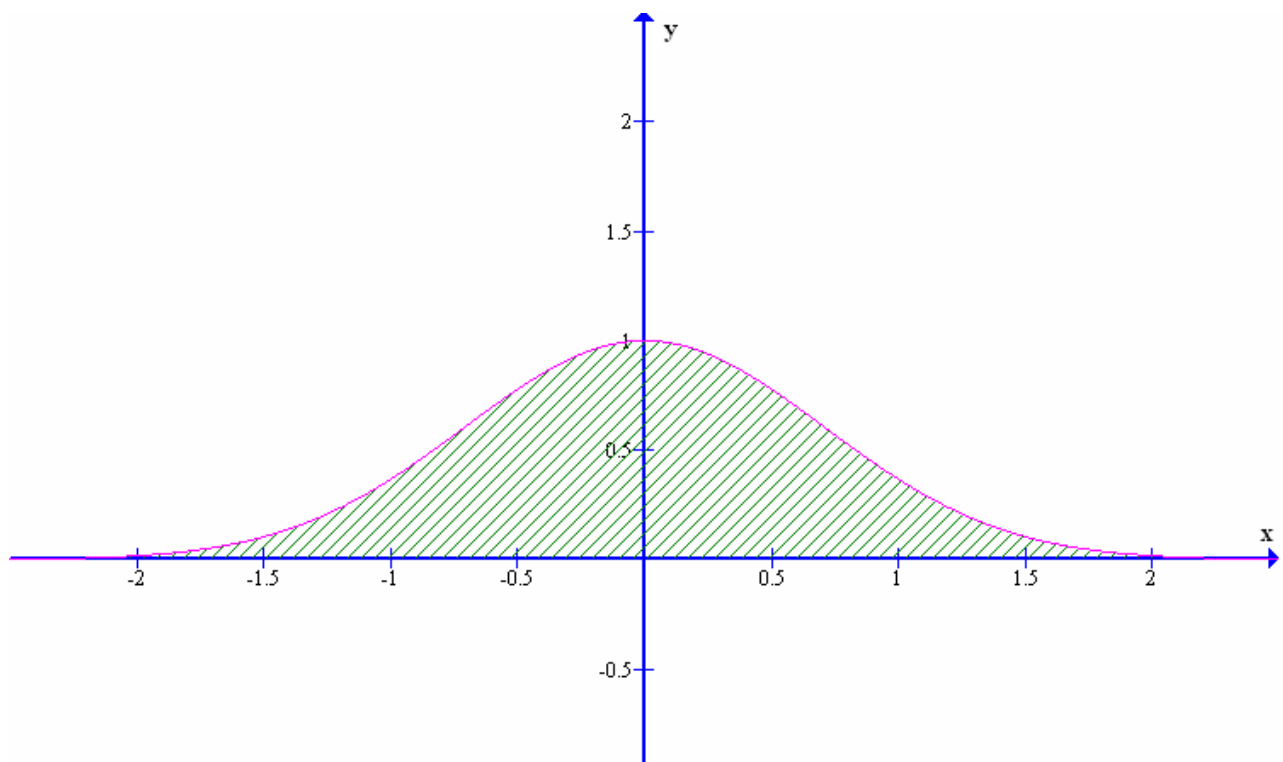


ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 1983-2005

και προτεινόμενα με σύντομες λύσεις



Ανέστης Τσομίδης
Μαθηματικός

Περιεχόμενα

1. Πρόλογος (3)
2. Α' μέρος : Τα θέματα της Ανάλυσης 1983-2005 (4)
3. Β' μέρος : Προτεινόμενα επαναληπτικά θέματα στην
Ανάλυση (113)
4. Γ' μέρος : Υποδείξεις – απαντήσεις στα προτεινόμενα
θέματα (124)

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό απευθύνεται στους υποψηφίους της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης της Γ' τάξης του Ενιαίου Λυκείου . Περιέχει τα θέματα της Ανάλυσης που τέθηκαν στις Πανελλήνιες Εξετάσεις από το 1983 έως και το 2005 στην Α' δέσμη, στην Δ' δέσμη, στην Θετική και στην Τεχνολογική κατεύθυνση τα οποία συνοδεύονται από αναλυτικές λύσεις. Σε ορισμένα από αυτά, έγιναν οι αναγκαίες πλην όμως ανεπαίσθητες αλλαγές στις εκφωνήσεις ώστε τα θέματα να είναι συμβατά με τη επικρατούσα σήμερα εξεταστέα ύλη. Για παράδειγμα ένα όριο ακολουθίας, δίνεται ως όριο συνάρτησης στο άπειρο.

Περιέχονται επίσης και προτεινόμενα θέματα, κατάλληλα για τις τελευταίες επαναλήψεις στην Ανάλυση, τα οποία συνοδεύονται από σύντομες λύσεις. Το είδος και το ύφος των θεμάτων είναι τέτοια που αναπτύσσουν την κριτική σκέψη των υποψηφίων, δίνοντας παράλληλα μέσα από την πορεία επίλυσής τους και μεθοδολογίες – τεχνικές ιδιαιτέρως χρήσιμες στις εξετάσεις.

Τα πνευματικά δικαιώματα της εργασίας αυτής είναι κατοχυρωμένα και απαγορεύεται η χρησιμοποίησή της για εμπορικούς σκοπούς.

Ανέστης Τσομίδης – Μαθηματικός

Σεπτέμβριος 2003 (*)

(*) Εκτός των θεμάτων των ετών 2004 και 2005 τα οποία γράφτηκαν τον Ιούλιο του 2004 και 2005 αντίστοιχα.

Α' ΜΕΡΟΣ :
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 1983-2005

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1983

1) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με $f(x) = x^{\frac{x+1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)$.

ΛΥΣΗ

Η f ορίζεται στο $(0, +\infty)$ επομένως έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της στο $+\infty$.

Για $x > 0$, έχουμε $x^{\frac{x+1}{x}} = e^{\frac{x+1}{x} \ln x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x} \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x =$

$1 \cdot (+\infty) = +\infty$. Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{x+1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x} \ln x} = +\infty$.

Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$. Έτσι οδηγούμαστε σε απροσδιόριστη μορφή

$(+\infty) \cdot 0$. Εργαζόμαστε λοιπόν ως εξής: $x^{\frac{x+1}{x}} = x^{1+\frac{1}{x}} = x \cdot x^{\frac{1}{x}}$, $x > 0$ και έχουμε

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot x^{\frac{1}{x}} \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} [x \cdot (\sqrt{x^2+1} - x)] =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \cdot (\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1)} =$

$e^0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2) Η συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και $f(\alpha)=f(\beta)=0$. Να αποδειχθεί :

α) για τη συνάρτηση $F(x)=\frac{f(x)}{x-c}$, όπου $c \notin [\alpha, \beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο

ώστε $F'(c_0)=0$.

β) αν $c \notin [\alpha, \beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση $y=f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή $c \notin [\alpha, \beta]$ η F ορίζεται στο $[\alpha, \beta]$. Η F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (α, β) ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $F'(x)=\frac{f'(x)(x-c)-f(x)(x-c)'}{(x-c)^2}=\frac{f'(x)(x-c)-f(x)}{(x-c)^2}$.

Ακόμη $F(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{\alpha-c}=0$, $F(\beta)=\frac{f(\beta)}{\beta-c}=0$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle για

την F υπάρχει $c_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0)=0$.

β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραμμής με εξίσωση $y=f(x)$ στο σημείο $(c_0, f(c_0))$ είναι $y-f(c_0)=f'(c_0)(x-c_0)$, όπου c_0 είναι αυτό του (α) ερωτήματος. Είναι $F'(c_0)=0$, οπότε $\frac{f'(c_0)(c_0-c)-f(c_0)}{(c_0-c)^2}=0 \Leftrightarrow f'(c_0)(c_0-c)=f(c_0)$ **(1)**

«Η εφαπτομένη της γραμμής με εξίσωση $y=f(x)$ διέρχεται από το σημείο $(c, 0)$ » $\Leftrightarrow 0-f(c_0)=f'(c_0)(c-c_0) \Leftrightarrow f'(c_0)(c_0-c)=f(c_0)$, αληθής λόγω της **(1)**.

3) α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x>0$ ισχύει η σχέση : $\ln x \leq x-1$.

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0, +\infty)$ με

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x \ln x}{1-x}, & 0 < x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x = 1 \end{cases}. \text{ Να αποδειχθεί ότι :}$$

i) η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της,

ii) είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1)$ και

iii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln x-x+1$, $x>0$.

$$\text{Είναι } g'(x)=(\ln x)'-(x)'+(1)'=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x} \text{ , } x>0 \text{ . } g'(x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ και}$$

$g'(x)>0 \Leftrightarrow 0<x<1$, $g'(x)<0 \Leftrightarrow x>1$. Στη θέση $x_0=1$ η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $g(1)=\ln 1-1+1=0$. Έτσι για κάθε $x>0$ θα είναι $g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \ln x-x+1 \leq 0$ οπότε $\ln x \leq x-1$.

β) i) Η f είναι συνεχής στο $(0, 1) \cup (1, +\infty)$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων .

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}-1} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(\frac{1}{x}-1)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 = f(0) \text{ , } \text{άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } 0 \text{ .} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x}{1-x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x)'}{(1-x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (-\ln x - 1) \\ &= -\ln 1 - 1 = -1 = f(1) \text{ , } \text{άρα η } f \text{ είναι συνεχής στο } 1 \text{ .} \end{aligned}$$

Τελικά η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

ii) Για κάθε $x \in (0, 1)$ έχουμε

$$f'(x) = \frac{(x \ln x)'(1-x) - x \ln x(1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{(\ln x + 1)(1-x) + x \ln x}{(1-x)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(1-x)^2} \text{ .}$$

Σύμφωνα με το (α) ερώτημα για κάθε $x>0$: $\ln x \leq x-1 \Leftrightarrow \ln x-x+1 \leq 0$ με το = να ισχύει μόνο για $x=1$. Άρα για κάθε $x \in (0, 1)$: $\ln x-x+1 < 0$, επομένως $f'(x) < 0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα ,άρα και φθίνουσα στο $(0, 1)$.

iii) Θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της παραγώγου. Έχουμε :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{x \ln x}{1-x} - (-1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x + 1 - x}{-(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x + 1 - x)'}{(-(x-1)^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{-2(x-1)(x-1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{-2(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{(-2(x-1))'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2} \text{ .} \\ \text{Άρα } f'(1) &= -\frac{1}{2} \text{ .} \end{aligned}$$

4) Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τις συναρτήσεις με τύπους :

$$i) f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2}, & x \in \mathbb{R} - \{2\} \\ 7, & x = 2 \end{cases}, \text{ στη θέση } x_0 = 2$$

$$ii) g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ \frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}, \text{ στη θέση } x_0 = 0.$$

ΛΥΣΗ

$$i) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 9x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(4x - 1)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7 = f(2), \text{ άρα η } f$$

είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 2$.

$$ii) \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \notin \mathbb{R}, \text{ άρα η } g \text{ δεν είναι συνεχής στη θέση } x_0 = 0.$$

5) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - |x| - 2$. Να γίνει μελέτη και πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ο τύπος της f χωρίς την απόλυτη τιμή γράφεται :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, & x \geq 0 \\ x^2 + x - 2, & x < 0 \end{cases}. \text{ Για } x > 0 \text{ έχουμε } f'(x) = 2x - 1 \text{ και } f''(x) = 2 \text{ ενώ για } x < 0$$

$f'(x) = 2x + 1$ και $f''(x) = 2$. Η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - x - 2 - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x - 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + x - 2 - (-2)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + 1) = 1, \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

$$\text{Έχουμε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0, & \text{με } x > 0 \\ 2x + 1 = 0, & \text{με } x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}$$

Το πρόσημο της f' και της f'' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	+	0	-
f''(x)	+	+	+	+	+	+
f(x)	$+\infty$	$\tau.\varepsilon.$ $-\frac{9}{4}$	$\tau.\mu.$ -2	$\tau.\varepsilon.$ $-\frac{9}{4}$	$+\infty$	

Σύμφωνα με τον πίνακα αυτό :

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, $(0, \frac{1}{2}]$ και γνησίως αύξουσα

στα διαστήματα $(-\frac{1}{2}, 0]$, $(\frac{1}{2}, +\infty)$. Στη θέση $-\frac{1}{2}$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το

$f(-\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$, στη θέση 0 παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(0) = -2$ και στη θέση $\frac{1}{2}$

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(\frac{1}{2}) = -\frac{9}{4}$. Τα τοπικά ελάχιστα είναι και ολικά ενώ

δεν συμβαίνει το ίδιο με το τοπικό μέγιστο, αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 2) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty.$$

Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στα διαστήματα $(-\infty, 0]$, $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης η C_f δεν έχει οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες αφού :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \notin \mathbb{R} \text{ και}$$

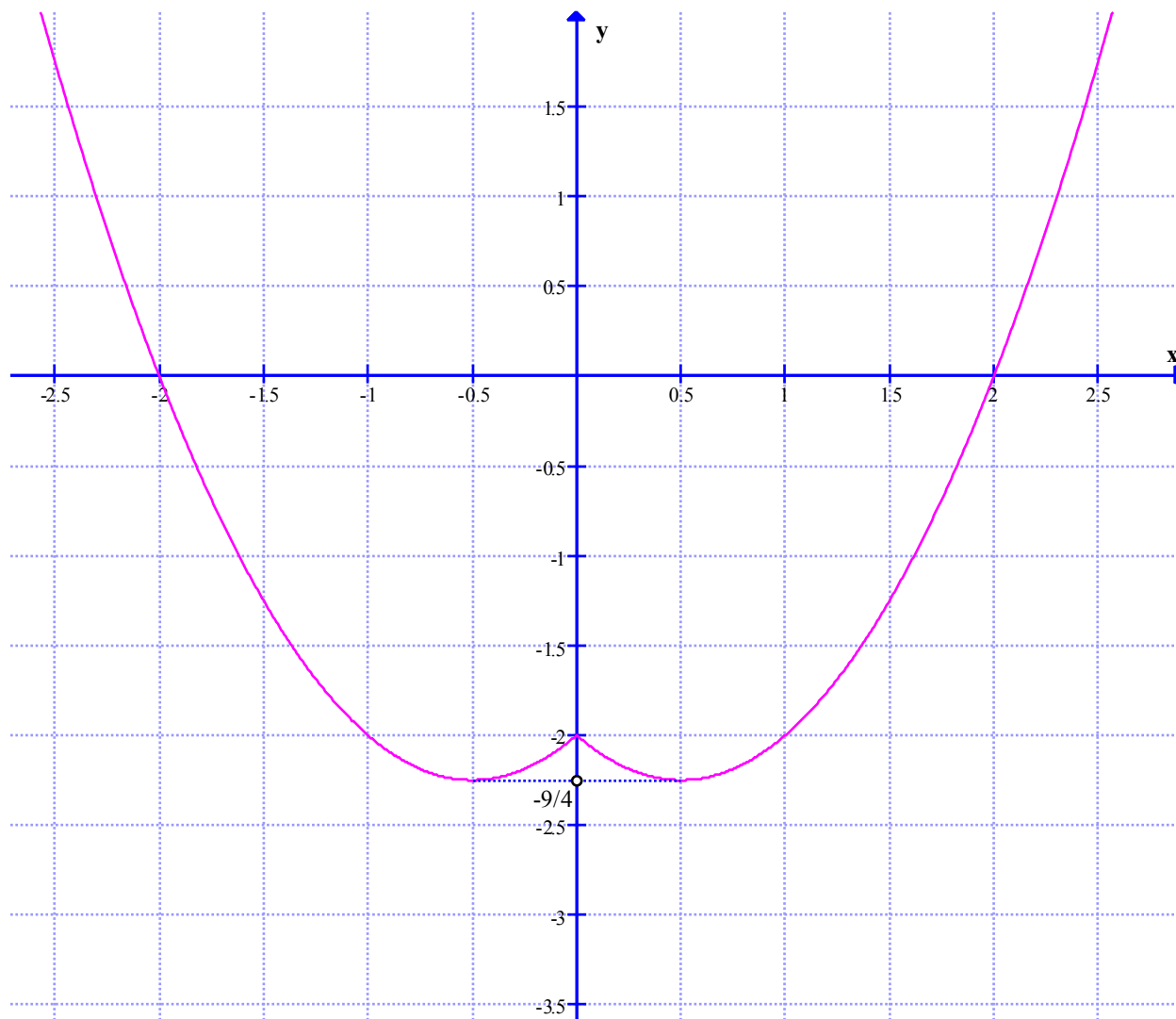
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

Η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $(2, 0)$ και $(-2, 0)$ αφού :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - |x| - 2 = 0 \Leftrightarrow |x| = -1 \text{ (απορρίπτεται) ή } |x| = 2 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=-2$$

Η C_f τέμνει τον $y'y$ στο $(0, -2)$ αφού $f(0) = -2$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω σχεδιάζουμε την C_f :



ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1984

1) Να βρείτε το όριο της συνάρτησης $f(x) = \frac{\lambda^x + 2^{x+1}}{2 \cdot \lambda^x - 3 \cdot 2^{x-1}}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

* αν $\lambda \in (0, 2)$ τότε $0 < \frac{\lambda}{2} < 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^x = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^x + 2}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{2}\right)^x - \frac{3}{2}} = \frac{0 + 2}{0 - \frac{3}{2}} = -\frac{4}{3}.$$

* αν $\lambda = 2$ τότε $f(x) = \frac{2^x + 2^{x+1}}{2 \cdot 2^x - 3 \cdot 2^{x-1}} = \frac{1 + 2}{2 - \frac{3}{2}} = 6$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6$.

* αν $\lambda > 2$ τότε $0 < \frac{2}{\lambda} < 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\lambda}\right)^x = 0$, οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{\lambda}\right)^x}{2 - \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{2}{\lambda}\right)^x} =$

$$= \frac{1 + 2 \cdot 0}{2 - \frac{3}{2} \cdot 0} = \frac{1}{2}.$$

2) Έστω η πραγματική συνάρτηση f της πραγματικής μεταβλητής x με $f(x) = \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$.

ΛΥΣΗ

Πρέπει $x \geq 0$ και $5 - \sqrt{5x} \neq 0$, οπότε $x \geq 0$ και $x \neq 5$. Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = [0, 5) \cup (5, +\infty)$ και έτσι έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της f στο 5.

$$\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x - 10)(5 + \sqrt{5x})}{(5 - \sqrt{5x})(5 + \sqrt{5x})} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(2x - 10)(5 + \sqrt{5x})}{25 - 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(x-5)(5+\sqrt{5x})}{-5(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2(5+\sqrt{5x})}{-5} = \frac{2 \cdot 10}{-5} = -4.$$

3) Έστω η πραγματική συνάρτηση ψ της πραγματικής μεταβλητής x με $\psi(x) = x + \frac{4}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της ψ .

β) Να εξετάσετε την ψ ως προς τη μονοτονία.

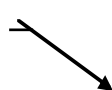
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της ψ .

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x \neq 0$, οπότε το πεδίο ορισμού της ψ είναι το $A = \mathbb{R} - \{0\}$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ έχουμε $\psi'(x) = (x)' + \left(\frac{4}{x}\right)' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$.

$\psi'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Το πρόσημο της ψ' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$\psi'(x)$	+	0	-	-	0	+	
$\psi(x)$							

Η ψ είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2]$, $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $(-2, 0)$, $(0, 2)$.

γ) Η ψ είναι συνεχής στο A και λόγω της μονοτονίας της, τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι :

$$\psi((-\infty, -2]) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x), \psi(-2) \right] = (-\infty, -4],$$

$$\psi((-2, 0)) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} \psi(x), \lim_{x \rightarrow -2^+} \psi(x) \right) = (-\infty, -4),$$

$$\psi((0, 2)) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} \psi(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} \psi(x) \right) = (4, +\infty),$$

$$\psi([2, +\infty)) = [\psi(2), \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x)) = [4, +\infty). \text{ Άρα το σύνολο τιμών της } \psi \text{ είναι}$$

$$\text{το } (-\infty, -4] \cup (-\infty, -4) \cup (4, +\infty) \cup [4, +\infty) = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty).$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1985

1) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης $f(x)=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{x}}$, στο $+\infty$.

ΛΥΣΗ

Επειδή πρέπει $x \neq 0$ και ισχύει $x^2-2x+3 = x^2-2x+1+2=(x-1)^2+2>0$, το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R} - \{0\}$. Έχει νόημα λοιπόν η αναζήτηση του ορίου της f στο $+\infty$.

Έχουμε $f(x)=(x^2-2x+3)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}}$, $x \neq 0$. Θα βρούμε αρχικά το όριο της συνάρτησης $g(x)=\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}$ στο $+\infty$. Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2-2x+3) =$
 $= \lim_{y \rightarrow +\infty} \ln y = +\infty$ (θέσαμε $y = x^2-2x+3$, οπότε όταν $x \rightarrow +\infty$ είναι και $y \rightarrow +\infty$) και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του de L'Hospital και έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2-2x+3)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2-2x+3} \cdot (x^2-2x+3)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^2-2x+3} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0. \text{ Άρα έχουμε } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x^2-2x+3)}{x}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2(x-3)+4$, $x \in \mathbb{R}$. Έστω x_1 , x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

ΛΥΣΗ

Είναι $f(x)=x^3-3x^2+4$ και $f'(x)=3x^2-6x$, $f''(x)=6x-6$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$. Στις θέσεις 0, 2 η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο αφού είναι τριώνυμο β' βαθμού με 2 διαφορετικές ρίζες. Άρα στις θέσεις $x_1=0$ και $x_2=2$ η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Ακόμη $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-6=0 \Leftrightarrow x=1$. Στη θέση $x_3=1$ η f παρουσιάζει καμπή αφού η $f''(x)$ αλλάζει εκεί πρόσημο. Έχουμε $f(0)=4$, $f(2)=0$, $f(1)=2$. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία

$$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \text{ δηλαδή τα } (0,4), (2,0) \text{ είναι } y-4 = \frac{0-4}{2-0}(x-0) \Leftrightarrow$$

$$y = -2x + 4. \quad (1)$$

Η (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου $(x_3, f(x_3))$, δηλαδή του $(1,2)$ αφού $2 = -2 \cdot 1 + 4 \Leftrightarrow 2 = 2$, αληθές.

Άρα τα σημεία $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

3) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f και το είδος μονοτονίας σε καθένα από αυτά, καθώς και τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα. Επίσης να βρεθούν τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f στρέφει: (α) τα κοίλα άνω, (β) τα κοίλα κάτω. Ακόμα να βρεθούν τα ενδεχόμενα σημεία καμπής.

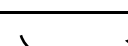
ΛΥΣΗ

Έχουμε $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$. Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)		$\tau.\mu$		$\tau.\varepsilon.$	

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση 1 το $f(1) = 5$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση 3 το $f(3) = 1$.

Ακόμη $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Το πρόσημο της $f''(x)$ φαίνεται στον πίνακα:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$		σ.κ.	

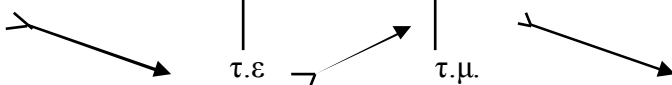
Έτσι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, 2)$ και άνω στο $[2, +\infty)$, ενώ η C_f έχει σημείο καμπής το $(2, f(2))$ δηλαδή το $(2, 3)$.

4) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f .

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε } f'(x) = \frac{(3x)'(x^2 + 1) - 3x(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{3(x^2 + 1) - 3x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 + 3}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$$

και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$. Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον πίνακα :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	-	0	+	0	-
f(x)					

Στη θέση -1 η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1) = -\frac{3}{2}$, ενώ στη θέση 1

παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1) = \frac{3}{2}$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0$ και

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 0$, τα παραπάνω ακρότατα είναι και ολικά, οπότε το

σύνολο τιμών της f είναι το $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1986

1) Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \eta \mu x + \alpha \sigma \upsilon \nu x + 1, & 0 \leq x \end{cases} \text{ , να είναι συνεχής στο } \mathbb{R} .$$

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, +\infty)$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Για να είναι συνεχής και στα σημεία -1 και 0 πρέπει

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) . \text{ Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (3\alpha e^{x+1} + x) = 3\alpha e^0 + (-1) = 3\alpha - 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (2x^2 - \alpha x + 3\beta) = 2(-1)^2 - \alpha(-1) + 3\beta = 2 + \alpha + 3\beta ,$$

$$f(-1) = 3\alpha e^0 + (-1) = 3\alpha - 1 . \text{ Άρα πρέπει } 3\alpha - 1 = 2 + \alpha + 3\beta \Leftrightarrow 2\alpha - 3\beta = 3 . \quad (1)$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x^2 - \alpha x + 3\beta) = 3\beta ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\beta \eta \mu x + \alpha \sigma \upsilon \nu x + 1) = \beta \cdot 0 + \alpha \cdot 1 + 1 = \alpha + 1 , \quad f(0) = \alpha + 1 . \text{ Άρα πρέπει}$$

$$\alpha + 1 = 3\beta \Leftrightarrow \alpha - 3\beta = -1 . \quad (2) \text{ Λύνοντας το σύστημα των (1) , (2) βρίσκουμε}$$

$$\alpha = 4 \text{ και } \beta = \frac{5}{3} .$$

2) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = (\alpha - \frac{2}{3})x^3 - (\alpha + \frac{1}{2})x^2 - 10x + 7$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\alpha \in \mathbb{R}$

ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x = \frac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του α , να

σχηματίσετε τον πίνακα μεταβολών της f .

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $f'(x) = 3(\alpha - \frac{2}{3})x^2 - 2(\alpha + \frac{1}{2})x - 10 = (3\alpha - 2)x^2 - (2\alpha + 1)x - 10$ και

$f''(x) = 2(3\alpha - 2)x - (2\alpha + 1)$. Για να παρουσιάζει η f καμπή στο $x = \frac{3}{2}$, πρέπει $f''(\frac{3}{2}) = 0$

$$\Leftrightarrow 2(3\alpha - 2) \cdot \frac{3}{2} - (2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 . \text{ Για την τιμή αυτή του } \alpha , f''(x) = 2x - 3 , \text{ οπότε}$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \text{ και } f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}. \text{ Άρα η ζητούμενη τιμή του } a \text{ είναι το } 1.$$

Στη συνέχεια για $a=1$ έχουμε :

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 10x + 7, f'(x) = x^2 - 3x - 10, f''(x) = 2x - 3.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 5.$$

Το πρόσημο της $f'(x)$ και της $f''(x)$ φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	-	0	+
f''(x)	-	-	0	+	+	
f(x)	$-\infty$	$\tau.\mu$	$\sigma.\kappa.$	$\tau.\varepsilon.$	$+\infty$	

Σύμφωνα με τον πίνακα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(5, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-2, 5]$, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη

$$\text{θέση } -2 \text{ το } f(-2) = \frac{55}{3} \text{ και τοπικό ελάχιστο στη θέση } 5 \text{ το } f(5) = -\frac{233}{6}.$$

Ακόμη η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $(-\infty, \frac{3}{2})$ και άνω στο $[\frac{3}{2}, +\infty)$, ενώ η C_f έχει

σημείο καμπής το $(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2}))$ δηλαδή το $(\frac{3}{2}, -\frac{41}{4})$. Επίσης $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- 3) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 90$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

ΛΥΣΗ

Έχουμε $f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6)$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = -3$. Επειδή $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x^2 + x - 6) > 0 \Leftrightarrow x < -3 \text{ ή } x > 2$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-3, 2)$, η f παρουσιάζει στη θέση -3 τοπικό μέγιστο το $f(-3) = 171$ ενώ στη θέση 2 παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(2) = 46$. Τα ακρότατα αυτά δεν είναι ολικά αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- 4) Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 7x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Αν C είναι η γραφική παράσταση της f , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1, \frac{23}{6})$. Στη συνέχεια να βρείτε σε ποιο σημείο η εφαπτομένη αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

Είναι : $f'(x) = x^2 - 5x + 7$, $x \in \mathbb{R}$. Ακόμη $f'(1) = 1^2 - 5 \cdot 1 + 7 = 3$ και $f(1) = \frac{23}{6}$, οπότε

η εξίσωση της εφαπτομένης της C στο σημείο $(1, \frac{23}{6})$ είναι :

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - \frac{23}{6} = 3(x - 1) \Leftrightarrow y = 3x + \frac{5}{6} \quad (1)$$

Η (1) για $y = 0$ δίνει $0 = 3x + \frac{5}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{18}$. Άρα το σημείο στο οποίο τέμνει η

εφαπτομένη αυτή τον άξονα $x'x$ είναι το $(-\frac{5}{18}, 0)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1987

1) Να βρεθεί το όριο της συνάρτησης f στο $+\infty$ με

$$f(x) = (\sqrt{7x^4 + 6x + 5} - \sqrt{7x^4 + 3x + 3}) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}.$$

ΛΥΣΗ

Επειδή για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $63x^2 - 5x + 20 > 0$ ($\Delta < 0$, $63 > 0$) και για κάθε $x > 0$ είναι $7x^4 + 6x + 5 > 0$, $7x^4 + 3x + 3 > 0$ ως αθροίσματα θετικών αριθμών η f ορίζεται στο

$(0, +\infty)$ επομένως: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(\sqrt{7x^4 + 6x + 5} - \sqrt{7x^4 + 3x + 3}) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{[(7x^4 + 6x + 5) - (7x^4 + 3x + 3)] \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}}{\sqrt{7x^4 + 6x + 5} + \sqrt{7x^4 + 3x + 3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x + 2) \cdot \sqrt{63x^2 - 5x + 20}}{\sqrt{7x^4 + 6x + 5} + \sqrt{7x^4 + 3x + 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot (3 + \frac{2}{x}) \cdot \sqrt{63 - \frac{5}{x} + \frac{20}{x^2}}}{x^2 \cdot (\sqrt{7 + \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4}})} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3 + \frac{2}{x}) \cdot \sqrt{63 - \frac{5}{x} + \frac{20}{x^2}}}{\sqrt{7 + \frac{6}{x^3} + \frac{5}{x^4}} + \sqrt{7 + \frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^4}}} = \frac{(3 + 0) \cdot \sqrt{63 - 0 + 0}}{\sqrt{7 + 0 + 0} + \sqrt{7 + 0 + 0}} = \frac{3\sqrt{7}\sqrt{9}}{2\sqrt{7}} = \frac{9}{2}.$$

2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^4 - 14x^2 + 24x$. Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A, B, Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$. Να αποδειχτεί ότι το βαρύκεντρο του τριγώνου $AB\Gamma$ βρίσκεται πάνω στον άξονα $y'y$.

ΛΥΣΗ

Για να δείξουμε ότι υπάρχουν τρία σημεία $A, B, \Gamma \in C$, τέτοια ώστε οι εφαπτόμενες της C στα A, B, Γ να είναι παράλληλες προς τον άξονα $x'x$, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$f'(x) = 4x^3 - 28x + 24 = 4(x^3 - 7x + 6) \stackrel{\text{Horner}}{=} 4(x-1)(x^2 + x - 6), \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$4(x-1)(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0 \text{ ή } x^2 + x - 6 = 0) \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-3.$$

Για να είναι το βαρύκεντρο G του τριγώνου $AB\Gamma$ πάνω στον άξονα $y'y$, αρκεί να δείξουμε ότι η τετμημένη του x_G είναι ίση με 0. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $A(1, f(1))$, $B(2, f(2))$, $\Gamma(-3, f(-3))$. Αν M είναι το μέσο του $B\Gamma$ τότε

$$M\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right) \text{ ή } M\left(-\frac{1}{2}, \frac{f(-3)+f(2)}{2}\right) \text{ και } \vec{AG} = 2\vec{GM} (*) .$$

$$\text{Από την } (*) \text{ προκύπτει ότι } x_G - x_A = 2(x_M - x_G) \Leftrightarrow x_G - 1 = 2\left(-\frac{1}{2} - x_G\right) \Leftrightarrow x_G = 0 .$$

- 3) Έστω C η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = ax^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το σημείο $A(2, -10)$ να ανήκει στη C και η εφαπτομένη της C στο A να έχει συντελεστή διεύθυνσης τον αριθμό -3 .

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε : } A \in C \Leftrightarrow f(2) = -10 \Leftrightarrow a2^3 + \beta 2^2 + 9 \cdot 2 - 12 = -10 \Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -4 . (1)$$

Ακόμη $f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x + 9$, $x \in \mathbb{R}$. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι -3

$$\text{θα έχουμε } f'(2) = -3 \Leftrightarrow 3a2^2 + 2\beta \cdot 2 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3\alpha + \beta = -3 . (2)$$

Από το σύστημα των (1), (2) βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -6$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1988

1) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C της συνάρτησης f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=2$, $x=5$.

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R} - \{-1\}$ (αφού πρέπει $x+1 \neq 0$) και είναι

$$f'(x) = 1 + 0 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}, \text{ για κάθε } x \in A. \text{ Ακόμη } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -2$. Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον πίνακα :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f(x)$						

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -2)$, $(0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στα $[-2, -1)$, $(-1, 0]$ ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση -2 το $f(-2) = -2$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση 0 το $f(0) = 2$. Τα ακρότατα αυτά δεν είναι ολικά αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

β) Επειδή για κάθε $x \in [2, 5]$ είναι $f(x) > 0$ ως άθροισμα θετικών αριθμών και η f είναι συνεχής στο $[2, 5]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, το ζητούμενο εμβαδό

$$\text{είναι } E = \int_2^5 f(x) dx = \int_2^5 \left(x + 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + x + \ln(x+1) \right]_2^5 = \frac{27}{2} + \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

2) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 5x + 6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2 + 3}, & x > 1 \end{cases}$ είναι

παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Είναι : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 5x + 6 - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} \stackrel{\text{Horner}}{=} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(3x-2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x-2) = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2\sqrt{x^2 + 3} - 4}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x^2 + 3 - 4)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 1$, επομένως η f είναι παραγωγίσιμη

στο σημείο $x_0 = 1$ με $f'(1) = 1$.

3) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x}$ είναι συνεχής στο $[1, 2]$ οπότε έχουμε

$$\int_1^2 \frac{x^3 - 5x^2 + 1}{x} dx = \int_1^2 \left(x^2 - 5x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^2 = -\frac{31}{6} + \ln 2.$$

4) Έστω συνάρτηση f με $f(x)=3x^3-\alpha x^2+\beta x-3$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Εάν η f έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$, τότε να βρεθούν οι αριθμοί α, β .

ΛΥΣΗ

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και είναι $f'(x)=9x^2-2\alpha x+\beta$.

Επειδή η f έχει τοπικά ακρότατα στα $x_1=1$ και $x_2=-\frac{5}{9}$, σύμφωνα με το θεώρημα

του Fermat θα είναι $f'(1)=0$ και $f'(-\frac{5}{9})=0$. Έχουμε :

$$f'(1)=0 \Leftrightarrow 9 \cdot 1^2 - 2\alpha \cdot 1 + \beta = 0 \Leftrightarrow -2\alpha + \beta = -9. \quad (1)$$

$$f'(-\frac{5}{9})=0 \Leftrightarrow 9 \cdot \frac{25}{81} - 2\alpha(-\frac{5}{9}) + \beta = 0 \Leftrightarrow 10\alpha + 9\beta = -25. \quad (2)$$

Λύνοντας το σύστημα των (1) και (2) βρίσκουμε $\alpha=2$ και $\beta=-5$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1989

1) Έστω f, g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ , για τις οποίες υποθέτουμε ότι :

i) είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο Δ ,

ii) $f' = g'$ και

iii) $0 \in \Delta$ και $f(0) = g(0)$. Να δειχθεί ότι :

α) Για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

β) Αν η $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες ρ_1, ρ_2 , τότε η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \Delta$ έχουμε : $f''(x) = g''(x) \Leftrightarrow f'(x) = g'(x) + c, c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$f'(x) = (g(x) + cx)' \Leftrightarrow f(x) = g(x) + cx + c_1, c_1 \in \mathbb{R}.$$

Για $x=0$ έχουμε : $f(0) = g(0) + c \cdot 0 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = 0$, λόγω της (iii).

Άρα για κάθε $x \in \Delta$, $f(x) = g(x) + cx \Leftrightarrow f(x) - g(x) = cx$ όπου $c \in \mathbb{R}$.

β) Λόγω του (α) είναι $g(x) = f(x) - cx$. Η g είναι συνεχής στο Δ άρα και στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq \Delta$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο Δ . Είναι ακόμη $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, οπότε :

$$g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = (f(\rho_1) - c\rho_1)(f(\rho_2) - c\rho_2) = (-c\rho_1)(-c\rho_2) = c^2 \cdot \rho_1\rho_2 \leq 0, \text{ αφού οι ρίζες } \rho_1, \rho_2 \text{ είναι ετερόσημες.}$$

Αν $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) < 0$ τότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Αν $g(\rho_1) \cdot g(\rho_2) = 0 \Leftrightarrow g(\rho_1) = 0$ ή $g(\rho_2) = 0$, οπότε η $g(x) = 0$ έχει ρίζα την ρ_1 ή την ρ_2 .

Τελικά λοιπόν η $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $[\rho_1, \rho_2]$.

2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{2})$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο

$$\text{σημείο } x_0 = \frac{\pi}{8}.$$

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, τη γραφική παράσταση της f και από τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ είναι : $f(x) = \eta\mu(2x + \frac{\pi}{2}) = \eta\mu(\frac{\pi}{2} - (-2x)) = \sigma\upsilon\nu(-2x) = \sigma\upsilon\nu(2x)$

και $f'(x) = -\eta\mu(2x) \cdot (2x)' = -2\eta\mu(2x)$. Έχουμε $f(\frac{\pi}{8}) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και

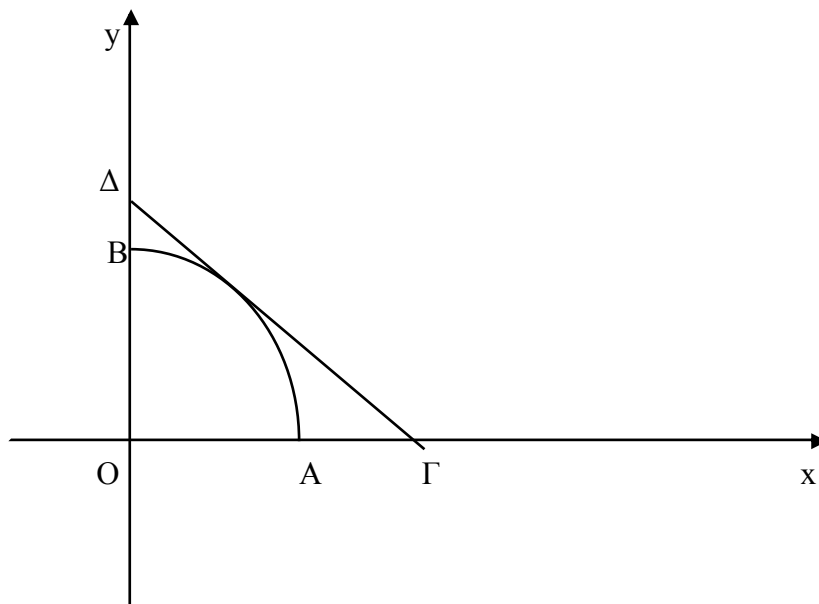
$f'(\frac{\pi}{8}) = -2\eta\mu\frac{\pi}{4} = -2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$. Η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y - f(\frac{\pi}{8}) = f'(\frac{\pi}{8})(x - \frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}(x - \frac{\pi}{8}) \Leftrightarrow y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} .$$

β) Έστω A, B τα σημεία τομής της C_f και Γ, Δ τα σημεία τομής της εφαπτομένης με τους θετικούς ημιάξονες Ox, Oy . Είναι $f''(x) = -4\sigma\upsilon\nu(2x) < 0$ για κάθε $x \in (0, \frac{\pi}{4})$,

οπότε η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ και συνεπώς η εφαπτομένη

βρίσκεται πάνω από την C_f (με εξαίρεση το σημείο επαφής) .



Το ζητούμενο εμβαδό E είναι ίσο με το εμβαδό του τριγώνου $O\Gamma\Delta$ μείον το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την C_f και τους θετικούς ημιάξονες

$$Ox, Oy . \text{ Η } f \text{ είναι συνεχής στο } [0, \frac{\pi}{4}] \text{ οπότε } E = \frac{1}{2} (O\Gamma)(O\Delta) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sigma\upsilon\nu(2x) dx =$$
$$\frac{1}{2} (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}) (\frac{\pi\sqrt{2}}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2}) - [\frac{1}{2} \eta\mu(2x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$

3) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=x^2+\frac{2\alpha}{x}+\beta$, ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$) η οποία μηδενίζεται στο

$x_1=1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$.

α) Να βρεθούν τα α, β .

β) Να βρεθεί το είδος του ακροτάτου και η τιμή του.

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη σε αυτό

με $f'(x)=2x-\frac{2\alpha}{x^2}$. Επειδή η f έχει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$, σύμφωνα με το

θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(2)=0 \Leftrightarrow 4-\frac{2\alpha}{4}=0 \Leftrightarrow \alpha=8$.

Επειδή η f μηδενίζεται στο $x_1=1$ θα είναι $f(1)=0 \Leftrightarrow 1+2\alpha+\beta=0 \Leftrightarrow 1+16+\beta=0$
 $\Leftrightarrow \beta=-17$.

β) Για $\alpha=8$ και $\beta=-17$ έχουμε: $f(x)=x^2+\frac{16}{x}-17$, $f'(x)=2x-\frac{16}{x^2}=\frac{2(x^3-8)}{x^2}$ οπότε

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2(x^3-8)}{x^2}>0 \Leftrightarrow x^3-8>0 \Leftrightarrow x>2$, $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<2$. Άρα η f

παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_0=2$, το $f(2)=4+8-17=-5$.

4) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3}+1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$. Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$

ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

ΛΥΣΗ

Είναι: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{3\alpha}{x^3}+1\right) = \frac{3\alpha}{8}+1$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} =$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(1-\sqrt{x-1})(1+\sqrt{x-1})}{(x^2-4)(1+\sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)(1+\sqrt{x-1})} =$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-1}{(x+2)(1+\sqrt{x-1})} = \frac{-1}{8}$, $f(2) = \frac{3\alpha}{8}+1$.

Για να είναι η f συνεχής στο $x_0=2$ πρέπει $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow$

$$\frac{3\alpha}{8} + 1 = \frac{-1}{8} \Leftrightarrow 3\alpha + 8 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -3.$$

5) Να αποδειχθεί ότι :

α) Η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα .

β) Για $\kappa \geq 1$ ισχύουν : $\sqrt{\kappa} \leq \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx$ και $\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa}$.

ΛΥΣΗ

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A=[0, +\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό . Ακόμη για

κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο A .

β) Για κάθε $x \in [\kappa, \kappa+1]$ είναι $\kappa \leq x \Rightarrow \sqrt{\kappa} \leq \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{\kappa} \geq 0 \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} (\sqrt{x} - \sqrt{\kappa}) dx \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx - \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{\kappa} dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx \geq \sqrt{\kappa} \int_{\kappa}^{\kappa+1} 1 dx \Rightarrow \int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx \geq \sqrt{\kappa} (\kappa+1 - \kappa) \Rightarrow$$

$$\int_{\kappa}^{\kappa+1} \sqrt{x} dx \geq \sqrt{\kappa} .$$

Για κάθε $x \in [\kappa-1, \kappa]$ είναι $x \leq \kappa \Rightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{\kappa} \Rightarrow \sqrt{\kappa} - \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} (\sqrt{\kappa} - \sqrt{x}) dx \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{\kappa} dx - \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\kappa} \int_{\kappa-1}^{\kappa} 1 dx - \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\kappa} [\kappa - (\kappa-1)] \geq \int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \Rightarrow$$

$$\int_{\kappa-1}^{\kappa} \sqrt{x} dx \leq \sqrt{\kappa} .$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1990

1) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x^3}{3} + (\frac{\beta}{2} + \delta)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

είναι πραγματικοί αριθμοί και ισχύει ότι $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ ως

πολυωνυμική. Ακόμη $f(0) = \delta$ και $f(1) = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \delta + \gamma - \delta + \delta = (\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma) + \delta = 0$,

αφού $\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 0$. Επομένως $f(0) = f(1)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle

υπάρχει $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

2) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$.

α) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της ευθείας με εξίσωση $y = 3x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x = 1$ και $x = a$ με $a > 1$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το a τείνει στο $+\infty$.

ΛΥΣΗ

α) Η f έχει πεδίο ορισμού το $A = \mathbb{R} - \{0\}$ και είναι συνεχής σε αυτό ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x^2} = +\infty$ η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$ (άξονας $y'y$).

Αναζητούμε τώρα οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες, αρχικά στο $+\infty$.

Είναι $\lambda = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3 + \frac{1}{2x^3}) = 3 + 0 = 3$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + \frac{1}{2x^2} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0.$$

Άρα η ευθεία $y = 3x + 0 \Leftrightarrow y = 3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Όμοια βρίσκουμε ότι η $y = 3x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f και στο $-\infty$.

β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, \alpha]$ και $f(x) - 3x = \frac{1}{2x^2} > 0$ για κάθε $x \in [1, \alpha]$ το

$$\begin{aligned} \text{ζητούμενο εμβαδό είναι } E(\alpha) &= \int_1^\alpha (f(x) - 3x) dx = \int_1^\alpha \frac{1}{2x^2} dx = \left[-\frac{1}{2x} \right]_1^\alpha = -\frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

γ) Είναι $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}.$

3) Δίνεται η συνάρτηση g , η οποία είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη σε αυτό και ισχύει ότι $g(-1) = 7$. Αν f είναι μια συνάρτηση με $f(x) = 3(x-2)^2 g(2x-5)$, να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να υπολογίσετε την $f''(2)$.

ΛΥΣΗ

Η $g(2x-5)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, επομένως η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων

$$\begin{aligned} \text{συναρτήσεων με } f'(x) &= [3(x-2)^2]' \cdot g(2x-5) + 3(x-2)^2 [g(2x-5)]' = \\ &= 6(x-2)(x-2)' g(2x-5) + 3(x-2)^2 g'(2x-5)(2x-5)' = 6(x-2) g(2x-5) + 6(x-2)^2 g'(2x-5). \end{aligned}$$

Η $g'(2x-5)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, άρα η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα γινομένων παραγωγίσιμων

$$\begin{aligned} \text{συναρτήσεων με } f''(x) &= [6(x-2) g(2x-5)]' + [6(x-2)^2 g'(2x-5)]' = \\ &= 6g(2x-5) + 6(x-2)g'(2x-5)(2x-5)' + 12(x-2)g'(2x-5) + 6(x-2)^2 g''(2x-5)(2x-5)' = \\ &= 6g(2x-5) + 12(x-2)g'(2x-5) + 12(x-2)g'(2x-5) + 12(x-2)^2 g''(2x-5). \text{ Άρα} \\ f''(2) &= 6g(-1) + 12(2-2)g'(-1) + 12(2-2)g'(-1) + 12(2-2)^2 g''(-1) = 6g(-1) + 0 + 0 + 0 = 42. \end{aligned}$$

4) Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + (\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2})x^2 + (\alpha^3 + 7)x - 5\alpha^2. \text{ Να αποδείξετε ότι η γραφική}$$

παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής .

ΛΥΣΗ

Η f ως πολυωνυμική είναι 2 φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επομένως για να αποδείξουμε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής , αρκεί να δείξουμε ότι η $f''(x)=0$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$. Έχουμε :

$$f'(x) = 4\frac{x^3}{3} + 2\alpha x^2 + 2(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2})x + (\alpha^3 + 7), \quad f''(x) = 4x^2 + 4\alpha x + (2\alpha^2 - 4\alpha + 5).$$

Αρκεί να δείξουμε ότι η διακρίνουσα $\Delta = (4\alpha)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (2\alpha^2 - 4\alpha + 5)$ είναι αρνητική .

$$\text{Είναι } \Delta = 16\alpha^2 - 16 \cdot (2\alpha^2 - 4\alpha + 5) = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 5) = -16(\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 1) = -16[(\alpha - 2)^2 + 1] < 0.$$

5) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = x^2 e^x$, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών με εξισώσεις $x=1$ και $x=3$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $[1,3]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και $f(x) > 0$ για

$$\text{κάθε } x \in [1,3]. \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 x^2 e^x dx = \int_1^3 x^2 (e^x)' dx =$$

$$= [x^2 e^x]_1^3 - \int_1^3 (x^2)' e^x dx = [x^2 e^x]_1^3 - \int_1^3 2x e^x dx = [x^2 e^x]_1^3 - \int_1^3 2x (e^x)' dx =$$

$$= [x^2 e^x]_1^3 - [2x e^x]_1^3 + \int_1^3 2e^x dx = [x^2 e^x]_1^3 - [2x e^x]_1^3 + [2e^x]_1^3 = (9e^3 - e) - (6e^3 - 2e) + (2e^3 - 2e) =$$

$$= 5e^3 - e \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1991

1) Αν $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^v x dx$, $v \in \mathbb{N}^*$, τότε

α) να αποδείξετε ότι για κάθε $v > 2$, ισχύει $I_v = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}$

β) να υπολογίσετε το I_5 .

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Έχουμε } I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^{v-2} x \cdot \phi^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^{v-2} x \cdot \left(\frac{1}{\sigma v^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^{v-2} x \cdot \frac{1}{\sigma v^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^{v-2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^{v-2} x \cdot (\phi x)' dx - I_{v-2} = \left[\frac{\phi^{v-1} x}{v-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{v-2} =$$

$$= \frac{1}{v-1} - 0 - I_{v-2} = \frac{1}{v-1} - I_{v-2}, \text{ για κάθε } v > 2.$$

$$\beta) \text{ Σύμφωνα με το (α) είναι } I_5 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi^5 x dx = \frac{1}{5-1} - I_{5-2} = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3-1} - I_{3-2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + I_1 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \phi x dx = -\frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\eta \mu x}{\sigma v x} dx = -\frac{1}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sigma v x)'}{\sigma v x} dx = -\frac{1}{4} - [\ln(\sigma v x)]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{4} - \left(\ln \frac{\sqrt{2}}{2} - \ln 1 \right) = -\frac{1}{4} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα Ox και τις ευθείες με εξισώσεις $x=1$ και $x=4$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\frac{1}{x} \cdot 2\sqrt{x} - \ln x \cdot 2 \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(2\sqrt{x})^2} = \frac{2x - 2 + \ln x}{4x\sqrt{x}}$.

Έστω $g(x) = 2x - 2 + \ln x$, $x > 0$. Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$. Ακόμη $g'(x) = 2 + \frac{1}{x} > 0$,

για κάθε $x > 0$, άρα η g είναι γνησίως αύξουσα και συνεπώς η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 1$. Έτσι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Η g είναι συνεχής επομένως έχει σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(0, 1)$ και $(1, +\infty)$. Έχουμε

$$g(2) = 2 + \ln 2 > 0 \text{ και } g\left(\frac{1}{2}\right) = -1 + \ln \frac{1}{2} = -1 - \ln 2 < 0. \text{ Επομένως :}$$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow g(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0, 1)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1)$.

β) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1, 4]$, οπότε για κάθε $x \in [1, 4]$

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq \sqrt{1} - \frac{\ln 1}{2\sqrt{1}} \Leftrightarrow f(x) \geq 1, \text{ άρα } f(x) > 0. \text{ Το ζητούμενο εμβαδό}$$

$$\text{είναι } E = \int_1^4 f(x) dx = \int_1^4 \sqrt{x} dx - \int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx.$$

Θέτουμε $\sqrt{x} = y$, οπότε για $x = 1$ παίρνουμε $y = 1$ και για $x = 4$ παίρνουμε $y = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Ακόμη } \sqrt{x} = y &\Rightarrow x = y^2 \Rightarrow dx = 2y dy. \text{ Έτσι } \int_1^4 \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} dx = \int_1^2 \frac{\ln y^2}{2y} 2y dy = \int_1^2 2 \ln y dy = \\ &= \int_1^2 (2y)' \ln y dy = [2y \ln y]_1^2 - \int_1^2 2y \frac{1}{y} dy = [2y \ln y]_1^2 - [2y]_1^2 = 4 \ln 2 - 2 \ln 1 - (4 - 2) = 4 \ln 2 - 2. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } E = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 - (4 \ln 2 - 2) = \frac{20}{3} - 4 \ln 2 \text{ τ.μ.}$$

3) Έστω η συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και

$$\text{παραγωγίζεται στο } x_0 \in \Delta. \text{ Να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf'(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0).$$

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned}
\text{Έχουμε } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) - x_0f(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{xf(x_0) + xf(x) - xf(x) - x_0f(x)}{x - x_0} = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)(x - x_0) - x(f(x) - f(x_0))}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - x \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}) = \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} x \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0) - x_0 f'(x_0), \text{ αφού η } f \text{ ως παραγωγίσιμη}
\end{aligned}$$

στο x_0 θα είναι και συνεχής στο x_0 δηλαδή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

4) Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες :

(i) είναι συνεχείς στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμες στο (a, b) ,

(ii) για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $g(x) \neq 0$ και

(iii) $f(b)g(a) - f(a)g(b) = 0$.

Να αποδείξετε ότι :

α) για την συνάρτηση F με $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο $[a, b]$

β) υπάρχει $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

ΛΥΣΗ

α) Η F είναι ορισμένη στο $[a, b]$ αφού για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $g(x) \neq 0$, συνεχής στο $[a, b]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο (a, b) ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Ακόμη $f(b)g(a) - f(a)g(b) = 0 \Leftrightarrow f(b)g(a) = f(a)g(b)$

$$\Leftrightarrow \frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f(a)}{g(a)} \Leftrightarrow F(b) = F(a). \text{ Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle}$$

και συνεπώς αυτό εφαρμόζεται στο $[a, b]$.

β) Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle για την συνάρτηση F στο $[a, b]$ θα υπάρχει

$$x_0 \in (a, b) \text{ τέτοιο ώστε } F'(x_0) = 0. \text{ Όμως } F'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \text{ Έτσι}$$

$$F'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0)g(x_0) = f(x_0)g'(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}.$$

5) α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x) = [f(x)]^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Έστω $a > 0$. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x) = a^{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $F(x) = [f(x)]^x = e^{x \ln f(x)}$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα $F'(x) = e^{x \ln f(x)} \cdot (x \ln f(x))' =$
 $= e^{x \ln f(x)} \cdot (1 \cdot \ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)}) = [f(x)]^x \cdot (\ln f(x) + x \frac{f'(x)}{f(x)})$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $g'(x) = a^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln a \cdot (\sqrt{x^2+1})' = a^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln a \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} (x^2+1)' =$
 $= a^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$.

6) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης

$$f: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \eta \mu^2 x - \sqrt{2} \eta \mu x + 2\sqrt{2}.$$

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ έχουμε $f'(x) = 2\eta \mu x \sigma \nu x - \sqrt{2} \sigma \nu x = \sigma \nu x (2\eta \mu x - \sqrt{2})$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\sigma \nu x = 0 \text{ ή } 2\eta \mu x - \sqrt{2} = 0) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ή } x = \frac{\pi}{4}. \text{ Επειδή η } f' \text{ είναι συνεχής}$$

θα έχει σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $[0, \frac{\pi}{4})$, $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$. Υπολογίζουμε τις

$$\text{τιμές: } f'(\frac{\pi}{6}) = \sigma \nu \frac{\pi}{6} (2\eta \mu \frac{\pi}{6} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} (2 \cdot \frac{1}{2} - \sqrt{2}) = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \sqrt{2}) < 0,$$

$$f'(\frac{\pi}{3}) = \sigma \nu \frac{\pi}{3} (2\eta \mu \frac{\pi}{3} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - \sqrt{2}) > 0. \text{ Το πρόσημο της } f'$$

φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	ο.μ	ο.ε	τ.μ.

Έτσι λοιπόν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \frac{\pi}{4})$ και γνησίως αύξουσα

στο $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ και παρουσιάζει :

ολικό ελάχιστο στη θέση $\frac{\pi}{4}$ το $f(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = -\frac{1}{2} + 2\sqrt{2}$,

τοπικό μέγιστο στη θέση $\frac{\pi}{2}$ το $f(\frac{\pi}{2}) = 1^2 - \sqrt{2} \cdot 1 + 2\sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}$,

ολικό μέγιστο στη θέση 0 το $f(0) = 0^2 - \sqrt{2} \cdot 0 + 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2} > 1 + \sqrt{2} = f(\frac{\pi}{2})$.

7) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \frac{\sqrt{\ln x}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου , το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=e$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στα $(-\infty, 1)$, $(1, +\infty)$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και πηλίκο συνεχών συναρτήσεων αντίστοιχα . Είναι ακόμη :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (e^x - e) = e - e = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} = \frac{\sqrt{\ln 1}}{1} = 0, \quad f(1) = \frac{\sqrt{\ln 1}}{1} = 0,$$

άρα $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$. Συνεπώς η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in [0, 1)$ είναι $e^x < e^1 \Rightarrow e^x - e < 0 \Rightarrow f(x) < 0$ και για κάθε $x \in [1, e]$

$$\begin{aligned} \text{είναι } f(x) &= \frac{\sqrt{\ln x}}{x} \geq 0. \text{ Το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_0^1 -f(x) dx + \int_1^e f(x) dx = \\ &= \int_0^1 (e - e^x) dx + \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = [ex - e^x]_0^1 + \int_1^e (\ln x)^{\frac{1}{2}} (\ln x)' dx = [ex - e^x]_0^1 + \left[\frac{2}{3} (\ln x)^{\frac{3}{2}} \right]_1^e = \\ &= (e - e) - (0 - 1) + \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 0 = \frac{5}{3} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1992

- 1) α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0, +\infty)$. Να δεχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x)$, $x \in \Delta$, έχει την ιδιότητα « $g''(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ » αν και μόνο αν ισχύει η σχέση :
- $$f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$
- β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα, στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln(x^2+2)$ έχει την ιδιότητα $g''(x) \geq 0$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε : $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$ και $g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2}$, για κάθε $x \in \Delta$.

$$\text{Άρα για κάθε } x \in \Delta : g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{f''(x)f(x) - [f'(x)]^2}{[f(x)]^2} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2.$$

- β) Είναι $g(x)=\ln f(x)$ όπου $f(x)=x^2+2>0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Σύμφωνα με το (α) ερώτημα θα έχουμε : $g''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x)f''(x) \geq [f'(x)]^2 \Leftrightarrow$
- $$(x^2+2) \cdot 2 \geq (2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2+4-4x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 2 \Leftrightarrow |x| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$$
- Άρα το ζητούμενο διάστημα είναι το $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

- 2) α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=a^x-x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < a < 1$.

- β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ , για τις οποίες ισχύει η ισότητα

$$a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2-4) - (\lambda-2), \text{ όπου } 0 < a < 1.$$

ΛΥΣΗ

- α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = a^x \ln a - 1$ και $f''(x) = a^x (\ln a)^2$. Επειδή $0 < a < 1$ θα είναι $\ln a < 0$, οπότε $f'(x) < 0$ και $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ($a^x > 0$). Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$.

- β) Η δοθείσα ισότητα γράφεται $a^{\lambda^2-4} - (\lambda^2-4) = a^{\lambda-2} - (\lambda-2) \Leftrightarrow f(\lambda^2-4) = f(\lambda-2) \quad (1)$
- Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι και 1-1 στο $\mathbb{R}$ άρα $(1) \Leftrightarrow \lambda^2-4 = \lambda-2 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1 \text{ ή } \lambda = 2.$

- 3) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq f(x)$.

ΛΥΣΗ

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων και για κάθε

$$\begin{aligned} x \in [-1, 1] \text{ ισχύει } f(x) > 0. \text{ Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι } E &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (x+4)e^{-x} dx = \int_{-1}^1 (x+4)(-e^{-x})' dx = [-e^{-x}(x+4)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (x+4)'(-e^{-x}) dx = \\ &= [-e^{-x}(x+4)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (-e^{-x}) dx = [-e^{-x}(x+4)]_{-1}^1 - [e^{-x}]_{-1}^1 = \frac{2(2e^2 - 3)}{e} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

- 4) α) Να αποδειχθεί ότι μία συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $f' = f$ αν και μόνο αν $f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, η οποία

ικανοποιεί τις σχέσεις: $g'(x)\sin x + g(x)\cos x = g(x)\sin x$ και $g(0) = 1992$.

ΛΥΣΗ

- α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f'(x) = f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x}(f'(x) - f(x)) = e^{-x} \cdot 0 \Leftrightarrow [e^{-x} f(x)]' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} f(x) = c \Leftrightarrow f(x) = ce^x$, όπου c πραγματική σταθερά.

- β) Η δοθείσα σχέση για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ γράφεται: $g'(x)\sin x - g(x)(\sin x)' = g(x)\sin x$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(x)\sin x - g(x)(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{g(x)}{\sin x} \Leftrightarrow \left(\frac{g(x)}{\sin x}\right)' = \frac{g(x)}{\sin x} \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow} \frac{g(x)}{\sin x} = ce^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x) = ce^x \sin x. \text{ Για } x=0 \text{ έχουμε } g(0) = ce^0 \sin 0 \Leftrightarrow 1992 = c \cdot 1 \cdot 1 \Leftrightarrow c = 1992.$$

$$\text{Άρα } g(x) = 1992e^x \sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

- 5) Να αποδείξετε ότι για κάθε x στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$ ισχύει η σχέση: $1+x < e^x < 1+ex$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Για κάθε } x \in (0, 1) \text{ έχουμε } 1+x < e^x < 1+ex \Leftrightarrow x < e^x - 1 < ex \Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - 1}{x} < e \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{e^x - e^0}{x - 0} < e. \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } f(t) = e^t, t \in [0, x] \text{ όπου } x \in (0, 1).$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ οπότε σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \Leftrightarrow e^\xi = \frac{e^x - e^0}{x - 0}. \text{ Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι } 1 < e^\xi < e.$$

Είναι $\xi \in (0, x) \Rightarrow 0 < \xi < x \Rightarrow 0 < \xi < 1$ (αφού $x < 1$). Άρα $e^0 < e^\xi < e^1 \Rightarrow 1 < e^\xi < e$.

6) Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την παράγωγο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \neq 0$ η $\eta\mu \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων

συναρτήσεων και συνεπώς η $f(x) = x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο

παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για το $x_0 = 0$ θα εργαστούμε με τον ορισμό :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x}) = 0, \text{ διότι :}$$

$$-1 \leq \eta\mu \frac{1}{x} \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \leq x^2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = 0$.

β) Για κάθε $x \neq 0$ είναι $f'(x) = (x^3)' \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^3 \cdot (\eta\mu \frac{1}{x})' = 3x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x})' =$

$$= 3x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + x^3 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2}) = 3x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}. \text{ Άρα :}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} - x \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0 & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

7) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) - 2x(\ln x - 1)$, $x > 0$.

α) Να βρείτε την παράγωγο f' της f για κάθε $x > 0$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Έχουμε } f'(x) &= \frac{x}{2}(2\ln x - 1) + \frac{x^2}{4} \cdot 2 \cdot \frac{1}{x} - 2(\ln x - 1) - 2x \cdot \frac{1}{x} = x\ln x - \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 2\ln x + 2 - 2 = \\ &= x\ln x - 2\ln x = (x-2)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0. \end{aligned}$$

β) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\ln x = 0 \Leftrightarrow (x-2=0 \text{ ή } \ln x=0) \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=1$. Τα $x-2$, $\ln x$ είναι ετερόσημα μόνο στην περίπτωση $x \in (1, 2)$. Το πρόσημο της f' φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

x	0	1	2	$+\infty$	
f'(x)	+	0	-	0	+
f(x)					

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(0, 1)$, $(2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 2]$, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση 1 το $f(1) = \frac{7}{4}$ και τοπικό ελάχιστο στη θέση 2 το $f(2) = 3 - 2\ln 2$.

8) α) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $E(t) = \int_1^t (x-2)\ln x dx$, για κάθε $t > 1$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t}$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \alpha) \text{ Έχουμε: } E(t) &= \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \ln x\right]_1^t - \int_1^t \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \ln x\right]_1^t - \int_1^t \left(\frac{x}{2} - 2\right) dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right) \ln x\right]_1^t - \left[\frac{x^2}{4} - 2x\right]_1^t = \\ &= \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) \ln t - 0 - \left(\frac{t^2}{4} - 2t - \frac{1}{4} + 2\right) = \left(\frac{t^2}{2} - 2t\right) \ln t - \frac{t^2}{4} + 2t - \frac{7}{4}, \text{ για κάθε } t > 1. \end{aligned}$$

β) Για κάθε $t > 1$ είναι $E'(t) = \left(\int_1^t (x-2) \ln x dx \right)' = (t-2) \ln t$. Επομένως :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{E'(t)}{t \cdot \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(t-2) \ln t}{t \cdot \ln t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t-2}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{t} \right) = 1 - 0 = 1.$$

9) Να βρείτε πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x + \gamma$, $x \in \mathbb{R}$ και α, β, γ πραγματικούς αριθμούς, η οποία ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες :

(i) Η συνάρτηση f είναι περιττή .

(ii) Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$.

(iii) $\int_0^2 f(x) dx = 2$.

ΛΥΣΗ

Αφού η f είναι περιττή, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι $f(-x) = -f(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha(-x)^3 + \beta(-x) + \gamma = -(\alpha x^3 + \beta x + \gamma) \Rightarrow -\alpha x^3 - \beta x + \gamma = -\alpha x^3 - \beta x - \gamma \Rightarrow 2\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0.$$

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και επειδή παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_0 = 1$, σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα είναι $f'(1) = 0$.

Όμως $f'(x) = 3\alpha x^2 + \beta$, άρα $f'(1) = 0 \Rightarrow 3\alpha + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -3\alpha$ (1)

$$\text{Ακόμη } \int_0^2 f(x) dx = 2 \quad \xRightarrow{\gamma=0, \beta=-3\alpha} \int_0^2 (\alpha x^3 - 3\alpha x) dx = 2 \Rightarrow \left[\alpha \frac{x^4}{4} - 3\alpha \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\alpha - 6\alpha = 2 \Rightarrow \alpha = -1. \text{ Από την (1) παίρνουμε } \beta = 3. \text{ Άρα } f(x) = -x^3 + 3x, x \in \mathbb{R}.$$

10) Η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα $[0, \pi]$ και $g(\pi) = e^{-\pi}$.

Αν $\int_0^\pi [g(x) + g'(x)] e^x dx = 2$, να βρείτε την τιμή της συνάρτησης g στο σημείο $x=0$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε : } \int_0^\pi [g(x) + g'(x)] e^x dx = 2 \Rightarrow \int_0^\pi [g(x)(e^x)' + g'(x)e^x] dx = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [g(x)e^x]_0^\pi = 2 \Rightarrow g(\pi)e^\pi - g(0)e^0 = 2 \Rightarrow e^{-\pi}e^\pi - g(0) = 2 \Rightarrow 1 - g(0) = 2 \Rightarrow g(0) = -1.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1993

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} + 4$ με $x > 0$.

α) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt$.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f'(x) = \frac{(1)'\sqrt{1+x^4} - 1(\sqrt{1+x^4})'}{(\sqrt{1+x^4})^2} + 0 = \frac{-2x^3}{(\sqrt{1+x^4})^3} < 0$, για κάθε $x > 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

β) Για κάθε $t \in [x, x+1]$ με $x > 0$ έχουμε: $0 < \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} < \frac{1}{\sqrt{t^4}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 + 4 < \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} + 4 < \frac{1}{t^2} + 4 \Rightarrow 4 < f(t) < \frac{1}{t^2} + 4.$$

$$\text{Από την } 4 < f(t) \Rightarrow f(t) - 4 > 0 \Rightarrow \int_x^{x+1} (f(t) - 4) dt > 0 \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt - \int_x^{x+1} 4 dt > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt - 4(x+1-x) > 0 \Rightarrow \int_x^{x+1} f(t) dt > 4. \quad (1)$$

$$\text{Από την } f(t) < \frac{1}{t^2} + 4 \Rightarrow \frac{1}{t^2} + 4 - f(t) > 0 \Rightarrow \int_x^{x+1} \left(\frac{1}{t^2} + 4 - f(t)\right) dt > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2} dt + \int_x^{x+1} 4 dt - \int_x^{x+1} f(t) dt > 0 \Rightarrow \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{x+1} + 4(x+1-x) - \int_x^{x+1} f(t) dt > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + 4 > \int_x^{x+1} f(t) dt. \quad (2)$$

Από τις (1), (2) προκύπτει $4 < \int_x^{x+1} f(t) dt < -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + 4$. Επειδή

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 4 = 4 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + 4\right) = -0 + 0 + 4 = 4 \text{ θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 4.$$

2) Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v=2$ m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $s(t)=vt$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος (σε sec).

α) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6m ;

ΛΥΣΗ

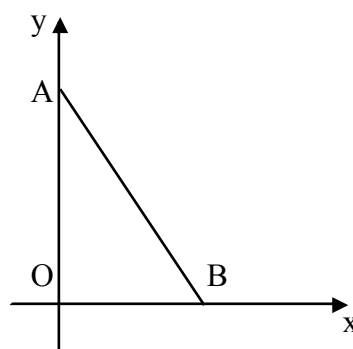
α) Για $t \in [0, 5]$ έχουμε $OB = s(t) = vt = 2t$,

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Rightarrow OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{100 - 4t^2}, \text{ οπότε } E(t) = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{100 - 4t^2} \cdot 2t = t \sqrt{100 - 4t^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E(t) = 2t \sqrt{25 - t^2}, t \in [0, 5].$$



β) Θα βρούμε πρώτα ποια χρονική στιγμή το μήκος του τμήματος OA είναι 6m :

$$OA = 6 \Leftrightarrow \sqrt{100 - 4t^2} = 6 \Leftrightarrow 100 - 4t^2 = 36 \Leftrightarrow t^2 = 16 \Leftrightarrow t = 4 \text{ sec}.$$

$$\text{Για κάθε } t \in (0, 5) \text{ έχουμε } E'(t) = (2t)' \sqrt{25 - t^2} + 2t(\sqrt{25 - t^2})' =$$

$$= 2\sqrt{25 - t^2} + 2t \frac{1}{2\sqrt{25 - t^2}} (-2t) = \frac{2(25 - 2t^2)}{\sqrt{25 - t^2}}. \text{ Άρα ο ζητούμενος ρυθμός}$$

$$\text{μεταβολής είναι } E'(4) = \frac{2(25 - 2 \cdot 4^2)}{\sqrt{25 - 4^2}} = -\frac{14}{3} \text{ m}^2/\text{sec}.$$

3) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\int_{\alpha}^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x) \quad \text{με } x, \alpha \in \mathbb{R}.$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Από τη δοθείσα ισότητα παίρνουμε : } e^x \cdot \int_{\alpha}^x e^{-t} f(t) dt = 1 - e^{x-\alpha} - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = 1 - e^{x-\alpha} - e^x \cdot \int_{\alpha}^x e^{-t} f(t) dt. \quad (1)$$

Η συνάρτηση $e^x \cdot \int_{\alpha}^x e^{-t} f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων

συναρτήσεων, επομένως λόγω της (1), η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Από την δοθείσα ισότητα, παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη ως προς x , παίρνουμε $e^{-x} f(x) = -e^{-x} + e^{-x} f(x) - e^{-x} f'(x) \Leftrightarrow \Leftrightarrow e^{-x} f'(x) = -e^{-x} \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow f'(x) = (-x)' \Leftrightarrow f(x) = -x + c$, όπου c πραγματική σταθερά. Όμως από την (1): $f(\alpha) = 1 - e^0 - e^{\alpha} \cdot 0 = 0$. Ακόμη $f(\alpha) = -\alpha + c \Leftrightarrow 0 = -\alpha + c \Leftrightarrow c = \alpha$. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f(x) = -x + \alpha$, $x \in \mathbb{R}$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, $x \in \mathbb{R}$, όπου μ είναι πραγματικός

αριθμός. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$.

ΛΥΣΗ

Είναι $f'(x) = 2x^2 - 7x + 3$, $x \in \mathbb{R}$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ή $x = 3$.

Επειδή $2 > 0$ θα είναι $2x^2 - 7x + 3 < 0$ για κάθε $x \in (\frac{1}{2}, 3)$, επομένως η f είναι

γνησίως φθίνουσα στο $(\frac{1}{2}, 3)$, άρα και στο $(1, 2) \subset (\frac{1}{2}, 3)$. Η $f(x) = 0$ έχει

συνεπώς το πολύ μία ρίζα στο $(1, 2)$ άρα δεν μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο ανοικτό διάστημα $(1, 2)$.

5) Αν η συνάρτηση g έχει συνεχή παράγωγο στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και

ικανοποιεί τη σχέση $\int_0^1 xg'(x) dx = 1993 - \int_0^1 g(x) dx$, να βρείτε την τιμή της

συνάρτησης g για $x = 1$.

ΛΥΣΗ

Η δοθείσα ισότητα γράφεται $\int_0^1 (xg'(x) + g(x)) dx = 1993 \Leftrightarrow [xg(x)]_0^1 = 1993 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1g(1) - 0g(0) = 1993 \Leftrightarrow g(1) = 1993$.

6) Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από

τη συνάρτηση : $K(x) = \frac{\alpha}{4} x^3$, όπου το x διατρέχει το ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$

και η παράμετρος α παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από

την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται από τη συνάρτηση $E(x) = x^2$,

$x \in (0, +\infty)$ και το κέρδος δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = E(x) - K(x)$,

$x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in [\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο,

καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f(x) = E(x) - K(x) = x^2 - \frac{\alpha}{4} x^3$, $x \in (0, +\infty)$ και $f'(x) = 2x - \frac{3\alpha}{4} x^2$, $x \in (0, +\infty)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{3\alpha}{4} x^2 = 0 \Leftrightarrow x(2 - \frac{3\alpha}{4} x) = 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - \frac{3\alpha}{4} x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3\alpha}.$$

$$\text{Ακόμη } f'(x) < 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{3\alpha}{4} x^2 < 0 \Leftrightarrow x(2 - \frac{3\alpha}{4} x) < 0 \stackrel{x>0}{\Leftrightarrow} 2 - \frac{3\alpha}{4} x < 0 \Leftrightarrow x > \frac{8}{3\alpha},$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{8}{3\alpha}. \text{ Άρα η } f \text{ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση } x_0 = \frac{8}{3\alpha} \text{ το}$$

$$f\left(\frac{8}{3\alpha}\right) = \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^2 - \frac{\alpha}{4} \left(\frac{8}{3\alpha}\right)^3 = \frac{64}{27\alpha^2}, \text{ δηλαδή } M(\alpha) = \frac{64}{27\alpha^2}, \alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right].$$

β) Έχουμε $M'(\alpha) = -\frac{128}{27\alpha^3} < 0$, για κάθε $\alpha \in [\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$, άρα η $M(\alpha)$ είναι γνησίως

φθίνουσα στο $[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$ και επειδή είναι και συνεχής σε αυτό παρουσιάζει μέγιστο

στη θέση $\alpha = \frac{2}{9}$ το $M(\frac{2}{9}) = 48$.

7) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-vx}$, $x \in \mathbb{R}$, όπου v μη μηδενικός φυσικός αριθμός.

A) Να μελετήσετε τη μονοτονία της f και να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

B) Να αποδείξετε ότι : $2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq e$.

ΛΥΣΗ

A) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι : $f'(x) = (x)'e^{-vx} + x(e^{-vx})' = e^{-vx}(1-vx)$ και $f''(x) = [e^{-vx}(1-vx)]' = (e^{-vx})'(1-vx) + e^{-vx}(1-vx)' = -v e^{-vx}(1-vx) - v e^{-vx} = v e^{-vx}(vx-2)$. Έχουμε :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-vx}(1-vx) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{v}, \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow v e^{-vx}(vx-2) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{v}.$$

Το πρόσημο των $f'(x)$ και $f''(x)$ φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$	$\frac{1}{v}$	$\frac{2}{v}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-
$f''(x)$	-	-	0	+
$f(x)$				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, \frac{1}{v})$, γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{v}, +\infty)$ ενώ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\frac{1}{v}$ το $f(\frac{1}{v}) = \frac{1}{v} e^{-v \cdot \frac{1}{v}} = \frac{1}{ev}$. Η C_f έχει σημείο καμπής το $(\frac{2}{v}, f(\frac{2}{v}))$ δηλαδή το $(\frac{2}{v}, \frac{2}{e^2 v})$.

B) Από το (A) γνωρίζουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\frac{1}{v}, \frac{2}{v}]$, άρα

$$\text{για κάθε } x \in [\frac{1}{v}, \frac{2}{v}] \text{ είναι : } \frac{1}{v} \leq x \leq \frac{2}{v} \Rightarrow f(\frac{1}{v}) \geq f(x) \geq f(\frac{2}{v}) \Rightarrow \frac{1}{ev} \geq f(x) \geq \frac{2}{e^2 v}.$$

$$\text{Από την } \frac{1}{ev} \geq f(x) \Rightarrow \frac{1}{ev} - f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} (\frac{1}{ev} - f(x)) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{1}{ev} dx - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{ev} \left(\frac{2}{v} - \frac{1}{v} \right) \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \Rightarrow \frac{1}{ev^2} \geq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx.$$

$$\text{Από την } f(x) \geq \frac{2}{e^2 v} \Rightarrow f(x) - \frac{2}{e^2 v} \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \left(f(x) - \frac{2}{e^2 v} \right) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx - \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} \frac{2}{e^2 v} dx \geq 0 \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \geq \frac{2}{e^2 v} \left(\frac{2}{v} - \frac{1}{v} \right) \Rightarrow \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \geq \frac{2}{e^2 v^2}.$$

$$\text{Άρα } \frac{2}{e^2 v^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} f(x) dx \leq \frac{1}{ev^2} \Rightarrow \frac{2}{e^2 v^2} \leq \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq \frac{1}{ev^2} \Rightarrow 2 \leq e^2 v^2 \int_{\frac{1}{v}}^{\frac{2}{v}} x e^{-vx} dx \leq e.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1994

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

A) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$, $\alpha > 0$, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C , την ευθεία ε και τον άξονα $y'y$.

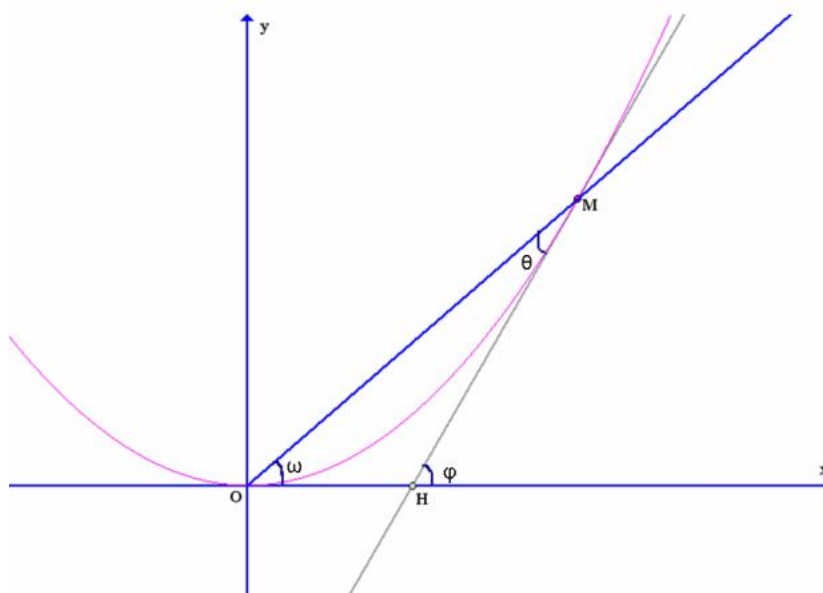
B) Έστω θ η οξεία γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία MO , όπου O είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται ($\alpha > 0$).

ΛΥΣΗ

A) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x$, άρα $f'(2\alpha)=8\alpha$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C στο M είναι $y - f(2\alpha) = f'(2\alpha)(x - 2\alpha) \Leftrightarrow y - 8\alpha^2 = 8\alpha(x - 2\alpha) \Leftrightarrow y = 8\alpha x - 8\alpha^2$. Είναι $f(x) - (8\alpha x - 8\alpha^2) = 2x^2 - 8\alpha x + 8\alpha^2 = 2(x - 2\alpha)^2 \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, με το $=$ να ισχύει μόνο για $x = 2\alpha$ και επειδή οι συναρτήσεις $f(x)$ και $8\alpha x - 8\alpha^2$ είναι συνεχείς στο $[0, 2\alpha]$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται

από τη C , την ευθεία ε και τον άξονα $y'y$ είναι: $E = \int_0^{2\alpha} 2(x - 2\alpha)^2 dx =$

$$\left[\frac{2}{3} (x - 2\alpha)^3 \right]_0^{2\alpha} = 0 - \frac{2}{3} (-2\alpha)^3 = \frac{16}{3} \alpha^3 \text{ τ.μ.}$$



B) Από το τρίγωνο OHM έχουμε $\varphi = \omega + \theta \Rightarrow \theta = \varphi - \omega \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(\varphi - \omega) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\varepsilon\varphi\varphi - \varepsilon\varphi\omega}{1 + \varepsilon\varphi\varphi \cdot \varepsilon\varphi\omega} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_\varepsilon - \lambda_{OM}}{1 + \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{OM}} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{8\alpha - 4\alpha}{1 + 8\alpha \cdot 4\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\phi\theta = \frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}, \text{ αφού } \lambda_\varepsilon = f'(2\alpha) = 8\alpha \text{ και } \lambda_{OM} = \frac{8\alpha^2 - 0}{2\alpha - 0} = 4\alpha.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\alpha) = \frac{4\alpha}{1+32\alpha^2}$, $\alpha > 0$ και έχουμε :

$$g'(\alpha) = \frac{(4\alpha)'(1+32\alpha^2) - 4\alpha(1+32\alpha^2)'}{(1+32\alpha^2)^2} = \frac{4(1+32\alpha^2) - 4\alpha \cdot 64\alpha}{(1+32\alpha^2)^2} = \frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2},$$

$$g'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2} = 0 \Leftrightarrow 1-32\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}. \text{ Ακόμη είναι :}$$

$$g'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow \frac{4(1-32\alpha^2)}{(1+32\alpha^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-32\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \in (0, \frac{\sqrt{2}}{8}) \text{ και } g'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow \alpha > \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Επομένως η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση $\frac{\sqrt{2}}{8}$ το $g(\frac{\sqrt{2}}{8}) = \frac{\sqrt{2}}{4}$,

δηλαδή η μέγιστη τιμή της $\varepsilon\phi\theta$ είναι $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

- 2) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x \ln x - x$, $x \in [1, e]$ και αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $(1, e)$.

Η f είναι συνεχής στο $[1, e]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, άρα η g είναι συνεχής στο $[1, e]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη $g(1)g(e) = (f(1)-1)(f(e)+e-e) = f(e)(f(1)-1) < 0$, αφού $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in [1, e]$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, e)$.

Έχουμε $g'(x) = f'(x) + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = f'(x) + \ln x > 0$, για κάθε $x \in (1, e)$, αφού για τις

τιμές αυτές του x είναι $f'(x) \geq 0$ και $\ln x > \ln 1 = 0$. Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$ επομένως η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(1, e)$. Τελικά υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 - x_0 = 0 \Leftrightarrow f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

3) Έστω ρ πραγματικός αριθμός, $A(x)$, $B(x)$ πολυώνυμα με πραγματικούς

συντελεστές, ώστε $B(\rho) \neq 0$ και το $A(x)$ έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$, τέτοιο ώστε $A(x)B(x) = (x-\rho)^2 f(x)$,
αν και μόνο αν $A(\rho) = A'(\rho) = 0$.

β) Έστω ν ακέραιος μεγαλύτερος ή ίσος του 1. Να βρείτε τις τιμές των κ, λ για τις
οποίες το πολυώνυμο $Q(x) = x^\nu (\nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8)$ έχει παράγοντα το $(x-2)^2$.

ΛΥΣΗ

α) Έστω ότι υπάρχει πολυώνυμο $f(x)$, τέτοιο ώστε $A(x)B(x) = (x-\rho)^2 f(x)$ (1).

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (1) παίρνουμε :

$$A'(x)B(x) + A(x)B'(x) = 2(x-\rho)f(x) + (x-\rho)^2 f'(x) \xrightarrow{x=\rho} A'(\rho)B(\rho) + A(\rho)B'(\rho) = 0 \quad (2)$$

$$\text{Από την (1) για } x=\rho \text{ παίρνουμε } A(\rho)B(\rho)=0 \xrightarrow{B(\rho) \neq 0} A(\rho) = 0. \text{ Έτσι η (2) γράφεται}$$

$$A'(\rho)B(\rho)=0 \xrightarrow{B(\rho) \neq 0} A'(\rho) = 0.$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΑ :

Έστω ότι $A(\rho) = A'(\rho) = 0$ όπου $A(x)$ πολυώνυμο βαθμού $\nu \geq 2$. Επειδή $A(\rho) = 0$,

υπάρχει πολυώνυμο $\pi(x)$ βαθμού $\nu-1$ τέτοιο ώστε $A(x) = (x-\rho)\pi(x)$ (3).

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της (3) παίρνουμε : $A'(x) = \pi(x) + (x-\rho)\pi'(x)$, οπότε

$$\text{για } x=\rho \text{ είναι } A'(\rho) = \pi(\rho) \xrightarrow{A'(\rho)=0} \pi(\rho)=0. \text{ Άρα υπάρχει πολυώνυμο } \varphi(x) \text{ βαθμού } \nu-2 \text{ τέτοιο ώστε } \pi(x) = (x-\rho)\varphi(x) \quad (4).$$

$$\begin{aligned} \text{Από τις (3), (4) παίρνουμε } A(x) &= (x-\rho)^2 \varphi(x) \Rightarrow A(x)B(x) = (x-\rho)^2 \varphi(x)B(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow A(x)B(x) = (x-\rho)^2 f(x), \text{ όπου } f(x) = \varphi(x)B(x). \end{aligned}$$

β) Είναι $Q(x) = A(x)B(x)$, όπου $A(x) = \nu x^3 + \kappa x^2 + \lambda x + 8$ και $B(x) = x^\nu$, με το $A(x)$ να
είναι βαθμού $3 \geq 2$ και $B(2) = 2^\nu \neq 0$. Σύμφωνα με το (α) ερώτημα αρκεί να βρούμε
τα κ, λ ώστε να ισχύουν : $A(2) = 0$ και $A'(2) = 0$. Έχουμε $A'(x) = 3\nu x^2 + 2\kappa x + \lambda$. Έτσι

$$\begin{cases} A(2) = 0 \\ A'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\nu + 4\kappa + 2\lambda + 8 = 0 \\ 12\nu + 4\kappa + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = -4\nu + 2 \\ \lambda = 4\nu - 8 \end{cases}.$$

4) Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2-2x\ln x$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το α , ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ έχουμε : $f'(x)=2\alpha x-2\ln x-2$, $f''(x)=2\alpha-\frac{2}{x}=\frac{2(\alpha x-1)}{x}$.

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2(\alpha x-1)}{x}=0 \Leftrightarrow \alpha x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{\alpha},$$

$$f''(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2(\alpha x-1)}{x}>0 \Leftrightarrow \alpha x-1>0 \Leftrightarrow x>\frac{1}{\alpha} \text{ και } f''(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{\alpha}.$$

Άρα η f είναι κυρτή στο $[\frac{1}{\alpha}, +\infty)$ και κοίλη στο $(0, \frac{1}{\alpha})$.

β) Η ζητούμενη εξίσωση είναι : $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ (1).

Είναι $f(1)=\alpha$ και $f'(1)=2\alpha-2$ και συνεπώς η (1) γράφεται : $y-\alpha=(2\alpha-2)(x-1) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow y=2(\alpha-1)x+2-\alpha$.

Η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν

$$0=2(\alpha-1)0+2-\alpha \Leftrightarrow \alpha=2.$$

5) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, η οποία έχει συνεχή f'' στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$. Αν ισχύει $\int_0^2 [x \cdot f''(x) + 3 \cdot f'(x)] dx = -\frac{8}{3}$, να υπολογίσετε το $f(2)$.

ΛΥΣΗ

Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ και είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ θα είναι $f'(2)=0$. Ακόμη η C_f διέρχεται από το σημείο $A(0, 1)$ άρα $f(0)=1$.

$$\text{Έχουμε : } \int_0^2 [x \cdot f''(x) + 3 \cdot f'(x)] dx = -\frac{8}{3} \Rightarrow \int_0^2 x \cdot f''(x) dx + 3 \int_0^2 f'(x) dx = -\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [xf'(x)]_0^2 - \int_0^2 (x)' \cdot f'(x) dx + 3(f(2)-f(0)) = -\frac{8}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2f'(2) - 0 - \int_0^2 f'(x) dx + 3(f(2)-f(0)) = -\frac{8}{3} \Rightarrow 2f'(2) - (f(2)-f(0)) + 3(f(2)-f(0)) = -\frac{8}{3}$$

$$\begin{aligned} f(0)=1, f'(2)=0 \\ \Rightarrow 2(f(2)-1) = -\frac{8}{3} \Rightarrow f(2) = -\frac{1}{3} . \end{aligned}$$

6) Έστω ότι η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο $+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-2x]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ , αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1$.

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η ευθεία $y=2x+5$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)-2x] = 5 .$$

β) Έχουμε : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot f(x) + 4x}{x \cdot f(x) - 2x^2 + 3x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu \cdot \frac{f(x)}{x} + 4}{f(x) - 2x + 3} = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\mu \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} + 4}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) + 3} = 1 \Rightarrow \frac{\mu \cdot 2 + 4}{5 + 3} = 1 \Rightarrow \mu = 2 .$$

7) Να αποδείξετε ότι :

α) $e^x - x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση, την $x=0$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = e^x - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Η φ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\varphi'(x) = e^x - 1$ και $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$, $\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$, $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Άρα η φ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0 το $\varphi(0) = 2$, συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $\varphi(x) \geq \varphi(0) \Rightarrow e^x - x + 1 \geq 2 \Rightarrow e^x - x + 1 > 0$.

β) Η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ επαληθεύεται για $x=0$. Ακόμη έχουμε :

$2e^x + 2x = x^2 + 2 \Leftrightarrow 2e^x + 2x - x^2 - 2 = 0$ (1) . Αρκεί να δείξω ότι η (1) έχει το πολύ μία ρίζα . Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 2x - x^2 - 2$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$f'(x) = 2e^x + 2 - 2x = 2(e^x - x + 1) > 0$, λόγω του (α) , οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και συνεπώς η (1) έχει το πολύ μία ρίζα . Τελικά η εξίσωση $2e^x + 2x = x^2 + 2$ έχει ακριβώς μια λύση , την $x=0$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1995

1) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση $f(x) = (x-\kappa)^5(x-\lambda)^3$

με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa} + \frac{3}{x-\lambda}$, για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \ln |f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3 + 3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2$, άρα για κάθε

$$x \in \mathbb{R} - \{\kappa, \lambda\} \text{ έχουμε } \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5(x-\kappa)^4(x-\lambda)^3}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3} + \frac{3(x-\kappa)^5(x-\lambda)^2}{(x-\kappa)^5(x-\lambda)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa} + \frac{3}{x-\lambda} .$$

β) Για κάθε $x \in (\kappa, \lambda)$ ισχύει $\kappa < x < \lambda \Rightarrow \begin{cases} x-\kappa > 0 \\ x-\lambda < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow g(x) = \ln(-f(x))$,

$$\text{επομένως } g'(x) = \frac{-f'(x)}{-f(x)} = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-\kappa} + \frac{3}{x-\lambda} \text{ και}$$

$$g''(x) = \frac{-5}{(x-\kappa)^2} + \frac{-3}{(x-\lambda)^2} < 0 . \text{ Άρα η } g \text{ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο } (\kappa, \lambda) .$$

2) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει ότι $f'(x) > 0$, για κάθε

$$x \in \mathbb{R} . \text{ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση } F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t) dt , x \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha, \beta$$

πραγματικούς αριθμούς , είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με

$F'(x_0) = 0$, τότε $F(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $x-t = u \Rightarrow t = x-u \Rightarrow dt = -du$ και για $t=\alpha$ παίρνουμε $u=x-\alpha$ ενώ για $t=\beta$

$$\text{παίρνουμε } u=x-\beta . \text{ Έτσι έχουμε } F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t) dt = \int_{x-\alpha}^{x-\beta} -f(u) du \Rightarrow$$

$$F(x) = \int_{x-\alpha}^{x-\beta} -f(u) du + \int_{x-\beta}^{x-\alpha} f(u) du \Rightarrow F(x) = \int_{x-\alpha}^{x-\beta} f(u) du - \int_{x-\beta}^{x-\alpha} f(u) du \quad (1) .$$

Η f είναι συνεχής στο $\mathcal{R}$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$) έτσι λόγω της (1) η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $F'(x) = f(x-\alpha)(x-\alpha)' - f(x-\beta)(x-\beta)' \Rightarrow F'(x) = f(x-\alpha) - f(x-\beta)$ (2).

Αν υπάρχει $x_0 \in \mathcal{R}$ με $F'(x_0) = 0$, η (2) για $x = x_0$ γράφεται $0 = f(x_0 - \alpha) - f(x_0 - \beta) \Rightarrow f(x_0 - \alpha) = f(x_0 - \beta) \Rightarrow x_0 - \alpha = x_0 - \beta \Rightarrow \alpha = \beta$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathcal{R}$ ($f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathcal{R}$) άρα θα είναι και 1-1 σε αυτό. Η (1) λοιπόν

γράφεται $F(x) = \int_2^{x-\alpha} f(u) du - \int_2^{x-\beta} f(u) du \Rightarrow F(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathcal{R}$.

3) Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$, τη συνεχή συνάρτηση

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathcal{R} \text{ για την οποία } \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 0 \text{ και τη συνάρτηση } g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_{\alpha}^x f(t) dt,$$

$x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν :

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(x_0, g(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) $g(x_0) = 2 + f(x_0)$.

ΛΥΣΗ

α) Οι συναρτήσεις $2, \frac{1}{x}, \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ άρα και η

συνάρτηση $g(x) = 2 + \frac{1}{x} \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη (επομένως και συνεχής) στο

$(0, +\infty)$. Έχουμε :

$$g(\alpha) = 2 + \frac{1}{\alpha} \int_{\alpha}^{\alpha} f(t) dt = 2 + 0 = 2, \quad g(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = 2 + 0 = 2, \text{ δηλαδή } g(\alpha) = g(\beta).$$

Επειδή η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta] \subset (0, +\infty)$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $g(\alpha) = g(\beta)$ σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$, δηλαδή η εφαπτομένη της C_g στο $(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) Είναι $g'(x) = 0 + \left(\frac{1}{x}\right)' \int_{\alpha}^x f(t) dt + \frac{1}{x} \left(\int_{\alpha}^x f(t) dt\right)' = -\frac{1}{x^2} \int_{\alpha}^x f(t) dt + \frac{1}{x} f(x), x \in (0, +\infty)$.

$$\text{Από το (α) ερώτημα είναι } g'(x_0)=0 \Rightarrow -\frac{1}{x_0^2} \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt + \frac{1}{x_0} f(x_0)=0 \quad (1).$$

$$\text{Ακόμη } g(x_0)=2+\frac{1}{x_0} \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt \Rightarrow \int_{\alpha}^{x_0} f(t)dt = x_0 g(x_0)-2x_0 \quad (2).$$

$$\begin{aligned} \text{Η (1) λόγω της (2) γράφεται : } & -\frac{1}{x_0^2} (x_0 g(x_0)-2x_0) + \frac{1}{x_0} f(x_0)=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow & -\frac{1}{x_0} (g(x_0)-2) + \frac{1}{x_0} f(x_0)=0 \Rightarrow -\frac{1}{x_0} (g(x_0)-2-f(x_0))=0 \Rightarrow g(x_0)=2+f(x_0). \end{aligned}$$

4) Να βρείτε τη συνάρτηση $f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την

$$\text{οποία ισχύουν : } f(0)=1995, f'(0)=1, 1+\int_0^x f''(t)\sin t dt = \sin^2 x + \int_0^x f'(t)\eta\mu t dt$$

ΛΥΣΗ

Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας με τα ολοκληρώματα

$$\begin{aligned} \text{έχουμε } 0+f''(x)\sin x &= (\sin^2 x)' + f'(x)\eta\mu x \Rightarrow f''(x)\sin x + f'(x)(\sin x)' = (\sin^2 x)' \\ \Rightarrow (f'(x)\sin x)' &= (\sin^2 x)' \Rightarrow f'(x)\sin x = \sin^2 x + c_1 \quad (1), \text{ όπου } c_1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\text{Από την (1) για } x=0 \text{ παίρνουμε } f'(0)\sin 0 = \sin^2 0 + c_1 \Rightarrow 1 \cdot 1 = 1^2 + c_1 \Rightarrow c_1=0.$$

$$\text{Η (1) γράφεται } f'(x)\sin x = \sin^2 x \Rightarrow f'(x) = \sin x \quad (\text{για κάθε } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ είναι}$$

$$\sin x > 0). \text{ Άρα } f'(x) = (\eta\mu x)' \Rightarrow f(x) = \eta\mu x + c_2 \quad (2), \text{ όπου } c_2 \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Από την (2) για } x=0 \text{ παίρνουμε } f(0) = \eta\mu 0 + c_2 \Rightarrow 1995 = 0 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1995.$$

$$\text{Άρα για κάθε } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ είναι } f(x) = \eta\mu x + 1995.$$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-2x^2+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να αποδείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.

β) Αν $0 < \alpha < 1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ και $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$. Στις θέσεις αυτές η $f'(x)$ αλλάζει πρόσημο, αφού όλες
 οι ρίζες της πολωνυμικής εξίσωσης $f'(x) = 0$ είναι απλές και επομένως στις
 θέσεις αυτές η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα. Είναι $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ και
 $f(-1) = \alpha - 1$, $f(0) = \alpha$, $f(1) = \alpha - 1$. Συνεπώς: $A(-1, \alpha - 1)$, $B(0, \alpha)$, $\Gamma(1, \alpha - 1)$. Είναι:

$$\lambda_{AB} \cdot \lambda_{BF} = \frac{\alpha - (\alpha - 1)}{0 - (-1)} \cdot \frac{\alpha - 1 - \alpha}{1 - 0} = 1 \cdot (-1) = -1, \text{ άρα } AB \perp BF.$$

β) Για κάθε $x \in (-1, 0)$ είναι $x < 0$, $x-1 < 0$, $x+1 > 0$ άρα $f'(x) = 4x(x-1)(x+1) > 0$.

Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, 0)$, επομένως η εξίσωση $f(x) = 0$
 έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

Η f είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως πολωνυμική και $f(-1) \cdot f(0) = (\alpha - 1)\alpha < 0$, αφού
 $0 < \alpha < 1$, άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(-1, 0)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(-1, 0)$.

6) Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$, για την οποία ισχύει
 $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε $g(x)f'(x) = 2f(x)$, για
 κάθε $x \in \mathcal{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής
 το $A(x_0, f(x_0))$ τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο
 $B(x_0, g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

ΛΥΣΗ

Εφόσον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$ και το $A(x_0, f(x_0))$ σημείο
 καμπής της C_f θα είναι $f''(x_0) = 0$. Επειδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ έχουμε

$$g(x) = \frac{2f(x)}{f'(x)} \text{ και } g'(x) = \frac{2(f'(x))^2 - 2f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow$$

$$g'(x_0) = \frac{2(f'(x_0))^2 - 2f(x_0)f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} \Rightarrow g'(x_0) = \frac{2(f'(x_0))^2}{(f'(x_0))^2} \Rightarrow g'(x_0) = 2.$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $y - 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 5$ είναι 2 και είναι
 ίσος με τον συντελεστή διεύθυνσης $g'(x_0)$ της εφαπτομένης της C_g στο B . Άρα
 η εφαπτομένη της C_g στο B είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

7) Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t , σύμφωνα

με τη συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$, όπου A ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός

μεταβολής του κέρδους $K(t)$, από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η

συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και

υποθέτουμε ότι $K(0)=0$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $t \geq 0$ είναι $P(t) = K(t) + f(t) \Rightarrow P'(t) = K'(t) + f'(t) \Rightarrow$

$$P'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} + \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}} \cdot \left(-\frac{t+28}{14}\right)' \Rightarrow P'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}} - \frac{A}{4} e^{-\frac{t+28}{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t) = \frac{A}{4} \left(e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}} \right). \text{ Έχουμε :}$$

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}} = 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} = e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7} = -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow t = 28.$$

$$P'(t) > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} - e^{-\frac{t+28}{14}} > 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{7}} > e^{-\frac{t+28}{14}} \Leftrightarrow -\frac{t}{7} > -\frac{t+28}{14} \Leftrightarrow t < 28,$$

$P'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 28$. Άρα η συνάρτηση $P(t)$ παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $t=28$, επομένως η χρονική στιγμή κατά την οποία πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο, είναι η $t=28$.

8) Αν $G(x) = \int_1^x f(t) dt$, όπου $f(t) = \int_1^{3t} \frac{e^u}{\sqrt{u}} du$ και $x > 0$, $t > 0$ να βρείτε :

α) την $G''(1)$

β) το $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1}$

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) με $f'(t) = \frac{e^{3t}}{\sqrt{3t}} (3t)' = \frac{\sqrt{3}e^{3t}}{\sqrt{t}}$, $t > 0$.

Επειδή η f είναι συνεχής, η G είναι παραγωγίσιμη με $G'(x) = f(x)$, $x > 0$. Ακόμη

$$G''(x) = f'(x) = \frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}}, x > 0, \text{ επομένως } G''(1) = \frac{\sqrt{3}e^3}{\sqrt{1}} = \sqrt{3}e^3.$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}G''(x) - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} \frac{\sqrt{3}e^{3x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{3}e^{3x} - \sqrt{3}}{\sqrt{x+1} - 1} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sqrt{3}e^{3x} - \sqrt{3})'}{(\sqrt{x+1} - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3\sqrt{3}e^{3x}}{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (6\sqrt{3}e^{3x}\sqrt{x+1}) = 6\sqrt{3}e^0\sqrt{1} = 6\sqrt{3}. \end{aligned}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1996

1) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{R}$.

Αν οι f και g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f' = g, g' = -f$ τότε να αποδείξετε ότι :

α) υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς

β) ισχύουν οι σχέσεις $f'' + f = g'' + g = 0$ και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή

γ) αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

ΛΥΣΗ

α) Είναι $f'(x) = g(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) = g'(x) = -f(x)$ (1).

Ακόμη $g'(x) = -f(x)$ και $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα η g' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g''(x) = -f'(x) = -g(x)$ (2).

Επειδή οι $-f, -g$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ (ως παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$), από τις (1), (2) προκύπτει ότι οι f'' και g'' είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$.

β) Λόγω των (1), (2) : $f''(x) + f(x) = -f(x) + f(x) = 0$, $g''(x) + g(x) = -g(x) + g(x) = 0$.

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε : $h'(x) = (f^2(x) + g^2(x))' = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$, άρα η h είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) και $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η εξίσωση $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα ξ_1 στο (x_1, x_2) .

Έστω ότι η $g(x) = 0$ έχει και άλλη ρίζα ξ_2 στο (x_1, x_2) . Τότε επειδή η g είναι συνεχής στο $[\xi_1, \xi_2]$, παραγωγίσιμη στο (ξ_1, ξ_2) και $g(\xi_1) = g(\xi_2) = 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η εξίσωση $g'(x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(\xi_1, \xi_2) \subset (x_1, x_2)$, που είναι άτοπο αφού $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$. Άρα η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

2) Να αποδείξετε τις ανισότητες :

α) $\eta\mu x < 2x$, $x > 0$.

β) $\eta\mu x > x - \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \eta\mu x - 2x$, $x \geq 0$. Έχουμε $\varphi'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 2 < 0$, για κάθε $x \geq 0$ (είναι $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$) , συνεπώς η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Άρα για κάθε $x > 0$ είναι $\varphi(x) < \varphi(0) \Rightarrow \eta\mu x - 2x < \eta\mu 0 - 2 \cdot 0 \Rightarrow \eta\mu x < 2x$.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3}$, $x \geq 0$. Έχουμε $g'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + x^2$,

$g''(x) = -\eta\mu x + 2x > 0$, για κάθε $x > 0$ (λόγω του (α)) , άρα η συνάρτηση g' είναι

γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι $g'(x) > g'(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow g'(x) > \sigma\upsilon\nu 0 - 1 + 0^2 \Rightarrow g'(x) > 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

και συνεπώς για κάθε $x > 0$ είναι $g(x) > g(0) \Rightarrow \eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > \eta\mu 0 - 0 + \frac{0^3}{3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \eta\mu x > x - \frac{x^3}{3} .$$

3) Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση :

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

ΛΥΣΗ

Το $\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx$ είναι πραγματική σταθερά , έστω c , άρα $c = f(x) + e^x \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) = -e^x + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η δοθείσα σχέση γράφεται :

$$\int_0^1 e^{1-x} (-e^x + c) dx = -e^x + c + e^x \Rightarrow \int_0^1 (-e^1 + ce^{1-x}) dx = c \Rightarrow [-ex - ce^{1-x}]_0^1 = c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-e - c) - (0 - ce) = c \Rightarrow c = \frac{e}{e-2} . \text{ Άρα } f(x) = -e^x + \frac{e}{e-2} , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

4) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι

$f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, όπου c πραγματικός αριθμός. Να

αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta-\alpha)f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$.

ΛΥΣΗ

Έστω $I = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx$. Θέτουμε $\alpha + \beta - x = t \Rightarrow x = \alpha + \beta - t \Rightarrow dx = -dt$. Ακόμη

για $x = \alpha$ παίρνουμε $t = \beta$, ενώ για $x = \beta$ παίρνουμε $t = \alpha$. Άρα $I = \int_{\beta}^{\alpha} f(t)(-1)dt =$

$= \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$. Από την σχέση $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ προκύπτει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cdx \Rightarrow I + I = c(\beta - \alpha) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{c(\beta - \alpha)}{2} \quad (1).$$

Από την σχέση $f(x)+f(\alpha+\beta-x) = c$ για $x = \alpha$ παίρνουμε $f(\alpha)+f(\beta) = c$ (2), ενώ

για $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ παίρνουμε $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = c \Rightarrow c = 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ (3).

Η (1) λόγω της (2) γράφεται $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \frac{\beta - \alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$, ενώ λόγω της (3)

γράφεται $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (\beta - \alpha)f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$. Έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο.

5) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το

διάστημα $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $f'(x) = g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x$, $x \in [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0, +\infty)$. Είναι $h'(x) = f'(x) - g'(x) =$

$= g'(x) + \eta \mu^2 x + e^x - g'(x) = \eta \mu^2 x + e^x > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Συνεπώς για κάθε $x > 0$ έχουμε $h(x) > h(0) \Rightarrow f(x) - g(x) > f(0) - g(0) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$.

- 6) Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{ax}$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου a έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f''(x)+2f'(x)=3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Είναι } f'(x) &= ae^{ax}, f''(x) = a^2e^{ax}. \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε : } f''(x)+2f'(x)=3f(x) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2e^{ax}+2ae^{ax} &= 3e^{ax} \Leftrightarrow e^{ax}(a^2+2a-3)=0 \Leftrightarrow a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=1 \text{ ή } a=-3. \end{aligned}$$

- 7) Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\lambda e^{\beta_1 x} + \mu e^{\beta_2 x}$ με $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $g(x_0)=g'(x_0)=0$. Να αποδειχθεί ότι $\lambda=\mu=0$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Είναι } g'(x) &= \lambda\beta_1 e^{\beta_1 x} + \mu\beta_2 e^{\beta_2 x}, x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } g(x_0)=0 \Leftrightarrow \lambda e^{\beta_1 x_0} + \mu e^{\beta_2 x_0} = 0 \quad (1), \\ g'(x_0)=0 &\Leftrightarrow \lambda\beta_1 e^{\beta_1 x_0} + \mu\beta_2 e^{\beta_2 x_0} = 0 \quad (2). \text{ Οι (1), (2) αποτελούν ομογενές σύστημα} \end{aligned}$$

$$\text{με αγνώστους } \lambda, \mu \text{ και ορίζουσα } D = \begin{vmatrix} e^{\beta_1 x_0} & e^{\beta_2 x_0} \\ \beta_1 e^{\beta_1 x_0} & \beta_2 e^{\beta_2 x_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \beta_2 e^{\beta_2 x_0} e^{\beta_1 x_0} - \beta_1 e^{\beta_1 x_0} e^{\beta_2 x_0} = e^{\beta_1 x_0} e^{\beta_2 x_0} (\beta_2 - \beta_1) \neq 0, \text{ αφού } \beta_1 \neq \beta_2.$$

Το σύστημα έχει λοιπόν μόνο τη μηδενική λύση δηλαδή $\lambda=\mu=0$.

- 8) Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)=\int_0^x (x-t)g(t)dt$. Να αποδείξετε

ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε : } f(x) = \int_0^x xg(t)dt - \int_0^x tg(t)dt = x \cdot \int_0^x g(t)dt - \int_0^x tg(t)dt. \text{ Επειδή οι συναρτήσεις}$$

$g(t)$, $tg(t)$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = (x)' \cdot \int_0^x g(t)dt + x \cdot \left(\int_0^x g(t)dt \right)' - \left(\int_0^x tg(t)dt \right)' = \int_0^x g(t)dt + xg(x) - \int_0^x g(t)dt.$$

Επειδή $\left(\int_0^x g(t)dt \right)' = g(x)$ η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=g(x)$.

Όταν $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ και επειδή η g είναι συνεχής στο $\mathcal{R}$, θα έχει σταθερό πρόσημο, δηλαδή $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ ή $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Λόγω της $f''(x) = g(x)$ θα είναι $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$ ή $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathcal{R}$, οπότε η C_f στρέφει τα κοίλα άνω ή κάτω στο $\mathcal{R}$ αντίστοιχα.

- 9) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = \sqrt{x}$ και $f(x) = 2x - 1$ και την ευθεία $x = 0$.

ΛΥΣΗ

Για $x \geq 0$ έχουμε $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 1 = \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x - \sqrt{x} - 1 = 0$. Θέτουμε $\sqrt{x} = u \geq 0$ και η εξίσωση γράφεται $2u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ή $u = -\frac{1}{2}$ (απορρίπτεται). Άρα $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Για κάθε $x \in [0, 1]$ είναι $g(x) - f(x) = \sqrt{x} - 2x + 1 = \sqrt{x} - 2\sqrt{x}^2 + 1 = \sqrt{x} - \sqrt{x}^2 - \sqrt{x}^2 + 1 = \sqrt{x}(1 - \sqrt{x}) + (1 - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x}) = (1 - \sqrt{x})(2\sqrt{x} + 1) \geq 0$. Εφόσον οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, 1]$ το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_0^1 (g(x) - f(x)) dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - 2x + 1) dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - x^2 + x \right]_0^1 = \frac{2}{3} - 1 + 1 = \frac{2}{3} \text{ τ.μ.}$$

- 10) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \lambda x$, $\lambda \in \mathcal{R}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το $I = \int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Για } x > 0 \text{ είναι } \frac{f(x)}{x} = \frac{x \cdot (\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda)}{x} = \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} + \lambda) = 1 \Rightarrow \sqrt{0 + 1} + \lambda = 1 \Rightarrow \lambda = 0.$$

$$\beta) \text{ Για } \lambda = 0 \text{ έχουμε } f(x) = \sqrt{1 + x^2}, \text{ άρα } I = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1 + x^2)'}{1 + x^2} dx =$$

$$= \frac{1}{2} [\ln(1 + x^2)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

- 11) Έστω ότι $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου $t \geq 0$ και $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t}) = 1 - 2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με $\frac{1}{16}$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

ΛΥΣΗ

Θέτουμε $\sqrt{t} = x$, οπότε $f(x) = 1 - 2^{-\frac{x}{499}}$, $x \geq 0$. Για κάθε $x \geq 0$ είναι :

$$f'(x) = 1 - 2^{-\frac{x}{499}} \cdot \ln 2 \cdot \left(-\frac{x}{499}\right)' = \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{x}{499}}, \quad f'(0) = \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^0 = \frac{\ln 2}{499}. \text{ Η ζητούμενη}$$

χρονική στιγμή t_1 θα βρεθεί από την εξίσωση $f'(t_1) = \frac{1}{16} \cdot f'(0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln 2}{499} \cdot 2^{-\frac{t_1}{499}} = \frac{1}{16} \cdot \frac{\ln 2}{499} \Leftrightarrow 2^{-\frac{t_1}{499}} = 2^{-4} \Leftrightarrow -\frac{t_1}{499} = -4 \Leftrightarrow t_1 = 1996.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1997

1) Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B = \frac{f'(\alpha) - Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$. Αν ϕ είναι πραγματική

συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R} - \{\alpha\}$, τέτοια ώστε

$$\frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}, \text{ να αποδειχθεί ότι}$$

υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow \alpha} \phi(x)$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Είναι } A = \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \text{ επομένως } B = \frac{f'(\alpha) - \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} g'(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{g(\alpha)f'(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{(g(\alpha))^2}.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως

πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Είναι $h(\alpha) = A$ και $h'(\alpha) = B$. Για κάθε

$$x \in \mathbb{R} - \{\alpha\} \text{ έχουμε } \frac{f(x)}{(x-\alpha)^2 g(x)} = \frac{A}{(x-\alpha)^2} + \frac{B}{x-\alpha} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{h(x)}{(x-\alpha)^2} = \frac{h(\alpha)}{(x-\alpha)^2} + \frac{h'(\alpha)}{x-\alpha} + \frac{\phi(x)}{g(x)} \Leftrightarrow \frac{\phi(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(\alpha) - (x-\alpha)h'(\alpha)}{(x-\alpha)^2}.$$

Επειδή η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = h(\alpha). \text{ Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\phi(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{h(x) - h(\alpha) - (x-\alpha)h'(\alpha)}{(x-\alpha)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{\text{Hospital}}{=}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{h'(x) - h'(\alpha)}{2(x-\alpha)(x-\alpha)'} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{h'(x) - h'(\alpha)}{x-\alpha} = \frac{1}{2} h''(\alpha) \quad (\text{η } h \text{ είναι 2 φορές}$$

$$\text{παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ αφού } h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \text{ και για κάθε } x \in \mathbb{R})$$

η h' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων). Είναι λοιπόν :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \left(\frac{\phi(x)}{g(x)} g(x) \right) = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\phi(x)}{g(x)} \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = \frac{1}{2} h''(\alpha) g(\alpha) \in \mathbb{R}$$

(η g ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής).

- 2) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε $(x-2)f''(x) + (\alpha\mu x - \beta x^2)f'(x) = e^{x-2} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $\rho \neq 2$, ώστε $f'(\rho) = 0$. Να εξετάσετε αν ισχύει η σχέση $f''(\rho) > 0$.

ΛΥΣΗ

Αφού η ισότητα $(x-2)f''(x) + (\alpha\mu x - \beta x^2)f'(x) = e^{x-2} - 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα ισχύει και για $x = \rho$: $(\rho-2)f''(\rho) + (\alpha\mu\rho - \beta\rho^2)f'(\rho) = e^{\rho-2} - 1 \Rightarrow (\rho-2)f''(\rho) + 0 = e^{\rho-2} - 1$

$$\Rightarrow f''(\rho) = \frac{e^{\rho-2} - 1}{\rho - 2} \quad (\text{είναι } \rho \neq 2) . \text{ Διακρίνουμε τις περιπτώσεις :}$$

$$\bullet \text{ Αν } \rho > 2 \text{ τότε } \rho - 2 > 0 \Rightarrow e^{\rho-2} > e^0 \Rightarrow e^{\rho-2} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{e^{\rho-2} - 1}{\rho - 2} > 0 .$$

$$\bullet \text{ Αν } \rho < 2 \text{ τότε } \rho - 2 < 0 \Rightarrow e^{\rho-2} < e^0 \Rightarrow e^{\rho-2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{e^{\rho-2} - 1}{\rho - 2} > 0 .$$

Άρα ισχύει η σχέση $f''(\rho) > 0$.

- 3) Δίνεται πραγματική συνάρτηση g , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $g(x) > 0$ και $g''(x)g(x) - [g'(x)]^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

$$\beta) g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)} \quad \text{για κάθε } x_1, x_2 \in \mathbb{R} .$$

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Έστω } f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}, x \in \mathbb{R}. \text{ Έχουμε } f'(x) = \frac{g''(x)g(x) - (g'(x))^2}{(g(x))^2} > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

(πηλίκo θετικών αριθμών) . Άρα η $f = \frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

$$\beta) \text{ Θεωρούμε τη συνάρτηση } h(x) = \ln(g(x)), x \in \mathbb{R}. \text{ Είναι } h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ και η } h' \text{ είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, όπως έχει αποδειχθεί στο (α) .

$$\text{Αν } x_1 = x_2 \text{ τότε : } g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) = g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_1}{2}\right) = g(x_1) \text{ και } \sqrt{g(x_1)g(x_2)} = \sqrt{g(x_1)g(x_1)}$$

$$= \sqrt{[g(x_1)]^2} = g(x_1), \text{ άρα } g\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) = \sqrt{g(x_1)g(x_2)} .$$

Αν $x_1 \neq x_2$, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $x_1 < x_2$. Η συνάρτηση $h(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}]$, $[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2]$ και παραγωγίσιμη στα $(x_1, \frac{x_1 + x_2}{2})$, $(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2)$, αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την h στα διαστήματα $[x_1, \frac{x_1 + x_2}{2}]$, $[\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2]$ και παίρνουμε : υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (x_1, \frac{x_1 + x_2}{2})$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi_1) = \frac{h(\frac{x_1 + x_2}{2}) - h(x_1)}{\frac{x_1 + x_2}{2} - x_1} \Rightarrow h'(\xi_1) = \frac{h(\frac{x_1 + x_2}{2}) - h(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \text{ και υπάρχει ένα}$$

$$\text{τουλάχιστον } \xi_2 \in (\frac{x_1 + x_2}{2}, x_2) \text{ τέτοιο ώστε } h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h(\frac{x_1 + x_2}{2})}{x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(\xi_2) = \frac{h(x_2) - h(\frac{x_1 + x_2}{2})}{\frac{x_2 - x_1}{2}}. \text{ Επειδή η } h' \text{ είναι γνησίως αύξουσα και } \xi_1 < \xi_2 \text{ θα}$$

$$\text{έχουμε } h'(\xi_1) < h'(\xi_2) \Rightarrow \frac{h(\frac{x_1 + x_2}{2}) - h(x_1)}{\frac{x_2 - x_1}{2}} < \frac{h(x_2) - h(\frac{x_1 + x_2}{2})}{\frac{x_2 - x_1}{2}} \quad \begin{matrix} x_2 - x_1 > 0 \\ \Rightarrow \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 2h(\frac{x_1 + x_2}{2}) < h(x_1) + h(x_2) \Rightarrow 2\ln(g(\frac{x_1 + x_2}{2})) < \ln(g(x_1)) + \ln(g(x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(g(\frac{x_1 + x_2}{2}))^2 < \ln(g(x_1)g(x_2)) \Rightarrow (g(\frac{x_1 + x_2}{2}))^2 < g(x_1)g(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(\frac{x_1 + x_2}{2}) < \sqrt{g(x_1)g(x_2)}.$$

$$\text{Άρα η σχέση } g(\frac{x_1 + x_2}{2}) \leq \sqrt{g(x_1)g(x_2)} \text{ ισχύει για κάθε } x_1, x_2 \in \mathcal{R}.$$

4) Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g , παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$,

τέτοια ώστε $g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου α

πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι :

α) $g(0) = -\alpha$

β) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Θέτουμε στη δοθείσα ισότητα $x=y=0$ και έχουμε $g(0+0) = e^0 g(0) + e^0 g(0) + 0 \cdot 0 + \alpha$

$$\Rightarrow g(0) = g(0) + g(0) + \alpha \Rightarrow g(0) = -\alpha.$$

β) Παραγωγίζουμε και τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας ως προς y και έχουμε :

$$g'(x+y) \cdot (x+y)' = (e^y)' g(x) + e^x g'(y) + (xy)' + (\alpha)' \Rightarrow g'(x+y) = e^y g'(x) + e^x g'(y) + x.$$

Θέτουμε στην τελευταία ισότητα $y=0$ και παίρνουμε $g'(x+0) = e^0 g'(x) + e^x g'(0) + x$,

δηλαδή $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5) Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν

τις σχέσεις $f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f''(x) - g''(x) = 4 \Leftrightarrow (f'(x) - g'(x))' = (4x)'$ $\Leftrightarrow f'(x) - g'(x) = 4x + c_1$

όπου $c_1 \in \mathbb{R}$. Από την τελευταία ισότητα, επειδή $f'(1) = g'(1)$, για $x=1$ παίρνουμε

$$f'(1) - g'(1) = 4 \cdot 1 + c_1 \Leftrightarrow c_1 = -4. \text{ Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f'(x) - g'(x) = 4x - 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x))' = (2x^2 - 4x)' \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x + c_2, \text{ όπου } c_2 \in \mathbb{R}. \text{ Από την}$$

τελευταία ισότητα, επειδή $f(2) = g(2)$, για $x=2$ παίρνουμε $f(2) - g(2) = 8 - 8 + c_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow c_2 = 0. \text{ Άρα για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x \text{ ή } t(x) = 2x^2 - 4x.$$

β) Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2$. Επειδή

οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[0, 2]$ και $f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x \leq 0$ για κάθε

$x \in [0, 2]$ (πρόσημο τριωνύμου) το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^2 -(f(x) - g(x)) dx$

$$= \int_0^2 (4x - 2x^2) dx = \left[2x^2 - 2 \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(8 - \frac{16}{3} \right) - (0 - 0) = \frac{8}{3} \text{ τ.μ.}$$

6) Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha < \beta$.

Να αποδειχθεί ότι :

α) $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

β) $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha)$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ (άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με $g'(x) = f'(x) - f'(\beta)$.

Επειδή $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα άρα για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ έχουμε $x < \beta \Rightarrow f'(x) < f'(\beta) \Rightarrow f'(x) - f'(\beta) < 0 \Rightarrow g'(x) < 0$. Η g είναι και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ άρα είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$. Επομένως για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ έχουμε $x \geq \alpha \Rightarrow g(x) \leq g(\alpha) \Rightarrow f(x) - f(\alpha) - f'(\beta)(x - \alpha) \leq f(\alpha) - f(\alpha) - f'(\beta) \cdot 0 \Rightarrow f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$.

β) Από το (α) έχουμε $f'(\beta)(x - \alpha) - f(x) + f(\alpha) \geq 0 \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} (f'(\beta)(x - \alpha) - f(x) + f(\alpha)) dx \geq 0$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f'(\beta)(x - \alpha) dx - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha) dx \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta) \int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) dx + f(\alpha)(\beta - \alpha) \Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta) \left[\frac{(x - \alpha)^2}{2} \right]_{\alpha}^{\beta} + f(\alpha)(\beta - \alpha)$$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta) \frac{(\beta - \alpha)^2}{2} + f(\alpha)(\beta - \alpha) \Rightarrow 2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha).$$

7) Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2 - 5x + 1 - \int_0^{x^2 - 5x} f(t) dt$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $g(-3)g(0) < 0$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Έχουμε } g(0) = 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 - \int_0^0 f(t) dt = 1 > 0 \text{ και } g(-3) = (-3)^2 - 5(-3) + 1 - \int_0^{24} f(t) dt$$

$$\Rightarrow g(-3) = 25 - \int_0^{24} f(t) dt \quad (1) . \text{ Όμως για κάθε } x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 2 \Rightarrow f(x) - 2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{24} (f(x) - 2) dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^{24} f(x) dx - \int_0^{24} 2 dx \geq 0 \Rightarrow \int_0^{24} f(x) dx \geq 2(24 - 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{24} f(x) dx \geq 48 \Rightarrow \int_0^{24} f(x) dx > 25 \Rightarrow 25 - \int_0^{24} f(x) dx < 0 \stackrel{(1)}{\Rightarrow} g(-3) < 0 .$$

$$\text{Άρα } g(-3)g(0) < 0 .$$

β) Η g είναι συνεχής στο $[-3, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και ισχύει $g(-3)g(0) < 0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-3, 0)$. Ακόμη η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 2x - 5 - f(x^2 - 5x) \cdot (x^2 - 5x)' = 2x - 5 - f(x^2 - 5x) \cdot (2x - 5) = (2x - 5)(1 - f(x^2 - 5x))$. Για κάθε $x \in (-3, 0)$ είναι $2x - 5 < 0$ και $f(x^2 - 5x) \geq 2 > 1 \Rightarrow 1 - f(x^2 - 5x) < 0$, άρα $g'(x) > 0$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-3, 0)$ και συνεπώς η εξίσωση $g(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-3, 0)$. Τελικά λοιπόν η εξίσωση $g(x)=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(-3, 0)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1998

1) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση : $f(f(x)) + f^3(x) = 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι « ένα προς ένα » .

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$ και $f^3(x_1) = f^3(x_2)$, οπότε
 $f(f(x_1)) + f^3(x_1) = f(f(x_2)) + f^3(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2$. Άρα η f είναι 1-1 .

β) Επειδή η f είναι 1-1 έχουμε $f(2x^3 + x) = f(4 - x) \Leftrightarrow 2x^3 + x = 4 - x \Leftrightarrow 2x^3 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \stackrel{\text{Horner}}{\Leftrightarrow} (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 . \text{ Εφόσον το τριώνυμο } x^2 + x + 2 \text{ έχει αρνητική} \\ \text{διακρίνουσα θα ισχύει } (x-1)(x^2 + x + 2) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 .$$

2) Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος . Αν $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$, $x \geq 0$, όπου M_0 , M και μ είναι θετικές σταθερές , να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) = M_0 + M(1 - e^{-\mu x})$ (1) και $g'(x) = M\mu e^{-\mu x}$ (2) .

Από την (1) έχουμε $M e^{-\mu x} = M_0 + M - g(x)$ (3) . Από τις (2) και (3) παίρνουμε :
 $g'(x) = \mu (M_0 + M - g(x))$, $x \geq 0$.

Για $x=0$ από την (1) παίρνουμε $g(0) = M_0 + M(1 - e^0) \Rightarrow g(0) = M_0$. Άρα το M_0 είναι οι μονάδες του παραγόμενου προϊόντος που προκύπτουν χωρίς τη χρήση λιπάσματος .

3) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x > 0$ ισχύουν $f(x) > 0$, $f'(x) + 2xf(x) = 0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Να δείξετε ότι $\frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x-1}{2}$, $x > 1$.

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x) = \int_1^x (1 + \frac{1}{2t^2}) f(t) dt$, $x > 1$.

δ) Να αποδείξετε ότι $2e \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt < 1$, για κάθε x μεγαλύτερο του ένα.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2xf(x)$. Η συνάρτηση $-2x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0, +\infty)$, συνεπώς η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Ακόμη για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) + 2xf(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f'(x) + e^{x^2} \cdot 2xf(x) = e^{x^2} \cdot 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (e^{x^2} \cdot f(x))' = 0 \Leftrightarrow e^{x^2} \cdot f(x) = c$, όπου c πραγματική σταθερά. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$ θα είναι $f(1) = 1$, άρα

$e^{1^2} \cdot f(1) = c \Leftrightarrow e \cdot 1 = c \Leftrightarrow c = e$. Συνεπώς για κάθε $x > 0$ είναι $e^{x^2} \cdot f(x) = e \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x) = e^{1-x^2}$.

β) Έστω $g(t) = \frac{f(t)}{2t^2}$, $t > 0$. Είναι $g'(t) = \frac{f'(t)2t^2 - f(t)(2t^2)'}{(2t^2)^2} = \frac{-2tf'(t)2t^2 - f(t)4t}{4t^4} =$

$= -f(t) \cdot \frac{t^2 + 1}{t^3} = -e^{1-t^2} \cdot \frac{t^2 + 1}{t^3} < 0$, για κάθε $t > 0$. Άρα η g είναι γνησίως

φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Για κάθε $t \in [1, x]$ έχουμε: $1 \leq t \leq x \Rightarrow g(1) \geq g(t) \geq g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(1) - g(t) \geq 0$ και $g(t) - g(x) \geq 0$. Επίσης αν $1 < t < x \Rightarrow g(1) > g(t) > g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow g(1) - g(t) > 0$ και $g(t) - g(x) > 0$. Επειδή λοιπόν οι $g(1) - g(t)$, $g(t) - g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν, είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[1, x]$ θα έχουμε:

$\int_1^x (g(1) - g(t)) dt > 0$ (1) και $\int_1^x (g(t) - g(x)) dt > 0$ (2).

$$\text{Από την (1) προκύπτει } \int_1^x g(1) dt > \int_1^x g(t) dt \Rightarrow \int_1^x \frac{1}{2} dt > \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt \Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{1}{2} (x-1).$$

$$\begin{aligned} \text{Από την (2) προκύπτει } \int_1^x g(t) dt > \int_1^x g(x) dt &\Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt > g(x) \cdot \int_1^x 1 dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt > \frac{f(x)}{2x^2} (x-1) . \text{ Επομένως } \frac{x-1}{2x^2} f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2} dt < \frac{x-1}{2} , x > 1 . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \text{ Για κάθε } x > 1 \text{ έχουμε } F(x) &= \int_1^x \left(1 + \frac{1}{2t^2}\right) f(t) dt = \int_1^x \left(f(t) + \frac{1}{2t^2} f(t)\right) dt = \\ &= \int_1^x \left(e^{1-t^2} + \frac{1}{2t^2} e^{1-t^2}\right) dt = \int_1^x \left(-\frac{1}{2t} e^{1-t^2}\right)' dt = \left[-\frac{1}{2t} e^{1-t^2}\right]_1^x = \\ &= -\frac{1}{2x} e^{1-x^2} + \frac{1}{2} e^0 = -\frac{1}{2x} e^{1-x^2} + \frac{1}{2} . \end{aligned}$$

$$\delta) \text{ Η σχέση } 2e \cdot \int_1^x e^{-t^2} dt < 1 \text{ γράφεται ισοδύναμα } 2 \cdot \int_1^x e^{1-t^2} dt < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \int_1^x f(t) dt < 1 \Leftrightarrow \int_1^x f(t) dt < \frac{1}{2} \quad (3).$$

$$\text{Είναι } e^{1-x^2} > 0 \Rightarrow e^{1-x^2} - 1 > -1 \Rightarrow f(x) - f(1) > -1 \Rightarrow \int_1^x f'(t) dt > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^x -2tf(t) dt > -1 \Rightarrow \int_1^x tf(t) dt < \frac{1}{2} \quad (4).$$

$$\text{Για κάθε } t > 1 \xrightarrow{f(t) > 0} tf(t) > f(t) \Rightarrow tf(t) - f(t) > 0 .$$

Επειδή η $tf(t) - f(t)$ είναι συνεχής $[1, x]$ (με $x > 1$), δεν είναι παντού μηδέν στο

$$[1, x] \text{ και για κάθε } t \in [1, x] \text{ είναι } tf(t) - f(t) \geq 0 \text{ θα ισχύει } \int_1^x (tf(t) - f(t)) dt > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^x tf(t) dt > \int_1^x f(t) dt \quad (5) . \text{ Από τις (4) και (5) παίρνουμε } \int_1^x f(t) dt < \frac{1}{2} , \text{ δηλαδή}$$

την (3), οπότε το ζητούμενο έχει αποδεχθεί .

4) Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t) = 2t + \mu$, $t \in \mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός. Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές, με τον τύπο $E(t) = (t-1)\varphi(t)$, $t \geq 0$, όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη. Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται, επίσης σε εκατομμύρια δραχμές, σύμφωνα με τον τύπο $K(t) = \varphi(t+4)$, $t \geq 0$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t \geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε: $P(t) = E(t) - K(t) = (t-1)\varphi(t) - \varphi(t+4) = (t-1)(2t+\mu) - (2(t+4)+\mu) = 2t^2 + \mu t - 2t - \mu - 2t - 8 - \mu = 2t^2 + (\mu-4)t - 2\mu - 8$. Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχμές θα είναι $P(1) = -12 \Leftrightarrow 2 \cdot 1^2 + (\mu-4) \cdot 1 - 2\mu - 8 = -12 \Leftrightarrow \mu = 2$. Άρα $P(t) = 2t^2 + (2-4)t - 2 \cdot 2 - 8$, δηλαδή $P(t) = 2t^2 - 2t - 12$, $t \geq 0$.

β) Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν $P(t) > 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t - 12 > 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 > 0 \stackrel{t \geq 0}{\Leftrightarrow} \Leftrightarrow t > 3$. Άρα η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους.

γ) Ζητούμενο είναι το $P'(2)$. Είναι $P'(t) = 4t - 2$, $t \geq 0$. Άρα $P'(2) = 4 \cdot 2 - 2 = 6$ εκατομμύρια δραχμές / έτος.

δ) $I = \frac{111}{2} \int_0^6 P(t) dt = \frac{111}{2} \int_0^6 (2t^2 - 2t - 12) dt = \frac{111}{2} \left[2 \frac{t^3}{3} - t^2 - 12t \right]_0^6 = 1998$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = 2^{12}(e^{-4x} - e^{-\alpha x})$, $x \geq 0$, όπου α πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 4.

α) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$.

β) Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τη συνάρτηση $h(x)$.

γ) Αν x_1 είναι ρίζα της πρώτης παραγώγου και x_2 είναι ρίζα της δευτέρας παραγώγου της $h(x)$, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τα x_1 , x_2 .

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $M = \frac{334}{75} \int_0^{\ln 2} h(x) dx$, όταν $\alpha = 8$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $h(0) = 2^{12}(e^0 - e^0) = 0$. Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 \text{ θα είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2^{12}(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-4x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\alpha x}) = 2^{12}(0-0) = 0. \text{ Άρα } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0.$$

β) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $h'(x) = 2^{12}(-4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x})$. Έχουμε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$-4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x} = 4e^{-4x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} = \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow (\alpha-4)x = \ln \frac{\alpha}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4} \quad (\text{είναι } \alpha > 4 \text{ άρα } \alpha-4 > 0).$$

$$\text{Ακόμη } h'(x) < 0 \Leftrightarrow -4e^{-4x} + \alpha e^{-\alpha x} < 0 \Leftrightarrow \alpha e^{-\alpha x} < 4e^{-4x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} > \frac{\alpha}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-4)x > \ln \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow x > \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4} \quad (\text{είναι } \alpha > 4 \text{ άρα } \alpha-4 > 0),$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}. \text{ Άρα η } h \text{ παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση } \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}, \text{ το}$$

$$h\left(\frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}\right) = 2^{12}\left(e^{-4 \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}} - e^{-\alpha \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}}\right) = 2^{12}\left[\left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{4}{\alpha-4}} - \left(\frac{4}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-4}}\right] \text{ και καθώς είναι}$$

γνησίως αύξουσα στο $[0, \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}]$ και γνησίως φθίνουσα στο $(\frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}, +\infty)$

παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0, το $h(0) = 0$ (είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = h(0) = 0$).

γ) Για κάθε $x \geq 0$ είναι $h''(x) = 2^{12} (16e^{-4x} - \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x})$ και έχουμε $h''(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 16e^{-4x} - \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} = 0 \Leftrightarrow 16e^{-4x} = \alpha^2 \cdot e^{-\alpha x} \Leftrightarrow e^{(\alpha-4)x} = \frac{\alpha^2}{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-4)x = \ln\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2 \Leftrightarrow (\alpha-4)x = 2\ln \frac{\alpha}{4} \Leftrightarrow x = 2 \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4} \quad (\alpha-4 > 0).$$

Είναι λοιπόν $x_1 = \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$ και $x_2 = 2 \frac{\ln \frac{\alpha}{4}}{\alpha-4}$ άρα προκύπτει η σχέση $x_2 = 2x_1$.

δ) Όταν $\alpha=8$ έχουμε $h(x) = 2^{12} (e^{-4x} - e^{-8x})$, $x \geq 0$. Επομένως :

$$M = \frac{334}{75} \int_0^{\ln 2} h(x) dx = \frac{334}{75} 2^{12} \int_0^{\ln 2} (e^{-4x} - e^{-8x}) dx = \frac{334}{75} 2^{12} \cdot \left[-\frac{e^{-4x}}{4} + \frac{e^{-8x}}{8} \right]_0^{\ln 2}$$

= 2004.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 1999

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση:
- $$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{-2x} - 2f(x)e^{-2x}, \quad g''(x) = f''(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} - 2f'(x)e^{-2x} + 4f(x)e^{-2x} = \\ &= e^{-2x}(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f''(x) > 4(f'(x) - f(x)) \Leftrightarrow f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) > 0 \text{ και επειδή } e^{-2x} > 0 \text{ θα είναι}$$
$$g''(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ συνεπώς η } g \text{ είναι κυρτή στο } \mathbb{R}.$$

β) Ισχύουν $f'(x_0) = 0$ (θεώρημα Fermat) και $f(x_0) = 0$. Επειδή $g(x) = f(x)e^{-2x}$ και $e^{-2x} > 0$ αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έτσι έχουμε:

- Για $x > x_0 \Rightarrow g'(x) > g'(x_0) \Rightarrow g'(x) > f'(x_0)e^{-2x_0} - 2f(x_0)e^{-2x_0} \Rightarrow g'(x) > 0$.
- Για $x < x_0 \Rightarrow g'(x) < g'(x_0) \Rightarrow g'(x) < f'(x_0)e^{-2x_0} - 2f(x_0)e^{-2x_0} \Rightarrow g'(x) < 0$.
- $g'(x_0) = f'(x_0)e^{-2x_0} - 2f(x_0)e^{-2x_0} = 0$.

Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση x_0 , το $g(x_0) = f(x_0)e^{-2x_0} = 0$, συνεπώς για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq g(x_0) \Rightarrow g(x) \geq 0$.

- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$, $t \in [1, 4]$ και $g(x) = \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt, x > 0$.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^4 f(t) dt$.

β) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ΛΥΣΗ

α) Η $f(t) = \frac{2t+3}{t+2}$ είναι συνεχής στο $[1, 4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα

$$I = \int_1^4 f(t) dt = \int_1^4 \frac{2t+3}{t+2} dt = \int_1^4 \frac{2(t+2)-1}{t+2} dt = \int_1^4 \left(2 - \frac{1}{t+2}\right) dt = [2t - \ln(t+2)]_1^4 = \\ = (8 - \ln 6) - (2 - \ln 3) = 6 - (\ln 6 - \ln 3) = 6 - \ln 2.$$

β) Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$ έχουμε $1 \leq t \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \leq \frac{t}{x^2} \leq \frac{4}{x^2} \Rightarrow e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}}.$

γ) Για κάθε $t \in [1, 4]$ και $x > 0$ είναι $f(t) = \frac{2t+3}{t+2} > 0$, $\frac{x+2}{x+1} > 0$ και από την σχέση

$$e^{\frac{1}{x^2}} \leq e^{\frac{t}{x^2}} \leq e^{\frac{4}{x^2}} \text{ παίρνουμε } f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} \leq f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} \leq f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} - f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} \geq 0 \quad (1) \text{ και } f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} - f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} \geq 0 \quad (2).$$

Λόγω της (1) προκύπτει $\int_1^4 \left(f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} - f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}}\right) dt \geq 0 \Rightarrow$

$$\int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt \geq \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} dt \Rightarrow \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt \geq \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} \int_1^4 f(t) dt$$

$\Rightarrow g(x) \geq \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} (6 - \ln 2) \quad (3).$ Λόγω της (2) προκύπτει

$$\int_1^4 \left(f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} - f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}}\right) dt \geq 0 \Rightarrow \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} dt \geq \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} \int_1^4 f(t) dt \geq \int_1^4 f(t) \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{t}{x^2}} dt \Rightarrow \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} (6 - \ln 2) \geq g(x) \quad (4).$$

Από τις (3) και (4) παίρνουμε $\frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} (6 - \ln 2) \leq g(x) \leq \frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} (6 - \ln 2).$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} e^{\frac{1}{x^2}} (6 - \ln 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (6 - \ln 2) = 1 \cdot e^0 \cdot (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x+1} e^{\frac{4}{x^2}} (6 - \ln 2) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x+1} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{4}{x^2}} \cdot (6 - \ln 2) = 1 \cdot e^0 \cdot (6 - \ln 2) = 6 - \ln 2,$$

άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 6 - \ln 2.$

3) Έστω $h : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση

$$h(x) = 1999(x-1) + \int_1^x \frac{h(t)}{t} dt, \text{ για κάθε } x \geq 1. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

α) $h(x) = 1999x \ln x, x \geq 1$.

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \geq 1$ η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων

$$\text{και είναι } h'(x) = 1999 + \frac{h(x)}{x} \Leftrightarrow h'(x) - \frac{h(x)}{x} = 1999 \Leftrightarrow \frac{1}{x} h'(x) - \frac{1}{x} \frac{h(x)}{x} = \frac{1}{x} 1999$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} h'(x) + \left(\frac{1}{x}\right)' h(x) = \frac{1}{x} 1999 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{x} h(x)\right)' = (1999 \ln x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} h(x) = 1999 \ln x + c \quad (1), \text{ όπου } c \text{ πραγματική σταθερά. Παρατηρούμε ότι}$$

$$h(1) = 1999(1-1) + \int_1^1 \frac{h(t)}{t} dt = 0+0 = 0, \text{ οπότε από την (1) για } x=1 \text{ παίρνουμε}$$

$$\frac{1}{1} h(1) = 1999 \ln 1 + c \Leftrightarrow 0 = 0 + c \Leftrightarrow c = 0. \text{ Η (1) γράφεται : } \frac{1}{x} h(x) = 1999 \ln x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(x) = 1999x \ln x, \quad x \geq 1.$$

β) Για κάθε $x \geq 1$ είναι $h'(x) = (1999x)' \ln x + 1999x(\ln x)' = 1999 \ln x + 1999 > 0$ (αφού για $x \geq 1$ είναι $\ln x \geq 0$). Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

4) α) Να αποδείξετε ότι : $\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}$, για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει :

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5}, x \geq 0$. Είναι :

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 + x = \frac{x^2}{x+1} > 0 \text{ για } x > 0 \text{ και επειδή η } h \text{ είναι συνεχής στο } [0, +\infty)$$

προκύπτει ότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Έτσι για κάθε $x \geq 0$ είναι :

$$h(x) \geq h(0) \Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \geq \ln 1 - 0 + 0 + \frac{1}{5} \Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \geq \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} > 0 \Rightarrow \ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}.$$

β) Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας και παίρνουμε :

$$5[f(x)]^4 f'(x) + 6[f(x)]^2 f'(x) + 3f'(x) = \ln(x+1) + 1 - \frac{4}{5} - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

$$f'(x)(5[f(x)]^4 + 6[f(x)]^2 + 3) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{5} \quad (*) , \quad x \geq 0.$$

Η παράσταση $5[f(x)]^4 + 6[f(x)]^2 + 3$ έχει θετικό πρόσημο για κάθε $x \geq 0$ ως άθροισμα δύο μη αρνητικών και ενός θετικού αριθμού. Το 2^ο μέλος έχει θετικό πρόσημο για κάθε $x \geq 0$ λόγω του (α) και συνεπώς από την (*) προκύπτει $f'(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu^2(ax)$, $x \in \mathbb{R}$ και $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή του a ώστε να ισχύει $f''(x) + 4a^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΛΥΣΗ

$$\begin{aligned} \text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } f'(x) &= 2\eta\mu(ax)(\eta\mu(ax))' = 2\eta\mu(ax)\sigma\upsilon\nu(ax)(ax)' = \\ &= 2a \cdot \eta\mu(ax)\sigma\upsilon\nu(ax), \quad f''(x) = [2a \cdot \eta\mu(ax)]' \sigma\upsilon\nu(ax) + 2a \cdot \eta\mu(ax)[\sigma\upsilon\nu(ax)]' = \\ &= 2a^2 \sigma\upsilon\nu(ax)\sigma\upsilon\nu(ax) - 2a^2 \cdot \eta\mu(ax)\eta\mu(ax) = 2a^2 \sigma\upsilon\nu^2(ax) - 2a^2 \eta\mu^2(ax). \end{aligned}$$

Έτσι για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) + 4a^2 f(x) &= 2 \Leftrightarrow 2a^2 \sigma\upsilon\nu^2(ax) - 2a^2 \eta\mu^2(ax) + 4a^2 \eta\mu^2(ax) = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a^2 \sigma\upsilon\nu^2(ax) + 2a^2 \eta\mu^2(ax) = 2 \Leftrightarrow 2a^2 (\sigma\upsilon\nu^2(ax) + \eta\mu^2(ax)) = 2 \Leftrightarrow 2a^2 \cdot 1 = 2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1 \text{ ή } a = -1. \end{aligned}$$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι

$$f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [1, 3].$$

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$.

ΛΥΣΗ

- α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$
 $\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$. Το πρόσημο της $f'(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$			
$f'(x)$	+		0		-		0		+	
$f(x)$										

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1, 3]$. Λόγω της μονοτονίας της f στο $[1, 3]$ έχουμε : $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow f(1) \geq f(x) \geq f(3) \Rightarrow f(x) \geq 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 \Rightarrow f(x) \geq 1$. Συνεπώς θα είναι και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$.

- β) Για κάθε $x \in [1, 3]$ η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική και ισχύει $f(x) > 0$.

$$\text{Άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (x^3 - 6x^2 + 9x + 1) dx =$$

$$\left[\frac{x^4}{4} - 2x^3 + 9 \frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = 6 \text{ τ.μ.}$$

- 7) Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\frac{f(2)}{2} = \frac{f(1)}{1}. \text{ Να αποδείξετε ότι η εξίσωση } xf'(x) - f(x) = 0 \text{ έχει μία τουλάχιστον}$$

ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \in [1, 2]$ η οποία είναι συνεχής στο

$[1, 2]$ ως πηλίκo συνεχών συναρτήσεων (η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής) και παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$ ως πηλίκo παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)(x)'}{x^2} = \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2}. \text{ Ακόμη } h(1) = \frac{f(1)}{1} = \frac{f(2)}{2} = h(2).$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$ η εξίσωση

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{f'(x) \cdot x - f(x)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 0.$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2000

1) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει

$f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$. Αν $f(0) = 2$ και $f(1) = 4$, να δείξετε ότι :

α) η ευθεία $y = 3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

β) υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_1) = \frac{f(\frac{1}{5}) + f(\frac{2}{5}) + f(\frac{3}{5}) + f(\frac{4}{5})}{4}$

γ) υπάρχει $x_2 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

ΛΥΣΗ

α) Οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας $y = 3$ και της C_f βρίσκονται αν λύσουμε την εξίσωση $f(x) = 3 \Leftrightarrow f(x) - 3 = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 3$, $x \in [0, 1]$. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ άρα θα είναι και συνεχής σε αυτό. Επειδή η h είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων) και $h(0)h(1) = (f(0) - 3)(f(1) - 3) = (2 - 3)(4 - 3) = -1 < 0$, σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$. Ακόμη έχουμε $h'(x) = f'(x) - 3 = f'(x) > 0$, $x \in (0, 1)$. Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$ συνεπώς η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$. Επομένως το $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$ είναι μοναδικό.

β) Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, 1)$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$. Άρα έχουμε :

$$0 < \frac{1}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{1}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) < 4,$$

$$0 < \frac{2}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{2}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{2}{5}\right) < 4,$$

$$0 < \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{3}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{3}{5}\right) < 4,$$

$$0 < \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(\frac{4}{5}\right) < f(1) \Rightarrow 2 < f\left(\frac{4}{5}\right) < 4. \text{ Άρα θα έχουμε :}$$

$$2 + 2 + 2 + 2 < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 4 + 4 + 4 + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8 < f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right) < 16 \quad (1).$$

$$\text{Θεωρούμε τη συνάρτηση } g(x) = f(x) - \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}, \quad x \in [0, 1].$$

Η g είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη είναι :

$$g(0) = 2 - \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} = \frac{8 - [f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)]}{4} \stackrel{(1)}{<} 0,$$

$$g(1) = 4 - \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} = \frac{16 - [f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)]}{4} \stackrel{(1)}{>} 0,$$

δηλαδή $g(0)g(1) < 0$. Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_1 \in (0, 1)$, τέτοιο

$$\text{ώστε } g(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) - \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$. Σύμφωνα με το

θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_2) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 4 - 2 = 2. \text{ Η εφαπτομένη της } C_f \text{ στο } M \text{ έχει τον ίδιο συντελεστή}$$

διεύθυνσης με την ευθεία $y = 2x + 2000$ (τον αριθμό 2) άρα είναι παράλληλες.

2) Τη χρονική στιγμή $t = 0$ χορηγείται σ' έναν ασθενή ένα φάρμακο. Η συγκέντρωση

$$\text{του φαρμάκου στο αίμα του ασθενούς δίνεται από τη συνάρτηση } f(t) = \frac{\alpha t}{1 + \left(\frac{t}{\beta}\right)^2},$$

$t \geq 0$, όπου α και β είναι σταθεροί θετικοί πραγματικοί αριθμοί και ο χρόνος t μετράται σε ώρες. Η μέγιστη τιμή της συγκέντρωσης είναι ίση με 15 μονάδες και επιτυγχάνεται 6 ώρες μετά τη χορήγηση του φαρμάκου.

α) Να βρείτε τις τιμές των σταθερών α και β .

β) Με δεδομένο ότι η δράση του φαρμάκου είναι αποτελεσματική, όταν η τιμή της συγκέντρωσης είναι τουλάχιστον ίση με 12 μονάδες, να βρείτε το χρονικό διάστημα που το φάρμακο δρα αποτελεσματικά.

ΛΥΣΗ

- α) Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση 6 το 15 και είναι παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ θα έχουμε $f'(6) = 0$ και $f(6) = 15$. Για κάθε $t \geq 0$ έχουμε :

$$f(t) = \frac{\beta^2 \alpha t}{\beta^2 + t^2} \text{ και } f'(t) = \beta^2 \alpha \cdot \left(\frac{t}{\beta^2 + t^2} \right)' = \beta^2 \alpha \cdot \frac{(t)'(\beta^2 + t^2) - t(\beta^2 + t^2)'}{(\beta^2 + t^2)^2} =$$
$$= \beta^2 \alpha \cdot \frac{\beta^2 + t^2 - 2t^2}{(\beta^2 + t^2)^2} = \beta^2 \alpha \cdot \frac{\beta^2 - t^2}{(\beta^2 + t^2)^2} . \text{ Επομένως (} \alpha \text{ και } \beta \text{ θετικοί αριθμοί) :}$$

$$f'(6) = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2 - 6^2}{(\beta^2 + 6^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \beta = 6 , \quad f(6) = 15 \Leftrightarrow \frac{36\alpha \cdot 6}{36 + 36} = 15 \Leftrightarrow \alpha = 5 .$$

- β) Είναι (για $\alpha = 5$ και $\beta = 6$) $f(t) = \frac{\beta^2 \alpha t}{\beta^2 + t^2} = \frac{180t}{36 + t^2} , t \geq 0$. Η δράση του φαρμάκου

$$\text{είναι αποτελεσματική , όταν } f(t) \geq 12 \Leftrightarrow \frac{180t}{36 + t^2} \geq 12 \Leftrightarrow t^2 - 15t + 36 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [3, 12]$$

3) Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16 & , 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x} & , x \geq 5 \end{cases}$

- α) Να βρεθούν τα $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$.

- β) Να βρεθούν τα α , $\beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

- γ) Για τις τιμές των α , β του ερωτήματος (β) να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ΛΥΣΗ

α) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} (x^2 - 8x + 16) = 25 - 40 + 16 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} [(\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}] =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2) \lim_{x \rightarrow 5^+} \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1) \lim_{x \rightarrow 5^+} e^{5-x} \stackrel{5-x=t}{=} \lim_{x-5+e=u} e^t =$$

$$= (\alpha^2 + \beta^2) \lim_{u \rightarrow e^+} \ln u + 2(\alpha + 1) \lim_{t \rightarrow 0^-} e^t = (\alpha^2 + \beta^2) \ln e + 2(\alpha + 1)e^0 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 .$$

- β) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = f(5) \Leftrightarrow$

$$1 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 2 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)^2 + \beta^2 = 0 \quad (*)$$

Από την (*), επειδή οι αριθμοί $(\alpha+1)^2$, β^2 είναι μη αρνητικοί, προκύπτει

ισοδύναμα ότι $(\alpha+1)^2 = 0$ και $\beta^2 = 0$, δηλαδή ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

γ) Για κάθε $x \geq 5$ και για $\alpha = -1$, $\beta = 0$ είναι $f(x) = \ln(x-5+e)$. Άρα έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-5+e) \stackrel{x-5+e=w}{=} \lim_{w \rightarrow +\infty} \ln w = +\infty.$$

4) Φάρμακο χορηγείται σε ασθενή για πρώτη φορά. Έστω $f(t)$ η συνάρτηση που περιγράφει τη συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό του ασθενούς μετά από χρόνο t από τη χορήγησή του, όπου $t \geq 0$. Αν ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$

$$\text{είναι } \frac{8}{t+1} - 2 :$$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f(t)$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή t , μετά τη χορήγηση του φαρμάκου, η συγκέντρωσή του στον οργανισμό γίνεται μέγιστη;

γ) Να δείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό, ενώ πριν τη χρονική στιγμή $t = 10$ η επίδρασή του στον οργανισμό έχει μηδενιστεί. (Δίνεται ότι $\ln 11 \cong 2,4$)

ΛΥΣΗ

$$\alpha) \text{ Για κάθε } t \geq 0 \text{ είναι } f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 \Leftrightarrow f'(t) = (8 \cdot \ln(t+1) - 2t)' \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow f(t) = 8 \cdot \ln(t+1) - 2t + c$, όπου c πραγματική σταθερά. Επειδή τη χρονική στιγμή $t = 0$ δεν υπάρχει συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό θα είναι $f(0) = 0 \Leftrightarrow 8 \cdot \ln(0+1) - 2 \cdot 0 + c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Άρα $f(t) = 8 \cdot \ln(t+1) - 2t$, $t \geq 0$.

$$\beta) \text{ Για κάθε } t \geq 0 \text{ είναι } f'(t) = \frac{8}{t+1} - 2 = \frac{-2(t-3)}{t+1}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 3,$$

$f'(t) > 0 \Leftrightarrow t \in [0, 3)$ και $f'(t) < 0 \Leftrightarrow t > 3$. Άρα η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στη θέση 3 το $f(3)$, επομένως η συγκέντρωση του φαρμάκου στον οργανισμό γίνεται μέγιστη τη χρονική στιγμή $t = 3$.

$$\gamma) f(8) = 8 \cdot \ln(8+1) - 2 \cdot 8 = 8(\ln 9 - 2) = 8(\ln 3^2 - 2) = 16(\ln 3 - 1) > 0, \text{ διότι } 3 > e \Rightarrow$$

$\ln 3 > \ln e \Rightarrow \ln 3 > 1$. Άρα κατά τη χρονική στιγμή $t = 8$ υπάρχει ακόμα επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό.

$$f(10) = 8 \cdot \ln(10+1) - 2 \cdot 10 = 8 \cdot \ln 11 - 20 \cong 8 \cdot 2,4 - 20 = -0,8 < 0.$$

Η f είναι συνεχής στο $[8, 10]$ και $f(8)f(10) < 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (8, 10)$ τέτοια ώστε $f(t_0) = 0$, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_0 η επίδραση του φαρμάκου στον οργανισμό έχει μηδενιστεί.

5) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$. Έστω $I: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$I(x) = \int_0^1 [(f(t))^2 - 2xt^2 f(t) + x^2 t^4] dt, \text{ για } x \in \mathbb{R}. \text{ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση}$$

$$I \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο } x_0 = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

ΛΥΣΗ

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ είναι } I(x) = \int_0^1 (f(t))^2 dt - 2x \int_0^1 t^2 f(t) dt + x^2 \int_0^1 t^4 dt \text{ και}$$

$$\begin{aligned} I'(x) &= \left(\int_0^1 (f(t))^2 dt \right)' - 2 \int_0^1 t^2 f(t) dt \cdot (x)' + \int_0^1 t^4 dt \cdot (x^2)' = 0 - 2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + 2 \int_0^1 t^4 dt \cdot x = \\ &= -2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + 2 \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 \cdot x = -2 \int_0^1 t^2 f(t) dt + \frac{2}{5} x. \text{ Έχουμε} \end{aligned}$$

$$I'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt, \quad I'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt \text{ και}$$

$$I'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt. \text{ Άρα η συνάρτηση } I \text{ παρουσιάζει ελάχιστο στο}$$

$$\text{σημείο } x_0 = 5 \int_0^1 t^2 f(t) dt.$$

6) Έστω η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(x) = 2000 + |\ln(x-1)|$. Έστω c

πραγματικός μεγαλύτερος του 2000. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα A και B . Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα A και B , είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

Επειδή $\ln(x-1) > 0 \Leftrightarrow x-1 > 1 \Leftrightarrow x > 2$, ο τύπος της f χωρίς απόλυτη τιμή γράφεται

$$f(x) = \begin{cases} 2000 + \ln(x-1), & x \geq 2 \\ 2000 - \ln(x-1), & 1 < x < 2. \end{cases}$$

Οι τετμημένες των κοινών σημείων της ευθείας $y = c$ και της C_f βρίσκονται από τη

$$\text{λύση της εξίσωσης } f(x) = c \Leftrightarrow 2000 + |\ln(x-1)| = c \Leftrightarrow |\ln(x-1)| = c - 2000 \stackrel{c > 2000}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \ln(x-1) = c - 2000 \text{ ή } \ln(x-1) = -(c - 2000)$$

$$\Leftrightarrow x = e^{c-2000} + 1 \text{ ή } x = e^{-(c-2000)} + 1. \text{ Έστω } x_1 = e^{c-2000} + 1, x_2 = e^{-(c-2000)} + 1.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω ότι $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$. Για να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες της C_f στα A και B είναι κάθετες μεταξύ τους, αρκεί να δείξουμε ότι $f'(x_1)f'(x_2) = -1$.

$$\text{Για } x > 2 \text{ έχουμε } f'(x) = \frac{1}{x-1} \text{ και για } 1 < x < 2 \text{ έχουμε } f'(x) = -\frac{1}{x-1}.$$

Επειδή $c > 2000$ είναι $c - 2000 > 0 \Rightarrow e^{c-2000} > 1$ και $e^{-(c-2000)} < 1$, οπότε $x_1 > 2$ και $1 < x_2 < 2$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } f'(x_1)f'(x_2) &= \frac{1}{e^{c-2000} + 1 - 1} \cdot \left(-\frac{1}{e^{-(c-2000)} + 1 - 1}\right) = \frac{1}{e^{c-2000}} \cdot \frac{-1}{e^{-(c-2000)}} = \\ &= \frac{-1}{e^0} = -1. \end{aligned}$$

7) Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$, για $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \rightarrow +\infty$.

ΛΥΣΗ

α) Από την $f(x) - g(x) = x - 4$ παίρνουμε $g(x) = f(x) - x + 4$, για $x \in \mathbb{R}$. Επειδή η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , καθώς

$x \rightarrow +\infty$, θα έχουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) = -7$. Έτσι είναι :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x + 4}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - 1 + \frac{4}{x} \right) = 3 - 1 + 0 = 2. \text{ Ακόμη :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x) + 3x + \eta\mu 2x}{xf(x) - 3x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{g(x)}{x} + 3 + \frac{\eta\mu 2x}{x}}{(f(x) - 3x) + \frac{1}{x}} = \frac{2 + 3 + 0}{-7 + 0} = -\frac{5}{7}, \text{ διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0 \text{ (για κάθε } x > 0 : -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \frac{1}{x} \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\text{άρα θα είναι και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 0 \text{) .}$$

β) Για να δείξουμε ότι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g , καθώς $x \rightarrow +\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = -3. \text{ Η ισότητα } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 2 \text{ έχει αποδειχθεί στο (α) . Έχουμε :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x + 4 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x) + 4 = -7 + 4 = -3 \text{ και}$$

συνεπώς το ζητούμενο έχει αποδειχθεί .

8) Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε :

$$2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ με } f(0) = 1.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $2xf(x) + (x^2+1)f'(x) = e^x \Leftrightarrow (x^2+1)'f(x) + (x^2+1)f'(x) = (e^x)'$
 $\Leftrightarrow [(x^2+1)f(x)]' = (e^x)' \Leftrightarrow (x^2+1)f(x) = e^x + c$ (1), όπου c πραγματική σταθερά.

Όμως $f(0) = 1$ και η (1) για $x = 0$ γράφεται $(0^2+1)f(0) = e^0 + c \Leftrightarrow 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = 0$.

Έτσι από την (1) προκύπτει ότι $(x^2+1)f(x) = e^x \Leftrightarrow f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{(e^x)'(x^2+1) - e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} =$
 $= \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$, με το $=$ να ισχύει μόνο για $x = 1$. Συνεπώς η f είναι γνησίως

αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

9) Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\int_0^3 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx$.

β) Έστω ότι $4 \int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(x)dx + 2004$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = 334$.

ΛΥΣΗ

α) Για το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f(2x+1)dx$, θέτουμε $2x+1 = u$ και έχουμε :

$$x = \frac{1}{2}(u-1) \Rightarrow dx = \frac{1}{2} du. \text{ Για } x = 0 \text{ παίρνουμε } u = 1 \text{ ενώ για } x = 3 \text{ παίρνουμε } u = 7.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \int_0^3 f(2x+1)dx = \int_1^7 f(u) \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_1^7 f(u)du = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x)dx.$$

β) Η δοθείσα ισότητα λόγω του (α) γράφεται $4 \frac{1}{2} \int_1^7 f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx + 2004 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int_1^7 f(x) dx = 2004 .$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_1^x f(u) du - 334x$, $x \in [1, 7]$. Η g είναι συνεχής

στο $[1, 7]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $(1, 7)$ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x) = f(x) - 334$. Ακόμη είναι :

$$g(1) = \int_1^1 f(u) du - 334 \cdot 1 = -334, \quad g(7) = \int_1^7 f(u) du - 334 \cdot 7 = 2004 - 2338 = -334,$$

δηλαδή $g(1) = g(7)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 7)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - 334 = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = 334$.

10) Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την ισότητα :

$$\int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2 + \int_0^1 6x(t^2+t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

ΛΥΣΗ

α) Η δοθείσα ισότητα γράφεται $\int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2 + x \int_0^1 (6t^2 + 6t) dt \Leftrightarrow$

$$\int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2 + x \cdot [2t^3 + 3t^2]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2 + x \cdot (5 - 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x (1+t^2) f(t) dt = x^2 + 5x \quad (1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της (1) και

$$\text{έχουμε } (1+x^2)f(x) = 2x+5 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x+5}{x^2+1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = \frac{2(x^2+1) - (2x+5)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2 - 10x + 2}{(x^2+1)^2}$ και $f'(0) = 2$

ενώ $f(0) = 5$. Η ζητούμενη εξίσωση είναι : $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Leftrightarrow y = 2x+5$.

11) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + f(y) = 0$ με $x, y \in \mathbb{R}$, παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα $x'x$.

ΛΥΣΗ

α) Η εξίσωση $f(x) + f(y) = 0$ γράφεται: $x^2 - 4x + 3 + y^2 - 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y = -6 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 = -6 + 4 + 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-2)^2 = 2, \text{ η οποία είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο } K(2, 2) \text{ και}$$

$$\text{ακτίνα } \rho = \sqrt{2}.$$

β) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3$. Επειδή η f είναι συνεχής στο $[1, 3]$ και $f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$ το ζητούμενο εμβαδό είναι:

$$E = \int_1^3 -f(x)dx = \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x\right]_1^3 = \frac{4}{3} \text{ τ.μ.}$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2001

1) Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο : $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

α) Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -\frac{1}{9}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

ΛΥΣΗ

α) Αν η f είναι συνεχής θα είναι συνεχής και στο 3, άρα $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$.

$$\text{Είναι } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1-e^{x-3}}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(1-e^{x-3})'}{(x-3)'} = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-e^{x-3}) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (ax^2) = 9a, f(3) = 9a. \text{ Άρα } 9a = -1 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{9}.$$

β) Για $x > 3$ είναι :

$$f'(x) = \frac{(1-e^{x-3})'(x-3) - (1-e^{x-3})(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-e^{x-3}(x-3) - (1-e^{x-3})}{(x-3)^2}, \text{ επομένως}$$

$$f'(4) = \frac{-e \cdot 1 - (1-e)}{1} = -1. \text{ Ακόμη είναι } f(4) = \frac{1-e^{4-3}}{4-3} = 1-e. \text{ Η εξίσωση της}$$

εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(4, f(4))$ είναι : $y - f(4) = f'(4)(x - 4) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y - (1-e) = -1(x-4) \Leftrightarrow y = -x+5-e.$$

γ) Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_1^2 |f(x)| dx =$

$$= \int_1^2 |a|x^2 dx = |a| \int_1^2 x^2 dx = |a| \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{7}{3} |a|.$$

- 2) Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι : $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.
- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα .
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα .
- γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

- α) Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της δοθείσας ισότητας και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε :

$$3f^2(x)f'(x) + 2\beta f(x)f'(x) + \gamma f'(x) = 3x^2 - 4x + 6 \Leftrightarrow$$

$$f'(x)(3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma) = 3x^2 - 4x + 6 \quad (1) \quad .$$

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στη θέση $\xi \in \mathbb{R}$. Τότε επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα είναι $f'(\xi) = 0$.

Η (1) για $x = \xi$ δίνει $0 = 3\xi^2 - 4\xi + 6$, που είναι άτοπο αφού το τριώνυμο

$$3x^2 - 4x + 6 \text{ δεν έχει ρίζες στο } \mathbb{R} \quad (\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -56 < 0) \quad .$$

- β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $3x^2 - 4x + 6 > 0$, αφού $\Delta = -56 < 0$ και $3 > 0$. Ακόμη

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $3f^2(x) + 2\beta f(x) + \gamma > 0$, αφού $\Delta' = (2\beta)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \gamma = 4(\beta^2 - 3\gamma) < 0$ και $3 > 0$ (είναι $\beta^2 < 3\gamma$). Έτσι από την (1) προκύπτει ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- γ) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αφού είναι παραγωγίσιμη σε αυτό.

Η δοθείσα ισότητα για $x = 0$ και $x = 1$ δίνει αντίστοιχα :

$$f^3(0) + \beta f^2(0) + \gamma f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0)(f^2(0) + \beta f(0) + \gamma) = -1 \quad (2) \text{ και}$$

$$f^3(1) + \beta f^2(1) + \gamma f(1) = 4 \Leftrightarrow f(1)(f^2(1) + \beta f(1) + \gamma) = 4 \quad (3) \quad .$$

Θεωρούμε το τριώνυμο $P(x) = x^2 + \beta x + \gamma$. Επειδή $\Delta'' = \beta^2 - 4\gamma < \beta^2 - 3\gamma < 0$ και

$1 > 0$ θα είναι $P(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (είναι $0 \leq \beta^2 < 3\gamma \Rightarrow 3\gamma > 0 \Rightarrow \gamma > 0$). Άρα

θα είναι $f^2(0) + \beta f(0) + \gamma > 0$ και $f^2(1) + \beta f(1) + \gamma > 0$. Συνεπώς από τις (2) και (3)

προκύπτει $f(0) < 0$ και $f(1) > 0$ άρα $f(0)f(1) < 0$, επομένως σύμφωνα με το

θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $(0, 1)$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό. Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$.

3) Έστω μια πραγματική συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις :

i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω ακόμη g η συνάρτηση

που ορίζεται από τον τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2xf^2(x)$

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt) dt = 1 - 2 \int_0^1 (xt) f^2(xt) x dt$.

Έστω $I = \int_0^1 (xt) f^2(xt) x dt$. Θέτουμε $xt = u \Rightarrow du = x dt$. Για $t = 0$ παίρνουμε $u = 0$

ενώ για $t = 1$ παίρνουμε $u = x$. Έτσι $I = \int_0^x u f^2(u) du$ και $f(x) = 1 - 2 \int_0^x u f^2(u) du$ (1),

$x \in \mathbb{R}$. Από την (1) έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = -2xf^2(x)$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)} - 2x = -\frac{-2xf^2(x)}{f^2(x)} - 2x = 2x - 2x = 0$.

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

γ) Έστω $g(x) = c$, όπου c σταθερά. Τότε $\frac{1}{f(x)} - x^2 = c$ (2), $x \in \mathbb{R}$. Από την (1)

έχουμε $f(0) = 1 - 2 \int_0^0 u f^2(u) du = 1$ και η (2) για $x = 0$ δίνει $1 - 0 = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα

η (2) γράφεται : $\frac{1}{f(x)} - x^2 = 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (xf(x)\eta\mu 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\eta\mu 2x}{1+x^2} = 0$, αφού για $x > 0$: $\frac{-x}{1+x^2} \leq \frac{x\eta\mu 2x}{1+x^2} \leq \frac{x}{1+x^2}$

και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

4) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$.

- α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f .

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x > 0$ είναι $f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ και

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Επειδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία μόνο λύση, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

β) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}}$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x(2 \ln x + 1) > 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} 2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$$\ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}}, f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-\frac{1}{2}}. \text{ Η } f \text{ λοιπόν παρουσιάζει στη}$$

θέση $e^{-\frac{1}{2}}$ τοπικό ελάχιστο, συνεπώς $x_0 = e^{-\frac{1}{2}}$. Έχουμε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1$. Η f είναι συνεχής στο $[e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ και για κάθε $x \in [e^{-\frac{1}{2}}, 1]$ είναι $x^2 \ln x \leq 0$,

$$\text{άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι } E = \int_{x_0}^1 -f(x) dx = - \int_{x_0}^1 x^2 \ln x dx = - \int_{x_0}^1 \left(\frac{x^3}{3}\right)' \ln x dx =$$

$$= - \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{x_0}^1 + \int_{x_0}^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = - \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{x_0}^1 + \int_{x_0}^1 \frac{x^2}{3} dx = - \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{x_0}^1 + \left[\frac{x^3}{9} \right]_{x_0}^1 =$$

$$= - \left(0 - \frac{1}{3} x_0^3 \ln x_0 \right) + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} x_0^3 = \frac{1}{3} x_0^3 \ln e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} x_0^3 = -\frac{1}{6} x_0^3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{9} x_0^3 =$$

$$= \frac{1}{9} - \frac{5}{18} e^{-\frac{3}{2}} \text{ τ.μ.}$$

5) Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη είναι $g(\alpha) = f(\alpha) - 2\alpha = 2(\beta - \alpha) > 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - 2\beta = -2(\beta - \alpha) < 0$, αφού $\beta > \alpha$. Άρα $g(\alpha)g(\beta) < 0$, επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2x$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα $\gamma \in (\alpha, \beta)$.

β) Είναι $f(\gamma) = 2\gamma$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \gamma]$ και παραγωγίσιμη στο (α, γ) οπότε σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\alpha, \gamma) \subset (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = 2 \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$.

Επειδή η f είναι συνεχής στο $[\gamma, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (γ, β) , σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\gamma, \beta) \subset (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} = 2 \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} = 2 \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta}.$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια

$$\text{ώστε } f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 2 \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha} 2 \frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} = 4.$$

6) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 \sin 2\alpha + 2x \sin^2 2\alpha + \eta \mu^2 2\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

ΛΥΣΗ

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = 3x^2 - 6x \sin 2\alpha + 2 \sin^2 2\alpha$ και $f''(x) = 6x - 6 \sin 2\alpha$.

Έχουμε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 \sin 2\alpha = 0 \Leftrightarrow x = \sin 2\alpha$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \sin 2\alpha$,

$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < \sin 2\alpha$. Άρα για οποιαδήποτε τιμή του α η C_f έχει ένα μόνο σημείο καμπής, το $A(\sin 2\alpha, f(\sin 2\alpha))$. Όμως:

$$f(\sin 2\alpha) = \sin^3 2\alpha - 3 \sin^3 2\alpha + 2 \sin^3 2\alpha + \eta \mu^2 2\alpha = \eta \mu^2 2\alpha, \text{ οπότε } A(\sin 2\alpha, \eta \mu^2 2\alpha).$$

Έστω $A(x, y)$. Τότε $x = \sin 2\alpha$ και $y = \eta \mu^2 2\alpha = 1 - \sin^2 2\alpha = 1 - x^2$.

Οι συντεταγμένες του A επαληθεύουν την εξίσωση $y = 1 - x^2$, που είναι εξίσωση παραβολής, άρα το A ανήκει σε παραβολή (για τις διάφορες τιμές του α).

7) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει :

$$\int_0^x f(t) dt \geq xe^{-x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της}$$

γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(t) dt - xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $g(0) = 0$,

$$\text{οπότε για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε } \int_0^x f(t) dt \geq xe^{-x} \Rightarrow \int_0^x f(t) dt - xe^{-x} \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq g(0).$$

Επομένως το $g(0) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο της g και επειδή η g είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ (διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων), σύμφωνα με

το θεώρημα Fermat θα είναι $g'(0) = 0$ (1). Έχουμε $g'(x) = f(x) - e^{-x} + xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$,

(1)

άρα $g'(0) = f(0) - 1 + 0 \Rightarrow 0 = f(0) - 1 \Rightarrow f(0) = 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ είναι :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = 1(x - 0) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

8) Να αποδείξετε ότι :

α) Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu 2x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα.

β) Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 3x^2 + 2 - 2\sigma\upsilon\nu 2x = 3x^2 + 2(1 - \sigma\upsilon\nu 2x) \geq 0$, αφού

$\sigma\upsilon\nu 2x \leq 1$ και $x^2 \geq 0$. Το $=$ ισχύει μόνο όταν είναι συγχρόνως : $x^2 = 0$ και

$1 - \sigma\upsilon\nu 2x = 0$, το οποίο συμβαίνει μόνο για $x = 0$. Επομένως η f είναι

γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu 2x$ είναι ισοδύναμη με την $f(x) = 0$. Αρκεί να δείξουμε

ότι η $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, 1)$. Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως

άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $f(0)f(1) = (-1)(2 - \eta\mu 2) < 0$ αφού $\eta\mu 2 < 2$.

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1) \subset \mathbb{R}$, η $f(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία

ρίζα στο $(0, 1)$. Άρα τελικά η $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0, 1)$.

9) Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_a^\beta f'(x)e^{f(x)} dx = 0, \text{ όπου } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha < \beta. \text{ Να αποδείξετε ότι :}$$

α) $f(\alpha) = f(\beta)$.

β) Η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $\int_a^\beta f'(x)e^{f(x)} dx = 0 \Rightarrow [e^{f(x)}]_a^\beta = 0 \Rightarrow e^{f(\beta)} - e^{f(\alpha)} = 0 \Rightarrow e^{f(\beta)} = e^{f(\alpha)}$

$$\Rightarrow f(\alpha) = f(\beta).$$

β) Η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (ως παραγωγίσιμη σε αυτό), παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = f(\beta)$. Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β) .

10) Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{4}{x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = \lambda$, $x = \lambda + 1$,

$$\text{όπου } \lambda > 0, \text{ είναι } E(\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

β) Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν $E(\lambda)$ γίνεται ελάχιστο.

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι συνεχής στο $[\lambda, \lambda + 1]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και για κάθε

$$x \in [\lambda, \lambda + 1] \text{ είναι } f(x) > 0. \text{ Άρα } E(\lambda) = \int_\lambda^{\lambda+1} f(x) dx = \int_\lambda^{\lambda+1} \left(2x + \frac{4}{x}\right) dx =$$

$$= \left[x^2 + 4\ln x\right]_\lambda^{\lambda+1} = (\lambda+1)^2 + 4\ln(\lambda+1) - (\lambda^2 + 4\ln\lambda) =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda + 1 - \lambda^2 + 4(\ln(\lambda+1) - \ln\lambda) = 2\lambda + 1 + 4\ln\frac{\lambda+1}{\lambda} = 2\lambda + 1 + 4\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right).$$

β) Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $E'(\lambda) = 2 + 4 \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)' = 2 + 4 \frac{1}{1 + \frac{1}{\lambda}} \left(-\frac{1}{\lambda^2}\right) =$

$$= 2 - 4 \frac{1}{\lambda^2 + \lambda} = \frac{2(\lambda^2 + \lambda - 2)}{\lambda^2 + \lambda}. \text{ Είναι } E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -2 \text{ (απορρίπτεται αφού } \lambda > 0).$$

Ακόμη $E'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda - 2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 1$, $E'(\lambda) < 0 \Leftrightarrow 0 < \lambda < 1$. Άρα η E παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 1, το $E(1)$. Άρα η ζητούμενη τιμή του λ είναι ο αριθμός 1.

11) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x x \sin t \, dt$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $g'(x) = 2\sin x - x\cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $A(\frac{\pi}{2}, g(\frac{\pi}{2}))$.

ΛΥΣΗ

α) Έχουμε: $g'(x) = (x \cdot \int_0^x \sin t \, dt)' = (x)' \int_0^x \sin t \, dt + x(\int_0^x \sin t \, dt)' = \int_0^x \sin t \, dt + x \sin x$,

$$g'(x) = (\int_0^x \sin t \, dt)' + (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + \sin x - x\cos x = 2\sin x - x\cos x$$

, $x \in \mathbb{R}$.

β) Είναι $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \frac{\pi}{2} [\eta\mu t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} (\eta\mu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0) = \frac{\pi}{2}$ και

$$g'(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt + \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} = [\eta\mu t]_0^{\frac{\pi}{2}} + 0 = \eta\mu \frac{\pi}{2} - \eta\mu 0 = 1. \text{ Άρα η εξίσωση της}$$

εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο A είναι :

$$y - g(\frac{\pi}{2}) = g'(\frac{\pi}{2})(x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow y - \frac{\pi}{2} = 1 \cdot (x - \frac{\pi}{2}) \Leftrightarrow y = x.$$

12) Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η ευθεία

$\varepsilon : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, να βρείτε τις τιμές των α, β .

ΛΥΣΗ

Επειδή η $\varepsilon : y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$,

θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1$. Έχουμε λοιπόν :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha x^2 + \beta x}{x^2 - 2x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha + \beta \frac{1}{x}}{1 - 2 \frac{1}{x}} = 2 \Rightarrow \frac{\alpha + 0}{1 - 0} = 2 \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 + \beta x}{x - 2} - 2x \right) = -1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x + \beta x}{x - 2} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \beta}{1 - 2 \frac{1}{x}} = -1 \Rightarrow \frac{4 + \beta}{1 - 0} = -1 \Rightarrow \beta = -5 \quad (\text{είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0).$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2002

1) Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι $1 - 1$.

α) Να δείξετε ότι η g είναι $1 - 1$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

ΛΥΣΗ

α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) = g(x_2)$. Τότε $f(g(x_1)) = f(g(x_2)) \Rightarrow (f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (αφού η $f \circ g$ είναι $1 - 1$). Άρα η g είναι $1 - 1$.

β) Έχουμε $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1) \stackrel{g:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) + x^3 - x = f(x) + 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - x = 2x - 1 \Leftrightarrow x^3 - 3x + 1 = 0 \quad (1)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^3 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$\varphi'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ και $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 1$. Ακόμη έχουμε :

$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$ ενώ $\varphi'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-1, 1)$. Άρα :

* η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ και $\varphi((-\infty, -1]) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x), \varphi(-1)] = (-\infty, 3]$. Επειδή $0 \in (-\infty, 3]$ η εξίσωση (1) έχει μία ακριβώς ρίζα (αρνητική) στο $(-\infty, -1]$.

* η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και $\varphi([1, +\infty)) = [\varphi(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)) = [-1, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3) = [-1, +\infty)$. Επειδή $0 \in [-1, +\infty)$ η εξίσωση (1) έχει μία ακριβώς ρίζα (θετική) στο $[1, +\infty)$.

* Η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1, 1)$, επομένως η (1) έχει το πολύ μία ρίζα στο $(-1, 1)$. Ακόμη η φ είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική και $\varphi(0)\varphi(1) = 1 \cdot (-1) = -1 < 0$, άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano η (1) θα έχει τουλάχιστον μία ρίζα (θετική) στο $(0, 1) \subset (-1, 1)$. Επομένως η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα (θετική) στο $(-1, 1)$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

2) α) Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[a, b]$. Να αποδείξετε ότι αν

$$h(x) > g(x) \text{ για κάθε } x \in [a, b], \text{ τότε και } \int_a^b h(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

β) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις :

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0.$$

i) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

ii) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

iii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική

παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

ΛΥΣΗ

α) Επειδή η συνάρτηση $h(x) - g(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ ως διαφορά συνεχών

συναρτήσεων και για κάθε $x \in [a, b]$ είναι $h(x) > g(x) \Leftrightarrow h(x) - g(x) > 0$ έχουμε :

$$\int_a^b (h(x) - g(x))dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^b h(x)dx - \int_a^b g(x)dx > 0 \Leftrightarrow \int_a^b h(x)dx > \int_a^b g(x)dx.$$

β)

i) Παραγωγίζουμε τα δύο μέλη της $f(x) - e^{-f(x)} = x - 1$ και παίρνουμε :

$$f'(x) + f'(x)e^{-f(x)} = 1 \Leftrightarrow f'(x)(1 + e^{-f(x)}) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + e^{-f(x)}} \quad (1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ii) Για κάθε $x > 0$ έχουμε $\frac{x}{2} < f(x) < xf'(x) \xLeftrightarrow \frac{x}{2} < f(x) - f(0) < xf'(x) \xLeftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} < f'(x) \quad (2). \text{ Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την (2).}$$

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ αφού είναι

παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi \in (0, x)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$. Όμως $0 < \xi < x \Rightarrow$

$f'(0) < f'(\xi) < f'(x) \quad (3)$, αφού από την (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \frac{e^{-f(x)} f'(x)}{(1 + e^{-f(x)})^2} > 0 \quad (f'(x) > 0, \text{ από την (1)}), \text{ οπότε η } f' \text{ είναι γνησίως}$$

αύξουσα. Όμως $f'(0) = \frac{1}{1 + e^{-f(0)}} = \frac{1}{1 + e^0} = \frac{1}{2}$. Έτσι από την (3) προκύπτει η (2).

iii) Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathcal{R}$) και για κάθε $x \in [0, 1]$

είναι $f(x) \geq 0$ ($f(0) = 0$ και για κάθε $x > 0$ είναι $0 < \frac{x}{2} < f(x)$). Επομένως

$$E = \int_0^1 f(x) dx.$$

Επειδή το συμπέρασμα του ερωτήματος (α) εξακολουθεί να ισχύει και όταν $h(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ με το $=$ να μην ισχύει παντού στο $[\alpha, \beta]$ (η απόδειξη όμοια) θα έχουμε :

$$\frac{x}{2} \leq f(x) \leq xf'(x) \text{ (για κάθε } x \in [0, 1] \text{ με το } = \text{ να ισχύει μόνο για } x = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2} dx < \int_0^1 f(x) dx < \int_0^1 xf'(x) dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E < [xf(x)]_0^1 - \int_0^1 (x)f'(x) dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 < E \\ E < [xf(x)]_0^1 - E \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < E \\ 2E < f(1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4} < E \\ E < \frac{1}{2} f(1) \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1).$$

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2003

1) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β) Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$.

ΛΥΣΗ

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1-1$ και συνεπώς έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Ακόμη για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3)$ και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$, $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ (είναι $10x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

Άρα η f στρέφει τα κοίλα: άνω στο $(0, +\infty)$ και κάτω στο $(-\infty, 0]$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, έχουμε: $f(e^x) \geq f(1+x) \Leftrightarrow e^x \geq 1+x \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0$ (1). Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε την (1).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x - 1 - x$ και έχουμε $g'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση 0, το $g(0) = 0$.

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow e^x - 1 - x \geq 0$.

γ) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, 0)$ έχει εξίσωση $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 1 \cdot (x - 0) \Leftrightarrow y = x$, που είναι η εξίσωση του άξονα συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ) Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f δηλαδή το

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} x^5, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 \right) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}, \text{ αφού η } f \text{ είναι}$$

συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Η f^{-1} είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι συνεχής και οι C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$. Επειδή

$f(0) = 0$ θα είναι $f^{-1}(0) = 0$.

Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα (αν $\alpha < \beta$ θα είναι $f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$, διότι αν είχαμε $f^{-1}(\alpha) \geq f^{-1}(\beta) \Rightarrow f(f^{-1}(\alpha)) \geq f(f^{-1}(\beta)) \Rightarrow \alpha \geq \beta$, άτοπο) άρα η $f^{-1}(t) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0 .

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_0^3 |f^{-1}(t)| dt$. Θέτουμε $t = f(x)$, οπότε $dt = f'(x)dx$

και για $t = 0$ παίρνουμε $x = 0$ ($f(0) = 0$) ενώ για $t = 3$ παίρνουμε $x = 1$ ($f(1) = 3$) .

$$\begin{aligned} \text{Άρα } E &= \int_0^1 |f^{-1}(f(x))| f'(x) dx = \int_0^1 |x| f'(x) dx = \int_0^1 x f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 (x) f(x) dx \\ &= f(1) - 0 - \int_0^1 (x^5 + x^3 + x) dx = 3 - \left[\frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 3 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

2) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha , \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α , β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha , \beta)$, $\delta \in (\alpha , \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι :

- α) Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α , β) .
- β) Υπάρχουν σημεία $\xi_1 , \xi_2 \in (\alpha , \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.
- γ) Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f , με δεδομένο ότι η f'' έχει το πολύ πεπερασμένο πλήθος ριζών .

ΛΥΣΗ

α) Είναι $\gamma \neq \delta$, διότι αν $\gamma = \delta$ τότε $f(\gamma)f(\gamma) < 0 \Rightarrow (f(\gamma))^2 < 0$, άτοπο . Χωρίς βλάβη της γενικότητας έστω $\gamma < \delta$. Η f είναι συνεχής στο $[\gamma , \delta] \subset [\alpha , \beta]$ και $f(\gamma)f(\delta) < 0$ άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα ρ της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(\gamma , \delta) \subset (\alpha , \beta)$.

β) Εφαρμόζουμε για την f το θεώρημα μέσης τιμής
διαδοχικά στα διαστήματα $[\alpha , \gamma]$, $[\gamma , \rho]$, $[\rho , \delta]$, $\frac{\alpha \quad \gamma \quad \rho \quad \delta \quad \beta}{\quad \quad \quad \quad \quad}$
 $[\delta , \beta]$ και παίρνουμε αντίστοιχα : $f(\alpha) = f(\rho) = f(\beta) = 0$

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_1 \in (\alpha , \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_1) = \frac{f(\gamma) - f(\alpha)}{\gamma - \alpha} = \frac{f(\gamma)}{\gamma - \alpha}$,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_2 \in (\gamma , \rho)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_2) = \frac{f(\rho) - f(\gamma)}{\rho - \gamma} = \frac{-f(\gamma)}{\rho - \gamma}$,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_3 \in (\rho, \delta)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_3) = \frac{f(\delta) - f(\rho)}{\delta - \rho} = \frac{f(\delta)}{\delta - \rho}$,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\lambda_4 \in (\delta, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\lambda_4) = \frac{f(\beta) - f(\delta)}{\beta - \delta} = \frac{-f(\delta)}{\beta - \delta}$.

Επειδή είναι $f(\gamma)f(\delta) < 0$ θα είναι : $(f(\gamma) < 0 \text{ και } f(\delta) > 0)$ ή $(f(\gamma) > 0 \text{ και } f(\delta) < 0)$.

Αν $f(\gamma) < 0$ και $f(\delta) > 0$ τότε : $f'(\lambda_1) < 0$, $f'(\lambda_2) > 0$, $f'(\lambda_3) > 0$, $f'(\lambda_4) < 0$.

Εφαρμόζουμε για την f' το θεώρημα μέσης τιμής διαδοχικά στα διαστήματα

$[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_3, \lambda_4]$ και παίρνουμε αντίστοιχα :

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = \frac{f'(\lambda_2) - f'(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} > 0$,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\lambda_3, \lambda_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \frac{f'(\lambda_4) - f'(\lambda_3)}{\lambda_4 - \lambda_3} < 0$.

Αν $f(\gamma) > 0$ και $f(\delta) < 0$ τότε : $f'(\lambda_1) > 0$, $f'(\lambda_2) < 0$, $f'(\lambda_3) < 0$, $f'(\lambda_4) > 0$.

Εφαρμόζουμε για την f' το θεώρημα μέσης τιμής διαδοχικά στα διαστήματα

$[\lambda_1, \lambda_2]$, $[\lambda_3, \lambda_4]$ και παίρνουμε αντίστοιχα :

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (\lambda_1, \lambda_2)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_1) = \frac{f'(\lambda_2) - f'(\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1} < 0$,

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (\lambda_3, \lambda_4)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi_2) = \frac{f'(\lambda_4) - f'(\lambda_3)}{\lambda_4 - \lambda_3} > 0$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$f''(\xi_1) < 0$ και $f''(\xi_2) > 0$.

γ) Επειδή η f'' είναι συνεχής στο (α, β) θα έχει σταθερό πρόσημο σε καθένα από τα διαδοχικά διαστήματα που ορίζονται από τις το πολύ πεπερασμένες σε πλήθος ρίζες της $f''(x) = 0$. Όμως επειδή από το (β) η f'' αλλάζει πρόσημο στο (α, β) υπάρχουν δύο τουλάχιστον διαδοχικά διαστήματα με διαφορετικό πρόσημο και έστω x_α το σημείο αλλαγής του προσήμου.

Στο x_α ορίζεται η $f'(x_\alpha)$ (δηλαδή ορίζεται εφαπτομένη της C_f στο x_α) και η f'' αλλάζει πρόσημο άρα στο σημείο $A(x_\alpha, f(x_\alpha))$ η C_f παρουσιάζει καμπή.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2004

1) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ΛΥΣΗ

α) Πρέπει $x > 0$, άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = (0, +\infty)$. Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f'(x) = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1).$$

Επειδή $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{1}{2}}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

στο $\left(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, e^{-\frac{1}{2}}\right]$ ενώ παρουσιάζει και ολικό

ελάχιστο στη θέση $e^{-\frac{1}{2}}$ το $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right) = \dots = \frac{-1}{2e}$. Ακόμη $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, οπότε η f

(ανεξάρτητα από τη συμπεριφορά της κοντά στο 0) δεν έχει μέγιστο.

β) Για κάθε $x > 0$ έχουμε

$$f''(x) = (x)'(2 \ln x + 1) + x(2 \ln x + 1)' = 2 \ln x + 3.$$

Επειδή $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \geq e^{-\frac{3}{2}}$, προκύπτει ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω

στο $(0, e^{-\frac{3}{2}})$ και άνω στο $[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty)$, ενώ η C_f έχει σημείο καμπής το $(e^{-\frac{3}{2}}, f(e^{-\frac{3}{2}}))$

δηλαδή το $(e^{-\frac{3}{2}}, \frac{-3}{2e^3})$.

γ) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της A και έχει ολικό ελάχιστο το $\frac{-1}{2e}$.

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$. Η προβολή

της C_f στον $y'y$ (ανεξάρτητα από την συμπεριφορά της f κοντά στο 0) θα είναι το

το $[\frac{-1}{2e}, +\infty) = f(A)$.

2) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x f(x)$, όπου f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$f(0) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -f(\xi)$.

β) Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I(a) = \int_a^0 g(x)dx$, $a \in \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a)$.

ΛΥΣΗ

α) Για τη συνάρτηση g ισχύουν τα εξής :

- είναι συνεχής στο $[0, \frac{3}{2}]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων (η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής)
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3}{2})$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων
- $g(0) = g(\frac{3}{2}) = 0$, αφού $f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \frac{3}{2})$ τέτοιο

ώστε $g'(\xi) = 0$ (1).

Όμως $g'(x) = (e^x)'f(x) + e^x f'(x) = e^x(f(x) + f'(x))$. Έτσι η (1) δίνει

$$e^{\xi} \neq 0 \quad e^{\xi}(f(\xi) + f'(\xi)) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi).$$

β) Εάν $f(x) = 2x^2 - 3x$, τότε $g(x) = e^x(2x^2 - 3x)$, οπότε

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^0 g(x)dx = \int_a^0 (e^x)'(2x^2 - 3x)dx = \dots\dots(\text{κατά παράγοντες 2 φορές}) \\ &= e^a(-2a^2 + 7a - 7) + 7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \lim_{a \rightarrow -\infty} I(a) &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^a(-2a^2 + 7a - 7)] + 7 \stackrel{0(-\infty)}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-2a^2 + 7a - 7}{e^{-a}} + 7 \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \\ &= \dots\dots(\text{κανόνας Hospital 2 φορές}) = 7. \end{aligned}$$

3) Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(1) = 1$. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{ισχύει } g(x) = \int_1^{x^3} \left| z \right| f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1) \geq 0, \text{ όπου } z = \alpha + \beta i \in \mathbb{C}, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*,$$

τότε :

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τη g' .

β) Να αποδείξετε ότι $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

γ) Με δεδομένη τη σχέση του ερωτήματος β να αποδείξετε ότι $\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$.

δ) Αν επιπλέον $f(2) = \alpha > 0$, $f(3) = \beta$ και $\alpha > \beta$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (2, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων

συναρτήσεων διότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η $-3 \left| z + \frac{1}{z} \right| (x-1)$ παραγωγίσιμη

ως πολυωνυμική. Άρα $g'(x) = \dots = |z| f(x^3) \cdot 3x^2 - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|$.

β) Παρατηρούμε ότι $g(1) = 0$, άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) \geq g(1)$, δηλαδή το

$g(1) = 0$ είναι ολικό ελάχιστο της g . Επιπλέον το 1 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η g είναι παραγωγίσιμη στο 1, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow |z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|, \text{ αφού } f(1) = 1.$$

γ) Έχουμε: $|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z^2| = |z^2 + 1| \xLeftrightarrow{z^2=w} |w| = |w+1| \Leftrightarrow |w|^2 = |w+1|^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow w\bar{w} = (w+1)\overline{(w+1)} \Leftrightarrow w + \bar{w} = -1 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}(w) = -1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}.$$

δ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\beta < 0$ διότι τότε εφαρμόζεται το θεώρημα του Bolzano για την f στο $[2, 3]$ (η f είναι συνεχής στο $[2, 3]$ και θα είναι $f(2)f(3) < 0$). Έχουμε

$$\operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2} < 0 \text{ και } z^2 = (\alpha + \beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i, \text{ άρα}$$

$$\alpha^2 - \beta^2 < 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) < 0 \xLeftrightarrow{\alpha > \beta} \alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha,$$

δηλαδή ο β είναι μικρότερος του αρνητικού $-\alpha$ άρα είναι αρνητικός.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΤΟΥΣ 2005

1) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda ex$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι

$$E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta\mu\lambda}$.

ΛΥΣΗ

α. Είναι $f'(x) = \lambda e^{\lambda x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Έστω $M(x_0, f(x_0))$ το σημείου επαφής. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από M είναι

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(x - x_0)$ (1). Επειδή εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η (1) δίνει:

$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0}(0 - x_0) \Leftrightarrow \lambda x_0 = 1 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}. \text{ Η (1) τότε γράφεται } y = \lambda ex \text{ και το}$$

σημείο επαφής $M \left(\frac{1}{\lambda}, e \right)$.

γ. Η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ αφού $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \geq \lambda ex$ και συνεπώς το ζητούμενο εμβαδό είναι

$$E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (f(x) - e\lambda x) dx = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - e\lambda x) dx = \dots = \frac{e-2}{2\lambda}.$$

δ. Λαμβάνοντας υπόψη ότι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$ το ζητούμενο όριο είναι το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot (e-2)}{4 + 2\eta\mu\lambda}$.

$$\text{Είναι } -1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\eta\mu\lambda \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2\eta\mu\lambda + 4 \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2\eta\mu\lambda + 4} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(e-2)\lambda}{6} \leq \frac{(e-2)\lambda}{2\eta\mu\lambda+4} \leq \frac{(e-2)\lambda}{2}. \text{ Επειδή } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{(e-2)\lambda}{6} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{(e-2)\lambda}{2} = +\infty$$

$$\text{θα είναι και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda \cdot (e-2)}{4+2\eta\mu\lambda} = +\infty.$$

2) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση $2f'(x) = e^{x-f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α. Ναδειχθεί ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

β. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x}$.

γ. Δίδονται οι συναρτήσεις: $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t)dt$ και $g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$.

Δείξτε ότι $h(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

δ. Δείξτε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t)dt = \frac{1}{2008}$ έχει ακριβώς μία λύση στο $(0, 1)$.

ΛΥΣΗ

α. Έχουμε $2f'(x) = e^{x-f(x)} \Leftrightarrow 2f'(x)e^{f(x)} = e^x \Leftrightarrow (2e^{f(x)})' = (e^x)' \Leftrightarrow$

$2e^{f(x)} = e^x + c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επειδή $f(0) = 0 : 2e^{f(0)} = e^0 + c \Leftrightarrow c = 1$.

Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R} : 2e^{f(x)} = e^x + 1 \Leftrightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

β. Έχουμε $\int_0^x f(x-t)dt \stackrel{x-t=u}{=} \int_x^0 f(u)(-1)du = \int_0^x f(u)du$. Έτσι έχουμε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x} \stackrel{0}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\int_0^x f(u)du)'}{(\eta\mu x)'} \stackrel{Hos\pi ita l}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = 0,$$

αφού η f ως παραγωγίσιμη είναι και συνεχής.

γ. Έχουμε $h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t)dt = \int_{-x}^0 t^{2005} \cdot f(t)dt + \int_0^x t^{2005} \cdot f(t)dt =$

$$-\int_0^{-x} t^{2005} \cdot f(t)dt + \int_0^x t^{2005} \cdot f(t)dt \text{ και για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$h'(x) = -(-x)^{2005} f(-x) (-x)' + x^{2005} f(x) = -x^{2005} f(-x) + x^{2005} f(x) =$$

$$= x^{2005} (f(x) - f(-x)) = x^{2005} \left(\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) - \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) \right) = x^{2005} \cdot \ln\left(\frac{1+e^x}{1+e^{-x}}\right) =$$

$$= x^{2005} \cdot \ln e^x = x^{2006}.$$

Ακόμη $g'(x) = x^{2006}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $h'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Ισοδύναμα υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $h(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή $h(0) = g(0) = 0$ παίρνουμε $c = 0$. Άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}$: $h(x) = g(x)$.

δ. Θέλουμε να δείξουμε ότι η εξίσωση $\int_{-x}^x t^{2005} \cdot f(t) dt = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2008}$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008} = 0, \text{ έχει ακριβώς μία λύση}$$

στο $(0, 1)$.

Θεωρούμε την $\varphi(x) = \frac{x^{2007}}{2007} - \frac{1}{2008}$ η οποία είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και

$$\varphi(0)\varphi(1) = -\frac{1}{2008} \left(\frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} \right) < 0 \text{ οπότε σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano}$$

η εξίσωση $\varphi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$ η οποία όμως είναι και μοναδική αφού η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1)$:

$$\varphi'(x) = x^{2006} > 0 \text{ για κάθε } x \in (0, 1).$$

Β' ΜΕΡΟΣ :
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΥΣΗ

1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{x\alpha^y + (x^2 - 1)e^y}{\alpha^{y-1} + e^{y+3}}$, όπου α θετικός πραγματικός

αριθμός με $\alpha \neq e$.

α) Να βρεθεί ο α ώστε η συνάρτηση $g(x) = e^3 \ln \alpha \cdot f(x)$ να παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Για οποιαδήποτε από τις τιμές του α που βρήκατε στο (α) ερώτημα, αποδείξτε ότι για την παραπάνω συνάρτηση g ισχύει ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται

από την C_g και τον άξονα $x'x$ δεν είναι μεγαλύτερο από $\frac{4}{3}$ τ.μ.

2) Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$2f(x) + f(2004 - x) = -x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{\ln x}$.

γ) Αν $h(x) = x^2 f(x)$, αποδείξτε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε :

$$\int_{\alpha}^{\beta} x h''(x) dx = h(\alpha) - h(\beta).$$

3) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$[f(x)]^{1821} + \alpha [f(x)]^3 = -e^{f(x)}, \alpha > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = c$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου c αρνητική σταθερά.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1}$.

4) Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f'(x) + f(x) = 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = e + 1.$$

α) Να βρείτε το όριο $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} f(xy))$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

- 5) Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g για τις οποίες ισχύουν : $(f \circ f \circ f)(x) = x$ και $(f \circ f)(x) = g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η C_g διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(2, \frac{9}{2})$, να δείξετε ότι :

α) $\int_0^1 f(g'(x))dx = \frac{1}{2}$.

β) $\int_1^2 (f \circ f \circ \dots \circ f)(t)dt = \frac{3}{2}$ (η f εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα 2006 φορές) .

- 6) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x) + f(x-1002) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) $f(x+2004) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $\int_1^{2005} f(x+2005)dx = \int_2^{2006} f(x)dx$.

- 7) Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$[f(x)]^3 - 2003[f(x)]^2 - 2003f(x) - 2004 = 0 , \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή .

β) Θεωρούμε τα ολοκληρώματα : $I = \int_3^5 \frac{x^4 + f(x) - 2004}{x^2 + x + 1} dx$,

$$J = \int_8^5 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx , K = \int_8^3 \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + x + f(x) - 2003} dx . \text{ Να υπολογίσετε}$$

την παράσταση $I - J - K$.

- 8) Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g και η συνάρτηση $f(x) = \int_1^{2x+1} g(2x-t)dt$.

α) Να δείξετε ότι : $f''(x) + f'(x) = 2[g(2x-1) + 2g'(2x-1)]$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- β) Αν η γραφική παράσταση της g βρίσκεται πάνω από τον άξονα x' και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f'(x) + f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

9) α) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$. Να αποδείξετε ότι :

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx, & \text{αν η } f \text{ είναι άρτια.} \\ 0, & \text{αν η } f \text{ είναι περιττή.} \end{cases}$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_{-0,2}^{0,2} \sin(xe^{|x|} + \eta \mu x) \cdot \log \frac{1+x}{1-x} dx$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^5 - 2x^3 - 10x + \sqrt{3}}{\sin^2 x} dx$.

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5^{ax} + 6^{bx} + 7^{cx}$ με $f(x) \geq 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αποδείξτε ότι : α) η f έχει ελάχιστο το 3, β) $5^a \cdot 6^b \cdot 7^c = 1$.

11) α) Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση :

$$(x^2 + x + 1)^{11} - (2x^2 - x + 1)^7 + (x^2 + x + 1)^7 - (2x^2 - x + 1)^{11} = x^2 - 2x.$$

β) Να λυθεί η ανίσωση : $2 \ln \frac{2x^2 + x + 9}{x^2 + 4x + 7} + 5(x^2 - 3x + 2) < 0$.

12) Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και η συνάρτηση

$$g(x) = \int_1^x \left(\int_1^t \left(\int_1^z f(u^5) du \right) dz \right) dt.$$

α) Να βρείτε τις g' , g'' , $g^{(3)}$.

β) Να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x-1)^3}$ αν είναι γνωστό ότι $f(1) = 12$.

γ) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$, να δείξετε ότι η g'' είναι γνησίως μονότονη.

13) α) Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $f(x) \geq g(x)$ για κάθε

$$x \in [\alpha, \beta], \text{ να δείξετε ότι } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx.$$

β) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

γ) Αποδείξτε ότι : $\left| \int_1^2 \left(x \sin(e^x + 1) + \eta \mu \frac{1}{x} \right) dx \right| \leq \frac{5}{2}$.

δ) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση φ με συνεχή παράγωγο στο $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$,

τέτοια ώστε : $\varphi(-\alpha) = 3\alpha$, $\varphi(\alpha) = 7\alpha$ και $\varphi'(x) \geq 4$, για κάθε $x \in [-\alpha, \alpha]$.

14) α) Αν f, g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, b]$, να αποδείξετε ότι :

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2 dx \cdot \int_a^b (g(x))^2 dx \quad . \quad \text{« Ανισότητα Schwarz »}$$

β) Αν ϕ είναι μια συνάρτηση με συνεχή παράγωγο στο $[a, b]$, αποδείξτε ότι :

$$|\phi(b) - \phi(a)| \leq \sqrt{\int_a^b (\phi'(x))^2 dx} \cdot (b - a) \quad .$$

15) α) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f σε ένα διάστημα $[a, b]$. Αποδείξτε ότι

$$\text{αν η } f \text{ στρέφει τα κοίλα άνω στο } [a, b] \text{ τότε } f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad ,$$

$$\text{ενώ αν η } f \text{ στρέφει τα κοίλα κάτω στο } [a, b] \text{ τότε } f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{f(a)+f(b)}{2} \quad .$$

« Ανισότητες Jensen »

$$\beta) \text{ Για κάθε } a \in \mathbb{R} \text{ να δείξετε ότι : } e^{-(a+1)} + (a+1)^8 < \frac{1}{2} (e^{-a} + e^{-(a+2)} + (a+2)^8 + a^8) \quad .$$

16) Δίνεται η τέσσερις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f τέτοια ώστε :

$$f^{(4)}(x) + f^{(3)}(x) = \eta \mu x + \sigma \nu \eta x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 1, f'(0) = 0,$$

$$f''(0) = -1 \text{ και } f^{(3)}(0) = 0 \quad .$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f .

$$\beta) \text{ Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : } \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{f(x)} dx \quad .$$

$$\gamma) \text{ Υπολογίστε το άθροισμα : } S = \int_3^4 f^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx + \int_3^4 f^2(x) dx \quad .$$

17) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου οι διαστάσεις μεταβάλλονται

συναρτήσει του χρόνου t . Αν το μήκος και το πλάτος αυξάνονται με ρυθμό

1m/sec, 2m/sec αντιστοίχως, ενώ το ύψος ελαττώνεται με ρυθμό 2m/sec, να

βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που το ύψος είναι ίσο με το πλάτος και ίσο με 4m :

α) το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

β) το ρυθμό μεταβολής του όγκου του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

18) Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο 13 και ισχύει $f(x+y) = 5f(x)f(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $g(x) = \int_1^x f(t)dt \cdot \int_2^x f(t)dt \cdot \int_3^x f(t)dt \cdot \dots \cdot \int_{100}^x f(t)dt$, να δείξετε ότι η C_g δέχεται τουλάχιστον 99 οριζόντιες εφαπτόμενες.

19) α) Αποδείξτε ότι : $\int_0^k \sqrt{k^2 - x^2} dx = \frac{\pi k^2}{4}$, $k > 0$.

β) Υπολογίστε το παρακάτω άθροισμα συναρτήσεων του $a > 0$:

$$S = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx + \int_0^{2a} \sqrt{4a^2 - x^2} dx + \int_0^{3a} \sqrt{9a^2 - x^2} dx + \int_0^{4a} \sqrt{16a^2 - x^2} dx.$$

20) Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[-5, 7]$, σύνολο τιμών

το $[-2, 9]$ και την ιδιότητα $\int_{-5}^7 f(x)dx = 0$. Να δείξετε ότι :

α) $-f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0$, για κάθε $x \in [-5, 7]$.

β) $\int_{-5}^7 f^2(x)dx \leq 216$.

21) Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$f(x) = \int_1^x (x - vt)f(t)dt, v \in \mathbb{N}^*, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να δείξετε ότι :}$$

α) $f(1) = 0$ και $f'(1) = 0$.

β) $f''(x) = (2 - v)f(x) + (1 - v)xf'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) $f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $v = 1$ ή $v = 2$.

22) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[0, 1]$, τέτοια ώστε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$

$$\text{και } \int_0^1 \ln^2 f(x) dx + \frac{1}{5} = 2 \int_0^1 x^2 \ln f(x) dx .$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x^2}$, για κάθε $x \in [0, 1]$.

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx$.

23) Έστω $E(\lambda)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \ln x$, $g(x) = 12e^x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \lambda$, με $\lambda > 0$.

α) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του λ το εμβαδό $E(\lambda)$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda)$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - \alpha$, $\alpha > 0$.

α) Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

25) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x) = \sin x$ και $f(0) = 0$ να δείξετε ότι :

α) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$ τέτοιο ώστε $(f \circ f)(\alpha+1) - (f \circ f)(\alpha) = \sin(f(\xi))\sin \xi$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

β) $0 < e^{f(\gamma)} - e^{f(\beta)} < e(\gamma - \beta)$, για κάθε $\beta, \gamma \in [0, \frac{\pi}{2}]$ με $\beta < \gamma$.

26) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \eta \mu x + \beta \sigma \upsilon \nu x - \frac{2\alpha}{\pi}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

β) Αν ισχύει $\int_0^a f(x) dx = \eta \mu \alpha$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, \alpha)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \sin \xi$.

27) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + \max\{x^2, x\}$ και $g(x) = \sqrt{x+1}$.

- α) Να βρείτε τη σύνθεση της f με την g .
- β) Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της f με την g είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- γ) Να εξετάσετε αν η σύνθεση της f με την g είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

28) Έστω η συνάρτηση f τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε :

$$f'(25) + f'(20) = f'(35) + f'(10).$$

- α) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (10, 35)$ με $\xi_1 < \xi_2$ τέτοια ώστε

$$f''(\xi_1) = f''(\xi_2).$$

- β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (10, 35)$ τέτοιο ώστε $f^{(3)}(\xi) = 0$.

29) α) Αν f είναι μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση και η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει

το πολύ n διακεκριμένες πραγματικές ρίζες ($n \in \mathbb{N}$), τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει το πολύ $n+1$ διακεκριμένες πραγματικές ρίζες.

- β) Να λυθεί η εξίσωση : $4^x = -x^2 + 15x - 10$.

30) α) Έστω f μια συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[a, b]$. Να δείξετε

ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο (a, b) αν και μόνο αν $f(a)f(b) < 0$.

- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^7 + x^5 + 2x - \lambda = 0$ έχει λύση στο $(-1, 1)$ αν και μόνο αν $\lambda \in (-4, 4)$.

31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- β) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.
- γ) Θεωρώντας ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της, να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο σημείο 1.

- 32) α) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[α, β]$. Αν η f είναι αντιστρέψιμη και έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $[α, β]$, να δείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$$

- β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^5$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα :

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx.$$

- 33) α) Έστω συνάρτηση f ορισμένη στο A και γνησίως αύξουσα στο A . Αποδείξτε ότι : ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$ αν και μόνο αν ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$.

- β) Αν $f(x) = x + \int_{2004}^x e^{-t^2} dt$, $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και

να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = f^{-1}(x)$.

- 34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 3^x + 5^x}{e^x + \pi^x + 4^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το όριο της f στο $+\infty$.

β) Να βρείτε το όριο της f στο $-\infty$.

- γ) Αν $g(t) = e^{\eta \mu(\sigma \nu t)}$, να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt$.

- 35) Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

- α) Αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y) + \lambda xy(x+y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να δείξετε

$$\text{ότι } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

- β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\int_1^{3x} f(t)dt \geq 3x - 1$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_x^{f(x)} f(t)dt = (f(x))^3 - x^3 \text{ έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα.}$$

36) Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \text{ και } f(x+y) = f(x)f(y) - f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)f\left(\frac{\pi}{2} - y\right), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι :

- α) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. β) $f'(x) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 γ) $f''(x) + f(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. δ) $f(x) = \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

37) α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $2x^{2004} - x^2 + x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

β) Θεωρούμε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς 1. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M εσωτερικό του τμήματος AB τέτοιο ώστε να ισχύει :

$$2\left|\vec{MA}\right|^{2004} = \vec{M\Gamma} \cdot \vec{M\Delta}.$$

38) Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 10]$ και τιμές στο $\mathbb{Z}$

$$\text{και τη συνάρτηση } g \text{ με τύπο } g(x) = \frac{6(f(x))^2 + 3f(x) + 3}{6(f(x))^3 - (f(x))^2 + f(x) - 2} \text{ και τιμές}$$

στο $\mathbb{Z}$.

- α) Να δείξετε ότι η f είναι σταθερή.
 β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και τους τύπους των f , g .
 γ) Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha(t) = 2^{tg(t)+5}$, $\beta(t) = 2^{tg(t)+4}$, $\gamma(t) = 2^{3t+2f(t)}$, όπου $t \in [0, 10]$. Αν AM , AD είναι η διάμεσος και το ύψος αντιστοίχως που καταλήγουν στην $B\Gamma$, αποδείξτε ότι ο ρυθμός μεταβολής του τμήματος MD όταν $t = 1$ είναι ίσος με $90 \cdot \ln 2$.

39) Έστω η μη μηδενική πολωνυμική συνάρτηση f τέτοια ώστε :

$$f(x^2 - y^2) = xf(x) - yf(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

α) Να βρείτε την f .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \sqrt{1 - (f(t))^2} dt$.

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-2}^{-1} \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)} dx$.

40) α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει : $\eta \mu x > x - \frac{1}{6} x^3$.

β) Θεωρούμε τετράγωνο πλευράς 6 και παίρνουμε τυχαία 10 σημεία

$A_1, \dots, A_{10}$ εντός του τετραγώνου. Την απόσταση δύο σημείων A_i, A_j την συμβολίζουμε με D_{ij} , όπου $i, j \in \{1, 2, \dots, 10\}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον σημεία A_i, A_j ($i \neq j$) τέτοια ώστε να ισχύει :

$$\int_{2\sqrt{2}}^{D_{ij}} e^{6\eta t} dt \leq \int_{2\sqrt{2}}^{D_{ij}} e^{6t-t^3} dt .$$

Γ' ΜΕΡΟΣ :

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ – ΣΥΝΤΟΜΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΣΤΑ
ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

1) α) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις $\alpha > e$, $0 < \alpha < e$. Βρίσκουμε

$$g(x) = e^3 \ln \alpha \cdot f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1) \ln \alpha, & \alpha \in (0, e) \\ e^3 \alpha \ln \alpha \cdot x, & \alpha > e \end{cases} \text{ Για την περίπτωση } \alpha > e \text{ η } g \text{ δεν έχει}$$

ακρότατα, οπότε πρέπει $0 < \alpha < e$ και $g(x) = (x^2 - 1) \ln \alpha$.

• Αν $\alpha \in (0, 1)$ τότε $\ln \alpha < 0$ και η g έχει μέγιστο οπότε $\alpha \notin (0, 1)$.

• Αν $\alpha = 1$ τότε $g(x) = 0$ και η g έχει ελάχιστο το 0.

• Αν $\alpha \in (1, e)$ τότε $\ln \alpha > 0$ και η g έχει ελάχιστο.

Τελικά λοιπόν $\alpha \in [1, e)$.

β) Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E = \int_{-1}^1 |g(x)| dx$. Επειδή $|g(x)| = |(x^2 - 1) \ln \alpha| \leq$

$$|x^2 - 1| = 1 - x^2, \text{ για } x \in [-1, 1]. \text{ Έτσι } E \leq \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx \Rightarrow E \leq \frac{4}{3}.$$

2) α) Θέτουμε όπου x το 2004- x και από το σύστημα που προκύπτει βρίσκουμε

$$f(x) = 668 - x.$$

β) Είναι $g(x) = \frac{668 - x}{\ln x}$, $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \dots = 0$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - 0 \cdot x) = \dots = -\infty \notin \mathbb{R}$, η C_f δεν έχει

οριζόντιες ή πλάγιες ασύμπτωτες. Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0 \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$,

$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -\infty$ οπότε η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 1$.

γ) Είναι $h(x) = x^2(668 - x) = -x^3 + 668x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $\int_{\alpha}^{\beta} x h''(x) dx =$

$$= [x h'(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} (x) h'(x) dx = \beta h'(\beta) - \alpha h'(\alpha) - [h(x)]_{\alpha}^{\beta} = \beta h'(\beta) - \alpha h'(\alpha) - h(\beta) + h(\alpha).$$

Για να ισχύει η ισότητα $\int_{\alpha}^{\beta} x h''(x) dx = h(\alpha) - h(\beta)$, αρκεί $\beta h'(\beta) - \alpha h'(\alpha) = 0$, για

κατάλληλες τιμές των α, β . Έχουμε $h'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 1336x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{1336}{3}$.

Επιλέγοντας $\alpha = 0$ και $\beta = \frac{1336}{3}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

3) α) Παραγωγίζοντας και τα 2 μέλη της δοθείσας σχέσης παίρνουμε

$f'(x)[1821(f(x))^{1820} + 3\alpha(f(x))^2 + e^{f(x)}] = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η παράσταση εντός της αγκύλης είναι θετική, άρα $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνεπώς $f(x) = c$. Η σταθερά c είναι αρνητική, διότι αν $c \geq 0$ τότε στη δοθείσα σχέση το 1° μέλος θα ήταν μη αρνητικό ενώ το 2° αρνητικό (άτοπο).

β) Είναι $g(x) = \frac{c}{e^x - 1}$, $x \neq 0$. Έχουμε :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -c$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = +\infty$. Άρα η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, η ευθεία $y = -c$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και η $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.

4) α) Έχουμε $f'(x) + f(x) = 1 \Leftrightarrow e^x(f'(x) + f(x)) = e^x \Leftrightarrow (e^x f(x))' = (e^x)' \Leftrightarrow$

$e^x f(x) = e^x + c$, c σταθερά. Για $x = 0$: $e^0 f(0) = e^0 + c \Leftrightarrow e + 1 = 1 + c \Leftrightarrow c = e$. Άρα $f(x) = 1 + e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι λοιπόν $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} f(xy)) = \lim_{y \rightarrow +\infty} (\lim_{x \rightarrow 2} (1 + e^{1-xy})) =$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (1 + e^{1-2y}) \stackrel{\text{θέτουμε } -2y=t}{=} \lim_{t \rightarrow -\infty} (1 + e^t) = 1 + 0 = 1.$$

β) $f'(x) = -e^{1-x}$, $f''(x) = e^{1-x} > 0$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

5) α) $f(g'(x)) = (f \circ f \circ f)(x) = x$, άρα $\int_0^1 f(g'(x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \beta) 2006 &= 668 \cdot 3 + 2, \text{ άρα } \int_1^2 (f \circ f \circ \dots \circ f)(t) dt = \int_1^2 f(f(x)) dx = \int_1^2 g'(x) dx = \\ &= g(2) - g(1) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

6) α) Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το $x+2004$: $f(x+2004) + f(x+1002) = 0$ (1)

Θέτουμε στη δοθείσα όπου x το $x+1002$: $f(x+1002) + f(x) = 0$ (2)

Από (1) και (2): $f(x+2004) = f(x)$.

$$\beta) \int_1^{2005} f(x+2005) dx = \int_1^{2005} f(x+1+2004) dx = \int_1^{2005} f(x+1) dx \stackrel{x+1=u}{=} \int_2^{2006} f(u) du.$$

7) α) Η δοθείσα ισότητα γράφεται $(f(x)-2004)(f^2(x)+f(x)+1) = 0$, οπότε

$$f(x) = 2004 .$$

$$\begin{aligned} \beta) I - J - K &= \int_3^5 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx + \int_5^8 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx + \int_3^8 \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \\ &= \int_3^8 \frac{x^4}{x^2 + x + 1} dx + \int_3^8 \frac{x^3 - x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \int_3^8 \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^2 + x + 1} dx = \int_3^8 (x^2 - 1) dx = \dots = \frac{470}{3} . \end{aligned}$$

8) α) Θέτουμε $2x-t = u$ και παίρνουμε $f(x) = \int_{-1}^{2x-1} g(u) du$, οπότε $f'(x) = 2g(2x-1)$,

$f''(x) = 4g'(2x-1)$ και με πρόσθεση των $f'(x)$, $f''(x)$ παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Είναι $g(x) > 0$ και $g'(x) \geq 0$, οπότε $g(2x-1) > 0$, $g'(2x-1) \geq 0$. Λόγω του (α) θα είναι $f''(x) + f'(x) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0 \Rightarrow h$ γνησίως αύξουσα .

9) α) Είναι $\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$. Για το $\int_{-a}^0 f(x) dx$ θέτουμε $x = -u$ και

$$\text{τότε αυτό είναι ίσο με } \int_0^a f(x) dx \text{ αν η } f \text{ είναι άρτια , ενώ είναι ίσο με } -\int_0^a f(x) dx$$

αν η f είναι περιττή .

β) Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι περιττή άρα $I = 0$.

$$\gamma) J = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{x^5}{\sigma \nu \nu^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-2x^3}{\sigma \nu \nu^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-10x}{\sigma \nu \nu^2 x} dx + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt{3}}{\sigma \nu \nu^2 x} dx =$$

$$\begin{aligned} &(\alpha) \\ &= 0 + 0 + 0 + 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma \nu \nu^2 x} dx = 2\sqrt{3} \left(\varepsilon \varphi \frac{\pi}{3} - \varepsilon \varphi 0 \right) = 6 . \end{aligned}$$

10) α) Επειδή $f(0)=3$ θα είναι $f(x) \geq f(0)$ άρα το $f(0)=3$ είναι ελάχιστο της f .

β) Από το θεώρημα Fermat : $f'(0) = 0$. Μετά από πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

11) α) Η εξίσωση γράφεται

$$(x^2 + x + 1)^{11} + (x^2 + x + 1)^7 + x^2 + x + 1 = (2x^2 - x + 1)^{11} + (2x^2 - x + 1)^7 + 2x^2 - x + 1$$

Θεωρούμε τη $\varphi(x) = x^{11} + x^7 + x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και $1 - 1$, επομένως η εξίσωση τώρα γράφεται $\varphi(x^2 + x + 1) = \varphi(2x^2 - x + 1) \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 2x^2 - x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$.

$$\beta) \text{ Η ανίσωση γράφεται } 2\ln \frac{2x^2 + x + 9}{x^2 + 4x + 7} + 5[(2x^2 + x + 9) - (x^2 + 4x + 7)] < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(2x^2 + x + 9) + 5(2x^2 + x + 9) < 2\ln(x^2 + 4x + 7) + 5(x^2 + 4x + 7) .$$

Θεωρούμε την $g(x) = 2\ln x + 5x$, η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

$$\text{και τώρα η ανίσωση γράφεται } g(2x^2 + x + 9) < g(x^2 + 4x + 7) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + x + 9 < x^2 + 4x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 2) .$$

$$12) \alpha) g'(x) = \int_1^x \left(\int_1^z f(u^5) du \right) dz, \quad g''(x) = \int_1^x f(u^5) du, \quad g^{(3)}(x) = f(x^5), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{(x-1)^3} &\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g'(x)}{3(x-1)^2} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g''(x)}{6(x-1)} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{g^{(3)}(x)}{6} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x^5)}{6} = 2 . \end{aligned}$$

γ) Επειδή η f είναι συνεχής και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f(x) \neq 0$, θα είναι

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα

$$g^{(3)}(x) = f(x^5) > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ή } g^{(3)}(x) = f(x^5) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

Επομένως η g'' είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$.

$$13) \alpha) f(x) - g(x) \geq 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta], \text{ επομένως } \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \geq 0, \text{ απ' όπου}$$

παίρνουμε το ζητούμενο .

β) - $|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, οπότε λόγω του (α) :

$$-\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \Rightarrow \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx .$$

$$\gamma) \text{ Λόγω των (α) και (β) είναι : } \left| \int_1^2 (x \sin(e^x + 1) + \eta \mu \frac{1}{x}) dx \right| \leq$$

$$\int_1^2 \left| x \sin(e^x + 1) + \eta \mu \frac{1}{x} \right| dx \leq \int_1^2 (|x| \cdot |\sin(e^x + 1)| + \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right|) dx \leq \int_1^2 (x \cdot 1 + 1) dx =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \frac{5}{2} .$$

$$\delta) \text{ Αν υπάρχει τότε } \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi'(x) dx \geq \int_{-\alpha}^{\alpha} 4 dx \Rightarrow \phi(\alpha) - \phi(-\alpha) \geq 8\alpha \Rightarrow 4\alpha \geq 8\alpha \text{ (άτοπο) .}$$

14) α) Έστω $\varphi(t) = \left(\int_{\alpha}^t f(x)g(x)dx \right)^2 - \int_{\alpha}^t (f(x))^2 dx \cdot \int_{\alpha}^t (g(x))^2 dx$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

$$\varphi'(t) = \dots = - \int_{\alpha}^t (f(x)g(t) - f(t)g(x))^2 dx \leq 0$$
 , άρα η φ είναι φθίνουσα στο

$[\alpha, \beta]$, οπότε $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$ απ' όπου παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Από το (α) για $f(x) = 1$ και $g(x) = \varphi'(x)$ παίρνουμε το ζητούμενο .

15) α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2}]$,

$[\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta]$ οπότε υπάρχουν $\xi_1 \in (\alpha, \frac{\alpha + \beta}{2})$, $\xi_2 \in (\frac{\alpha + \beta}{2}, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f(\frac{\alpha + \beta}{2}) - f(\alpha)}{\frac{\beta - \alpha}{2}} \quad \text{και} \quad f'(\xi_2) = \frac{f(\beta) - f(\frac{\alpha + \beta}{2})}{\frac{\beta - \alpha}{2}} .$$
 Αν η f είναι

κυρτή (κοίλη) τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα (γνησίως φθίνουσα) οπότε

$\xi_1 < \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2)$ ($f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$) και μετά τις πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο .

β) Η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^8$ στρέφει τα κοίλα άνω στο $\mathbb{R}$, οπότε αν εφαρμόσουμε το (α) για την f στο $[\alpha, \alpha+2]$, παίρνουμε το ζητούμενο .

16) α) Θέτουμε $f^{(3)}(x) = g(x)$. Τότε $g'(x) + g(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$$e^x(g'(x) + g(x)) = e^x(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \Leftrightarrow (e^x g(x))' = (e^x \eta\mu x)' \Leftrightarrow$$

$$e^x g(x) = e^x \eta\mu x + c_1 .$$
 Επειδή $g(0) = f^{(3)}(0) = 0$, προκύπτει $c_1 = 0$, οπότε

$$g(x) = \eta\mu x \quad \text{ή} \quad f^{(3)}(x) = \eta\mu x .$$
 Από την τελευταία ισότητα χρησιμοποιώντας και

$$\text{τις αρχικές συνθήκες παίρνουμε διαδοχικά } f''(x) = -\sigma\upsilon\nu x, \quad f'(x) = -\eta\mu x,$$

$$f(x) = \sigma\upsilon\nu x .$$

β) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\eta\mu(\frac{\pi}{2} - x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2\eta\mu(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} dx =$

$$(\text{διαιρούμε αριθμητή και παρονομαστή με } \sigma\upsilon\nu^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}))'}{\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})} dx =$$

$$= - \left[\ln \left(\exp \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right) \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = - \ln \left(\exp \frac{\pi}{12} \right) .$$

$$\gamma) S = \int_3^4 f^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx + \int_3^4 f^2(x) dx = \int_3^4 \eta \mu^2 x dx + \int_3^4 \sigma \nu^2 x dx =$$

$$\int_3^4 (\eta \mu^2 x + \sigma \nu^2 x) dx = \int_3^4 1 dx = 1 .$$

- 17) Αν $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ είναι αντίστοιχα το μήκος , το πλάτος και το ύψος του παραλληλεπιπέδου τότε $E(t) = 2a(t)b(t) + 2b(t)c(t) + 2c(t)a(t)$ και $V(t) = a(t)b(t)c(t)$ οπότε παραγωγίζοντας και λαμβάνοντας υπόψη ότι $a'(t) = 1$, $b'(t) = 2$, $c(t) = -2$ (σε m/sec) και $b(t_0) = c(t_0) = 4$ m παίρνουμε τελικά $E'(t_0) = 16 \text{ m}^2/\text{sec}$ και $V'(t_0) = 16 \text{ m}^3/\text{sec}$.

- 18) α) Αν a είναι τυχαίο σημείο του $\mathbb{R}$ αρκεί ναδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Όταν

$$x \rightarrow a \text{ ισχύει } x - a \rightarrow 0 , x - a + 13 \rightarrow 13 . \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x - a + 13) =$$

$$\lim_{t \rightarrow 13} f(t + a - 13) = \lim_{t \rightarrow 13} [5f(t)f(a - 13)] = 5f(a - 13) \lim_{t \rightarrow 13} f(t) = 5f(a - 13)f(13) =$$

$$= f(a - 13 + 13) = f(a) .$$

- β) Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Ισχύει $g(1) = g(2) = g(3) = \dots = g(100) = 0$. Εφαρμόζουμε για την g το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$, $\dots$, $[99, 100]$ και παίρνουμε το ζητούμενο.

- 19) α) Η $y = \sqrt{k^2 - x^2}$ γράφεται $x^2 + y^2 = k^2$ (εξίσωση κύκλου) . Το ολοκλήρωμα παριστάνει το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τον παραπάνω κύκλο και βρίσκεται στο 1° τεταρτημόριο , άρα θα είναι ίσο με το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού

$$\text{του κύκλου δηλαδή } \frac{\pi k^2}{4} .$$

$$\beta) \text{ Λόγω του } (a) : S = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{\pi (2a)^2}{4} + \frac{\pi (3a)^2}{4} + \frac{\pi (4a)^2}{4} = \frac{15\pi a^2}{2} .$$

20) α) Για κάθε $x \in [-5, 7]$ είναι $-2 \leq f(x) \leq 9 \Rightarrow (f(x)+2)(9-f(x)) \geq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow -f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0$.

β) Από την $-f^2(x) + 7f(x) + 18 \geq 0$ προκύπτει $\int_{-5}^7 (-f^2(x) + 7f(x) + 18)dx \geq 0$,

απ' όπου μετά από διάσπαση και πράξεις παίρνουμε το ζητούμενο.

21) α) $f(x) = x \int_1^x f(t)dt - v \int_1^x tf(t)dt, x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \int_1^x f(t)dt + (1-v)xf(x), x \in \mathbb{R}. \text{ Άρα } f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 0.$$

β) Παραγωγίζοντας την $f'(x)$ παίρνουμε το ζητούμενο.

γ) Για $v = 1$ από το (β) παίρνουμε $f''(x) = f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f'(x) = f(x) + f'(x)$

$$\Leftrightarrow g'(x) = g(x) \quad \text{« θέτοντας } g(x) = f(x) + f'(x) \text{ »}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} [g'(x) - g(x)] = 0 \Leftrightarrow [e^{-x} g(x)]' = 0 \Leftrightarrow e^{-x} g(x) = c_1. \text{ Επειδή}$$

$$g(1) = f(1) + f'(1) = 0, \text{ προκύπτει } c_1 = 0, \text{ οπότε } g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x [f(x) + f'(x)] = 0 \Leftrightarrow [e^x f(x)]' = 0 \Leftrightarrow e^x f(x) = c_2. \text{ Επειδή } f(1) = 0,$$

$$\text{προκύπτει } c_2 = 0, \text{ οπότε } f(x) = 0, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Για } v = 2 \text{ από το (β) παίρνουμε } f''(x) = -xf'(x) \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} [f''(x) + xf'(x)] = 0$$

$$\Leftrightarrow [e^{\frac{x^2}{2}} f'(x)]' = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} f'(x) = c_3. \text{ Επειδή } f'(1) = 0 \text{ προκύπτει } c_3 = 0,$$

$$\text{οπότε } f'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = c_4. \text{ Επειδή } f(1) = 0 \text{ προκύπτει } c_4 = 0, \text{ άρα } f(x) = 0,$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

22) α) Έχουμε $\int_0^1 \ln^2 f(x)dx + \int_0^1 x^4 dx = 2 \int_0^1 x^2 \ln f(x)dx \Leftrightarrow \int_0^1 [\ln f(x) - x^2]^2 dx = 0$

$$\Leftrightarrow \ln f(x) - x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = e^{x^2}, \text{ για κάθε } x \in [0, 1].$$

$$\beta) I = \int_0^1 \frac{f(x)}{f(1-x) + f(x)} dx = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x) - f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx =$$

$$= \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{f(1-x)}{f(1-x) + f(x)} dx \stackrel{1-x=u}{=} 1 + \int_1^0 \frac{f(u)}{f(u) + f(1-u)} du = 1 - I.$$

$$\text{Άρα } 2I = 1 \Leftrightarrow I = 0,5.$$

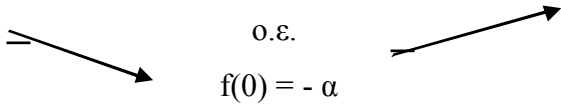
23) α) Αν $\lambda \in (0, 1)$ τότε $E(\lambda) = \int_{\lambda}^1 (g(x) - f(x))dx = 12e - 12e^{\lambda} + \lambda \ln \lambda$.

Αν $\lambda = 1$ τότε $E(\lambda) = 0$. Αν $\lambda > 1$ τότε $E(\lambda) = \int_1^{\lambda} (g(x) - f(x))dx =$
 $= -12e + 12e^{\lambda} - \lambda \ln \lambda$.

β) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (12e - 12e^{\lambda} + \lambda \ln \lambda) = 12e - 12 + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\ln \lambda}{\frac{1}{\lambda}} =$

$= 12e - 12 + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}} = 12e - 12 + \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (-\lambda) = 12e - 12$.

24) α) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 10x = 2x(2x^2 - 6x + 5)$. Τα ζητούμενα φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f(x)			

β) Το σύνολο τιμών της f είναι το $f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) =$
 $= (\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)) \cup [f(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\alpha, +\infty) \cup [-\alpha, +\infty) = [-\alpha, +\infty)$.

γ) Επειδή $0 \in (-\alpha, +\infty)$ και $0 \in [-\alpha, +\infty)$ και η f είναι γνησίως μονότονη σε
καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $[0, +\infty)$ η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες
στο $\mathbb{R}$.

25) α) Βρίσκουμε πρώτα ότι $f(x) = \eta \mu x$, οπότε θα δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \alpha+1)$
τέτοιο ώστε $\eta \mu(\eta \mu(\alpha+1)) - \eta \mu(\eta \mu \alpha) = \sin(\eta \mu \xi) \sin \xi$. Εφαρμόζοντας το
θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $h(x) = \eta \mu(\eta \mu x)$ στο $[\alpha, \alpha+1]$
παίρνουμε το ζητούμενο.

β) Αρκεί να δείξουμε ότι $0 < e^{\eta \mu \gamma} - e^{\eta \mu \beta} < e(\gamma - \beta)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα
μέσης τιμής για την $g(x) = e^{\eta \mu x}$ στο $[\beta, \gamma]$.

26) α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την $F(x) = -\alpha \sin x + \beta \eta \mu x - \frac{2a}{\pi} x$ στο

$[0, \pi]$, για την οποία ισχύει $F'(x) = f(x)$ και $F(0) = F(\pi) = -\alpha$.

β) Θα δείξουμε ότι η εξίσωση $f(x) - \sin x = 0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο

$(0, \alpha)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την $G(x) = \int_0^x f(t) dt - \eta \mu x$ στο

$[0, \alpha]$, για την οποία ισχύει $G'(x) = f(x) - \sin x$ και $G(0) = G(\alpha) = 0$.

27) α) Είναι $x^2 \geq x \Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$ και $x^2 < x \Leftrightarrow x \in (0, 1)$.

Έτσι παίρνουμε $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ 3x, & x \in (0, 1) \end{cases}$. Τελικά βρίσκουμε

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} |x+1|, & x \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \\ \sqrt{3x+1}, & x \in (0, 1) \end{cases}.$$

β) Η $g \circ f$ είναι συνεχής στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[1, +\infty)$ ως απόλυτη τιμή συνεχούς συναρτήσεως και συνεχής στο διάστημα $(0, 1)$ ως ρίζα συνεχούς συναρτήσεως. Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(0) = 1$, η $g \circ f$ είναι συνεχής στο 0.

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 1^-} (g \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(1) = 2$, η $g \circ f$ είναι

συνεχής στο 1. Άρα η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

γ) Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 αφού :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(0)}{x - 0} = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(0)}{x - 0} = \frac{3}{2}.$$

Δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 αφού :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(1)}{x - 1} = \frac{3}{4} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(1)}{x - 1} = 1.$$

28) α) Η δοθείσα ισότητα γράφεται $f'(20) - f'(10) = f'(35) - f'(25) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{f'(20) - f'(10)}{20 - 10} = \frac{f'(35) - f'(25)}{35 - 25}. \text{ Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής}$$

για την f' στα διαστήματα $[10, 20]$ και $[25, 35]$ και συμπεραίνουμε ότι

υπάρχουν ξ_1, ξ_2 τέτοια ώστε $f''(\xi_1) = f''(\xi_2)$, με $\xi_1 \in (10, 20)$ και

$\xi_2 \in (25, 35)$.

β) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την f'' στο $[\xi_1, \xi_2]$.

29) α) Αν η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον $n+2$ ρίζες τότε εφαρμόζοντας το θεώρημα Rolle για την f σε καθένα από τα $n+1$ διαδοχικά διαστήματα που ορίζονται από τις ρίζες της $f(x) = 0$, παίρνουμε ότι η $f'(x) = 0$ έχει $n+1$ τουλάχιστον ρίζες, που είναι άτοπο.

β) Είναι $4^x = -x^2 + 15x - 10 \Leftrightarrow 4^x + x^2 - 15x + 10 = 0$.

Έστω $f(x) = 4^x + x^2 - 15x + 10$. Τότε $f'(x) = 4^x \ln 4 + 2x - 15$,

$f''(x) = 4^x (\ln 4)^2 + 2 > 0$. Σύμφωνα με το (α) η $f'(x) = 0$ θα έχει το πολύ μία ρίζα, ενώ η $f(x) = 0$ θα έχει το πολύ δύο ρίζες. Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$ και $f(2) = 0$. Άρα η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$.

30) α) Αν $f(\alpha)f(\beta) < 0$ τότε από το θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση στο (α, β) .

Έστω τώρα ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει λύση τον αριθμό $\xi \in (\alpha, \beta)$. Τότε θα είναι: $f(\alpha) < f(\xi) < f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) < 0 < f(\beta)$, αν η f είναι γνησίως αύξουσα ή $f(\alpha) > f(\xi) > f(\beta) \Leftrightarrow f(\alpha) > 0 > f(\beta)$, αν η f είναι γνησίως φθίνουσα. Σε κάθε περίπτωση είναι $f(\alpha)f(\beta) < 0$.

β) Έστω $f(x) = x^7 + x^5 + 2x - \lambda$, $x \in [-1, 1]$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-1, 1]$ και συνεχής σε αυτό, οπότε σύμφωνα με το (α): η $f(x) = 0$ έχει λύση στο $(-1, 1) \Leftrightarrow f(-1)f(1) < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (-4, 4)$.

31) α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = e^x + 3x^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ η f είναι γνησίως αύξουσα $\Rightarrow$ η f είναι 1-1 $\Rightarrow$ η f είναι αντιστρέψιμη.

Το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

β) Παρατηρούμε ότι $f(0) = 1$, άρα $f^{-1}(1) = 0$. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, αφού αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta$ και $f^{-1}(\alpha) \geq f^{-1}(\beta)$ θα είχαμε $f(f^{-1}(\alpha)) \geq f(f^{-1}(\beta)) \Rightarrow \alpha \geq \beta$ (άτοπο).

Άρα η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική λύση την $x = 1$.

γ) Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε: $f(f^{-1}(y)) = y \Rightarrow f'(f^{-1}(y)) (f^{-1})'(y) = (y)' \Rightarrow$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \text{ Για } y = 1 : (f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}.$$

32) α) Για το ολοκλήρωμα $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$ θέτουμε $x = f(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, οπότε

$dx = f'(t)dt$. Για $x = f(\alpha)$ παίρνουμε $t = \alpha$, ενώ για $x = f(\beta)$ παίρνουμε

$t = \beta$ (η f είναι 1-1). Το $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx$ είναι καλώς ορισμένο αφού η

f^{-1} είναι συνεχής (f συνεχής $\Rightarrow C_f$ συνεχής γραμμή $\Rightarrow C_{f^{-1}}$ συνεχής

γραμμή, αφού οι C_f , $C_{f^{-1}}$ είναι συμμετρικές ως προς την $y = x \Rightarrow f^{-1}$

συνεχής). Έτσι είναι $\int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} tf'(t)dt$. Επομένως :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} f^{-1}(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(t) + tf'(t))dt = [tf(t)]_{\alpha}^{\beta} = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha).$$

β) $f'(x) = e^x + 5x^4 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι 1-1 και σύμφωνα με

$$\begin{aligned} \text{το } (a) \text{ θα είναι : } \int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx &= \int_{f(0)}^{f(1)} f^{-1}(x)dx = 1 \cdot f(1) - 0 \cdot f(0) - \int_0^1 f(x)dx = \\ &= e + 1 - \int_0^1 (e^x + x^5)dx = \frac{11}{6}. \end{aligned}$$

33) α) Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = f^{-1}(x)$. Τότε θα είναι

$f(\rho) = f^{-1}(\rho)$ (1) και θα δείξουμε ότι $f(\rho) = \rho$. Επειδή η f είναι γνησίως

αύξουσα θα είναι και η f^{-1} γνησίως αύξουσα (αν $\alpha < \beta$ θα είναι

$f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\beta)$, διότι αν είχαμε $f^{-1}(\alpha) \geq f^{-1}(\beta) \Rightarrow f(f^{-1}(\alpha)) \geq f(f^{-1}(\beta))$
 $\Rightarrow \alpha \geq \beta$, άτοπο).

Αν $f(\rho) > \rho$ τότε $f^{-1}(f(\rho)) > f^{-1}(\rho) \Rightarrow \rho > f^{-1}(\rho) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho > f(\rho)$ (άτοπο).

Αν $f(\rho) < \rho$ τότε $f^{-1}(f(\rho)) < f^{-1}(\rho) \Rightarrow \rho < f^{-1}(\rho) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \rho < f(\rho)$ (άτοπο).

Άρα $f(\rho) = \rho$.

Έστω ότι ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x$. Τότε θα είναι $f(\rho) = \rho$ (2)

και θα δείξουμε ότι $f(\rho) = f^{-1}(\rho)$.

Από την (2) προκύπτει $f^{-1}(\rho) = \rho \stackrel{(2)}{\Rightarrow} f^{-1}(\rho) = f(\rho)$.

β) $f'(x) = 1 + e^{-x^2} > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Σύμφωνα με το (α) έχουμε: $f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow$

$$x + \int_{2004}^x e^{-t^2} dt = x \Leftrightarrow \int_{2004}^x e^{-t^2} dt = 0 \Leftrightarrow x = 2004, \text{ αφού αν } x > 2004 \text{ τότε}$$

$$\int_{2004}^x e^{-t^2} dt > 0, \text{ ενώ αν } x < 2004 \text{ τότε } \int_{2004}^x e^{-t^2} dt = - \int_x^{2004} e^{-t^2} dt < 0.$$

34) α) Είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{5}{4}\right)^x \cdot \frac{\left(\frac{e}{5}\right)^x + \left(\frac{3}{5}\right)^x + 1}{\left(\frac{e}{4}\right)^x + \left(\frac{\pi}{4}\right)^x + 1} \right] = +\infty.$

β) Είναι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1 + \left(\frac{3}{e}\right)^x + \left(\frac{5}{e}\right)^x}{1 + \left(\frac{\pi}{e}\right)^x + \left(\frac{4}{e}\right)^x} \right] = 1.$

γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ είναι $\frac{1}{e} \leq g(t) \leq e$, οπότε:

$$\int_{f(x)}^{f(x)+1} \left(\frac{1}{e} + 2t\right) dt \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (e + 2t) dt \Rightarrow$$

$$\frac{1}{e} + 2f(x) + 1 \leq \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt \leq e + 2f(x) + 1. \text{ Επειδή}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e} + 2f(x) + 1\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e + 2f(x) + 1) = +\infty, \text{ από το κριτήριο της}$$

παρεμβολής παίρνουμε $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{f(x)}^{f(x)+1} (g(t) + 2t) dt = +\infty.$

35) α) Για $x = y = 0$ παίρνουμε $f(0) = 0$. Για $y = -x$ παίρνουμε $0 = f(x) + f(-x) + 0$ δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, οπότε η f είναι περιττή και συνεπώς (άσκηση 9α)

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0.$$

β) Θέτουμε $g(x) = \int_1^{3x} f(t) dt - 3x + 1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $g(x) \geq 0 = g(\frac{1}{3})$,

άρα η g παρουσιάζει ελάχιστο στη θέση $\frac{1}{3}$. Σύμφωνα με το θεώρημα

Fermat θα είναι $g'(\frac{1}{3}) = 0$. Όμως $g'(x) = 3f(3x) - 3$ και $g'(\frac{1}{3}) = 0 \Leftrightarrow$

$3f(1) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$. Θέτουμε $x = 1$ στην δοθείσα εξίσωση και

παρατηρούμε ότι επαληθεύεται, άρα έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$.

36) α) Θέτουμε $x = \frac{\pi}{2}$ και $y = 0$.

β) Παραγωγίζουμε τη δοθείσα σχέση ως προς y και έπειτα θέτουμε $y = 0$.

γ) Παραγωγίζουμε τη (β) ως προς x και παίρνουμε $f''(x) = f'(\frac{\pi}{2} - x)$.

Από την (β) θέτοντας όπου x το $\frac{\pi}{2} - x$ παίρνουμε $f'(\frac{\pi}{2} - x) = -f(x)$.

Έτσι $f''(x) = -f(x) \Leftrightarrow f''(x) + f(x) = 0$.

δ) Θέτουμε $g(x) = f(x) - \sin x$, άρα $g'(x) = f'(x) + \eta \mu x$, $g''(x) = f''(x) + \sigma \nu \nu x$
οπότε $g(x) + g''(x) = f(x) + f''(x) = 0$. Έχουμε:

$$2g'(x)(g(x) + g''(x)) = 2g'(x) \cdot 0 \Leftrightarrow [(g(x))^2 + (g'(x))^2]' = 0 \Leftrightarrow$$

$$(g(x))^2 + (g'(x))^2 = c, \text{ c σταθερά.}$$

Παρατηρούμε ότι $g(0) = g'(0) = 0$, οπότε παίρνουμε $c = 0$. Άρα θα έχουμε

$$(g(x))^2 + (g'(x))^2 = 0, \text{ οπότε } g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = \sin x.$$

37) α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την $f(x) = 2x^{2004} - x^2 + x - 1$ στο $[0, 1]$.

β) Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Oxy έτσι ώστε $A \equiv O(0, 0)$, $B(1, 0)$, $\Gamma(1, 1)$, $\Delta(0, 1)$. Έστω $M(x, 0)$ σημείο

του τμήματος ΑΒ. Τότε $\left| \vec{MA} \right| = x$, $\vec{M\Gamma} \cdot \vec{M\Delta} = (1-x, 1) \cdot (0-x, 1) = x^2 - x + 1$.

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $2x^{2004} = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow$

$2x^{2004} - x^2 + x - 1 = 0$, το οποίο έχει αποδειχθεί στο (α).

38) α) Έστω ότι η f δεν είναι σταθερή . Τότε υπάρχουν $\kappa, \lambda \in [0, 10]$ με $\kappa < \lambda$ ώστε $f(\kappa) \neq f(\lambda)$. Η f είναι συνεχής στο $[\kappa, \lambda] \subseteq [0, 10]$ και $f(\kappa) \neq f(\lambda)$, οπότε από το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών η f θα παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των $f(\kappa)$ και $f(\lambda)$. Αυτό όμως είναι άτοπο , αφού μεταξύ των ακεραίων $f(\kappa)$, $f(\lambda)$ υπάρχουν ρητοί και άρρητοι που δεν ανήκουν στο $\mathbf{Z}$.

$$\beta) \text{ Παρατηρούμε ότι : } g(x) = \frac{3(2f^2(x) + f(x) + 1)}{(3f(x) - 2)(2f^2(x) + f(x) + 1)} = \frac{3}{(3f(x) - 2)} .$$

Πρέπει $3f(x) - 2 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{2}{3}$, που ισχύει για κάθε $x \in [0, 10]$, αφού η

f παίρνει τιμές στο $\mathbf{Z}$. Άρα $Dg = [0, 10]$.

Για να είναι $g(x) \in \mathbf{Z}$ πρέπει $3f(x) - 2 = 1$ ή -1 ή 3 ή -3 . Η μόνη περίπτωση που δίνει $f(x) \in \mathbf{Z}$ είναι $f(x) = 1$, οπότε $g(x) = 3$.

$\gamma)$ Είναι $\alpha(t) = 2^{3t+5}$, $\beta(t) = 2^{3t+4}$, $\gamma(t) = 2^{3t+2}$, $t \in [0, 10]$. Από το 2^ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε $(M\Delta)(t) = \frac{\beta^2(t) - \gamma^2(t)}{2\alpha(t)} = 2^{3t+2} - 2^{3t-2}$, επομένως

$$(M\Delta)'(t) = 3 \cdot \ln 2 [2^{3t+2} - 2^{3t-2}] \text{ και } (M\Delta)'(1) = 90 \cdot \ln 2 .$$

39) α) Για $y = 0$: $f(x^2) = xf(x)$. Αν $\deg f(x) = v$ ο βαθμός του $f(x)$ τότε $\deg f(x^2) = 2v$ και $\deg [xf(x)] = v + 1$. Όμως πρέπει $\deg f(x^2) = \deg [xf(x)] \Leftrightarrow v = 1$. Άρα $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha \neq 0$. Η σχέση $f(x^2) = xf(x)$ γράφεται $\alpha x^2 + \beta = x(\alpha x + \beta) \Leftrightarrow \alpha x^2 + \beta = \alpha x^2 + \beta x \Leftrightarrow \beta = 0$ (ισότητα πολυωνύμων) . Άρα $f(x) = \alpha x$, $\alpha \neq 0$. Από την $f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$ προκύπτει $\alpha = 1$. Επομένως $f(x) = x$.

$$\beta) \int_0^1 \sqrt{1 - (f(t))^2} dt = \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{4} \text{ (βλέπε άσκηση 19α) .}$$

$$\begin{aligned} \gamma) \int_{-2}^{-1} \sqrt{-(x^2 + 4x + 3)} dx &= \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 - (x^2 + 4x + 4)} dx = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 - (x+2)^2} dx \stackrel{x+2=t}{=} \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{\pi}{4} , \text{ σύμφωνα με το } (\beta) . \end{aligned}$$

40) α) Έστω $f(x) = \eta\mu x - x + \frac{1}{6}x^3$, $x \geq 0$. Είναι $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 + \frac{1}{2}x^2$,

$f''(x) = -\eta\mu x + x > 0$ για $x > 0$ (για κάθε $x \geq 0$ είναι $|\eta\mu x| \leq x \Rightarrow \eta\mu x \leq x$,
 με το = να ισχύει μόνο όταν $x = 0$). Η f' είναι γνησίως αύξουσα οπότε
 για κάθε $x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα
 οπότε για κάθε $x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

β) Χωρίζουμε το αρχικό τετράγωνο σε 9 ίσα τετράγωνα πλευράς 2. Δύο
 τουλάχιστον από τα 10 σημεία θα βρίσκονται στο ίδιο τετράγωνο πλευράς 2
 άρα η μέγιστη απόσταση αυτών των δύο θα είναι ίση με τη διαγώνιο του
 τετραγώνου, δηλαδή ίση με $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Υπάρχουν λοιπόν δύο
 τουλάχιστον σημεία A_i, A_j ($i \neq j$) τέτοια ώστε $0 < D_{ij} \leq 2\sqrt{2}$. Από το (α)

έχουμε για κάθε $x > 0$: $6\eta\mu x > 6x - x^3 \Rightarrow e^{6\eta\mu x} > e^{6x - x^3} \Rightarrow$

$$\int_{2\sqrt{2}}^{D_{ij}} e^{6\eta\mu t} dt \leq \int_{2\sqrt{2}}^{D_{ij}} e^{6t - t^3} dt.$$