστοιχα, όπου μ αρνητικός πραγματικός αριθμός.

3.23. Δίνεται ο κύκλος $C : x^2 + y^2 = 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0, -3)$.
β) Η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : 4x - 2y + 13 = 0$.
γ) Η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2 : x - 3y + 15 = 0$.

3.24. Δίνεται ο κύκλος $C : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ και το σημείο του $A(1, 3)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C στο Α.

3.25. Θεωρούμε τον κύκλο $C : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + y = 0$.

3.26. Θεωρούμε τον κύκλο $C : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ και το σημείο $A(8, 4)$.
α) Αποδείξτε ότι το Α είναι εξωτερικό του κύκλου C.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του C, η οποία διέρχεται από το Α.
γ) Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος.

3.27. Θεωρούμε τους κύκλους $C_\lambda : (x - \lambda)^2 + (y + 2\lambda)^2 = 9$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.
α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων C_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι κύκλοι C_λ εφάπτονται δύο σταθερών παράλληλων ευθειών, των οποίων να βρείτε τις εξισώσεις.

3.28. Θεωρούμε τους κύκλους $C_1 : (x - 2)^2 + y^2 = 4$ και $C_2 : (x + 2)^2 + y^2 = 1$.
α) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_1, C_2.
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των C_1, C_2.

3.29. Θεωρούμε τον κύκλο $C : x^2 + y^2 = 13$ και το σημείο $\Sigma(17, 19)$ εκτός αυτού. Από το Σ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα προς τον κύκλο ΣΑ, ΣΒ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

3.2 Παραβολή

3.30. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Έχει διευθετούσα την ευθεία $\delta : x-2=0$.
β) Έχει εστία το σημείο $E(0,-4)$.
γ) Έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1,4)$.

3.31. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το $(0,0)$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Έχει άξονα συμμετρίας έναν από τους άξονες $x'x$, $y'y$ και διέρχεται από το σημείο $A(2,2)$.
β) Έχει άξονα συμμετρίας έναν από τους άξονες $x'x$, $y'y$ και η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα είναι ίση με 6.

3.32. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία $(AM)=d(M,\varepsilon)$, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\varepsilon : x+2=0, \quad A(2,0)$ β) $\varepsilon : y-2=0, \quad A(0,-2)$

3.33. Ο κύκλος $C_1 : x^2+y^2=R^2$ διέρχεται από την εστία της παραβολής $C_2 : y^2 = 2px$ με $p>0$ και την τέμνει σε δύο σημεία που έχουν τετμημένη 1. Να βρείτε τις εξισώσεις των C_1 και C_2.

3.34. Θεωρούμε την παραβολή $C : y^2 = 9x$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α, Β της παραβολής C τα οποία έχουν την ίδια τετμημένη και ισχύει $A\widehat{O}B = 90^\circ$, όπου Ο η αρχή των αξόνων.

3.35. Θεωρούμε τις παραβολές $C_1 : y^2=5x$, $C_2 : x^2=5y$.
α) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β των παραβολών C_1 και C_2.
β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

3.36. Δίνεται η παραβολή $C : y^2=4x$ και η ευθεία $\varepsilon : y=x-1$.
α) Να δείξετε ότι η ευθεία ε διέρχεται από την εστία της παραβολής.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α, Β της ευθείας ε και της παραβολής C.
γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α, Β είναι κάθετες.

3.37. Δίνεται η παραβολή $C : y^2=2px$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο της Α, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β έχουν αντίθετες τετμημένες.

3.38. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=4x$ η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $x+y-19=0$.

3.39. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής $x^2=-2y$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(1,2)$.

3.40. Δίνεται η παραβολή $C : y^2=-6x$ και το σημείο $A(2,-1)$. Από το Α φέρνουμε δύο εφαπτόμενες ευθείες στην παραβολή. Αν M_1, M_2 είναι τα σημεία επαφής, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας M_1M_2.

3.3 Έλλειψη

3.41. Θεωρούμε την εξίσωση $9x^2 + 4y^2 = 36$. Να δείξετε ότι παριστάνει έλλειψη και στη συνέχεια να βρείτε τα μήκη του μεγάλου και του μικρού άξονα, τις εστίες και την εκκεντρότητα.

3.42. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Έχει εστίες $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και μεγάλο άξονα 10.
β) Έχει εστίες $E'(0,-3)$, $E(0,3)$ και μικρό άξονα 8.
γ) Έχει εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και εκκεντρότητα $4/5$.

3.43. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης η οποία έχει άξονες συμμετρίας τους $x'x$, $y'y$, εστιακή απόσταση 12 και εκκεντρότητα $3/5$.

3.44. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{MA}\right| + \left|\overrightarrow{MB}\right| = c$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $c = 8, \quad A(3,0), \quad B(-3,0)$ β) $c = 10, \quad A(0,-4), \quad B(0,4)$

3.45. Να βρείτε τη γραμμή στην οποία ανήκουν τα σημεία Μ του επιπέδου σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $M(3\sigma\upsilon\nu t, 5\eta\mu t), \quad 0 \le t \le 2\pi$ β) $M(4\eta\mu t, 3\sigma\upsilon\nu t), \quad 0 \le t \le 2\pi$

3.46. Οι εστίες $E'(-1,0)$, $E(1,0)$ μιας έλλειψης σχηματίζουν με ένα σημείο της ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.

3.47. Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο το $(0,0)$ και διέρχεται από τις εστίες και τα άκρα του μικρού άξονα της έλλειψης $C_2 : \beta^2x^2 + \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$. Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

3.48. Θεωρούμε τις ελλείψεις

$$C_1 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \qquad \text{και} \qquad C_2 : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{\mu} = 1,\ \mu > 0.$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του μ οι ελλείψεις C_1, C_2 είναι όμοιες.

3.4 Υπερβολή

3.49. Θεωρούμε την εξίσωση $9x^2-4y^2=36$. Να δείξετε ότι παριστάνει υπερβολή και στη συνέχεια να βρείτε τις κορυφές, τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις ασύμπτωτες.

3.50. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Έχει εστίες $E'(-3,0)$, $E(3,0)$ και απόσταση κορυφών 4.
β) Έχει εστίες $E'(0,-6)$, $E(0,6)$ και εκκεντρότητα 2.
γ) Έχει εστίες $E'(-4,0)$, $E(4,0)$ και ασύμπτωτη την ευθεία $y=5x$.

3.51. α) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει άξονες συμμετρίας τους $x'x$, $y'y$, είναι ισοσκελής και ένα σημείο της είναι το $M(1,4)$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει άξονες συμμετρίας τους $x'x$, $y'y$, εστιακή απόσταση 20 και ασύμπτωτη την ευθεία $4x+3y=0$.

3.52. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\left|\overrightarrow{MA}\right|-\left|\overrightarrow{MB}\right|=6$, όπου $A(5,0)$, $B(-5,0)$.

3.53. Ο κύκλος C_1 με εξίσωση $x^2+y^2=16$ διέρχεται από τις κορυφές υπερβολής C_2 με κέντρο συμμετρίας το $(0,0)$ και εστίες στον άξονα $y'y$. Μία από τις ασύμπτωτες της υπερβολής έχει εξίσωση $4x+3y=0$. Να βρείτε την εξίσωση και να προσδιορίσετε το ορθογώνιο βάσης της C_2.

3.54. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $9x^2-16y^2=144$ και την ευθεία $y=2$.

3.55. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$