

ΚΕΡΑΤΟΚΑΜΟΧΗΤΟ

ΑΝΕΣΤΗΣ ΤΣΟΜΙΔΗΣ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

1) ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

1. Οι παρακάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού το οποίο ρίξαμε 20 φορές.

5	5	5	1	2	5	4	3	2	3
1	3	6	4	1	4	6	6	5	4

i) Να κατασκευάσετε πίνακα

α) συχνοτήτων

β) σχετικών συχνοτήτων

γ) αθροιστικών συχνοτήτων

δ) αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

ii) Να βρείτε το ποσοστό (%) των ενδείξεων που είναι μεγαλύτερες του 3 .

2. Χρησιμοποιώντας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων που δίνει την κατανομή συχνοτήτων 200 οικογενειών ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, να βρεθεί ο αριθμός και το ποσοστό των οικογενειών που έχουν

α) τουλάχιστον 2 παιδιά

β) πάνω από 4 παιδιά

γ) από 3 έως και 5 παιδιά

δ) το πολύ 5 παιδιά

Αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5	6	ΣΥΝΟΛΟ
Αριθμός οικογενειών (v_i)	20	40	60	32	20	4	24	200

3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
0	9	0,3		
1				0,5
3				
ΣΥΝΟΛΟ				

4. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i	$F_i\%$
2		0,4			
5	70	0,35			
7					
ΣΥΝΟΛΟ					

5. Να συμπληρωθεί ο πίνακας, ο οποίος παρουσιάζει τους ανεξεταστέους μαθητές της Α΄ τάξης σε κάποιο Λύκειο:

Μαθήματα (x_i)	v_i	f_i %
Αρχαία Ελληνικά	5	
Νέα Ελληνικά		5
Αγγλικά	5	
Μαθηματικά	40	
Φυσική	20	25
Χημεία		
ΣΥΝΟΛΟ		

Να κάνετε τα ραβδογράμματα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα .

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x_i	v_i	f_i	N_i	F_i
1	8	0,4		
2			12	
3	5			
4				
5		0,1		
ΣΥΝΟΛΟ				

Να κάνετε τα διαγράμματα συχνοτήτων, σχετικών συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων, αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα .

7. Να παρουσιάσετε γραφικά τα παρακάτω δεδομένα , χρησιμοποιώντας 2 διαφορετικούς τρόπους .

ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΟΙΚΗΣΗΣ 200 ΔΙΑΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

ΙΔΙΟΚΤΗΤΑ	110
ΕΝΟΙΚΙΑΖΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΙΔΙΩΤΕΣ	68
ΕΝΟΙΚΙΑΖΟΜΕΝΑ ΑΠΟ ΤΟ ΚΡΑΤΟΣ	10
ΑΛΛΟΙ ΤΡΟΠΟΙ	12

8. Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνονται οι εξαγωγές της χώρας μας, κάποιου έτους, ανάλογα με το μέσο μεταφοράς. Η γωνία του κυκλικού τομέα για μέσο μεταφοράς “θαλασσίως” είναι 108° . Το 15 % της αξίας των εξαγωγών έγινε “σιδηροδρομικώς”. Οι μεταφορές που έγιναν “οδικώς” ήταν τετραπλάσιες σε αξία από αυτές που έγιναν “αεροπορικώς”.

α) Να μετατρέψετε το κυκλικό διάγραμμα σε ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.

β) Αν η συνολική αξία των εξαγωγών ήταν 300.000.000 €, να βρείτε την αξία των εξαγωγών για κάθε μέσο μεταφοράς.

9. Η τιμή 30 στερεοφωνικών μιας αποθήκης σε € έχει ως εξής :

500	510	590	580	680	700	750	610	650	800
1000	1020	990	710	750	760	900	900	900	900
940	800	800	800	800	820	820	830	850	910

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

ΚΛΑΣΕΙΣ	ΔΙΑΛΟΓΗ	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$
500-590					
590-680					
680-770					
770-860					
860-950					
950-1040					
ΣΥΝΟΛΟ					

β) Να κατασκευάσετε τα παρακάτω ιστογράμματα και τα αντίστοιχα πολύγωνα :

i) συχνοτήτων

ii) σχετικών συχνοτήτων

iii) αθροιστικών συχνοτήτων **iv)** αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων

γ) Να βρείτε (με τη βοήθεια του πολυγώνου αθροιστικών σχετ. συχν.) :

i) την τιμή εκείνη κάτω από την οποία ανήκει το 30% των στερεοφωνικών

ii) το ποσοστό των στερεοφωνικών που έχουν τιμή μέχρι 900 € .

10. Σε μια έρευνα μεταξύ 500 ανέργων για το χρόνο σε μήνες που είναι άνεργοι προέκυψε ο παρακάτω πίνακας:

Χρόνος ανεργίας	n_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[0, 12)		30	
[12, 24)		50	
[24, 36)			
ΣΥΝΟΛΟ			

- α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα.
 β) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.
 γ) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.
 δ) Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα .
 ε) Πόσοι άνεργοι έχουν χρόνο ανεργίας πάνω από 18 μήνες ;

11. Δίνεται ένα σύνολο από 300 παρατηρήσεις (βαθμολογίες μαθητών με άριστα το 20 και με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου). Μας ζητούν να ομαδοποιήσουμε τα δεδομένα σε 9 κλάσεις, γνωρίζοντας ότι η μεγαλύτερη βαθμολογία είναι 19,9 και η μικρότερη 3,3. Να βρείτε το πλάτος κάθε κλάσης και να τις γράψετε με τη μορφή διαστημάτων.

12. Το βάρος ενός ζώου κατά τους πρώτους 8 μήνες της ζωής του φαίνεται στον πίνακα:

Μήνες	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Βάρος σε κιλά	2	3	4	5,5	6	7	9	10,5	12

Να κάνετε το χρονόγραμμα της εξέλιξης του βάρους του.

13. i) Δίνονται οι χιλιομετρικές αποστάσεις κάποιων χωριών από μια πόλη Α:

10 4 2 5 2 7 10 2 10 2

ii) Δίνονται οι βαθμολογίες κάποιων μαθητών στα Μαθηματικά:

12 18 13 20 17

Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί η μέση τιμή \bar{x} και η διάμεσος δ .

14. Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{x} και η διάμεσος δ της μεταβλητής X της οποίας οι τιμές φαίνονται στον παρακάτω πίνακα :

x_i	3	4	5	6
n_i	10	16	14	20

15. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι βαθμοί ενός μαθητή σε κάποια μαθήματα που απαιτούνται για την εισαγωγή του σε κάποια σχολή, καθώς και οι αντίστοιχοι συντελεστές βαρύτητας. Να βρεθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΦΥΣΙΚΗ	ΧΗΜΕΙΑ	ΒΙΟΛΟΓΙΑ
(x_i) ΒΑΘΜΟΣ	15	10	20	19
(w_i) ΣΥΝΤ.ΒΑΡ.	3	4	2	1

16. Σε έναν έλεγχο φορτίου μήλων ως προς το βάρος τους προέκυψε η παρακάτω ομαδοποιημένη κατανομή συχνοτήτων :

ΒΑΡΟΣ (gr)	v_i	f_i %	N_i	F_i %
20-40	5			
40-60	5			
60-80	10			
80-100	20			
100-120	10			
ΣΥΝΟΛΟ				

α) Να συμπληρωθεί ο παραπάνω πίνακας.

β) Να βρεθεί η μέση τιμή.

γ) Να βρεθεί η διάμεσος.

17. Το μέσο εισόδημα 5 οικογενειών είναι: 600,750, 1200, 810, 3000 (σε ευρώ).

Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Για το δείγμα αυτό, ποιο μέτρο θέσης είναι καταλληλότερο;

18. Διαθέτουμε ένα δείγμα 50 παρατηρήσεων $t_1, t_2, t_3, \dots, t_{50}$. Είναι γνωστό ότι η μέση τιμή όλων των παρατηρήσεων είναι 5,48, η μέση τιμή των t_1, t_2, \dots, t_{10} είναι 5, ενώ η μέση τιμή των $t_{11}, t_{12}, \dots, t_{28}$ είναι 10. Να βρείτε τη μέση τιμή των $t_{29}, t_{30}, \dots, t_{50}$.

19. Για το ακόλουθο δείγμα

5 6 7 3 5 7 8 6 7

να βρείτε :

α) το εύρος R

β) τη διακύμανση S^2

γ) την τυπική απόκλιση S

δ) τον συντελεστή μεταβολής CV.

20. Για τη μεταβλητή X δίνεται ο πίνακας :

x_i	1	2	3	4	ΣΥΝΟΛΟ
v_i	2	5	2	1	10

Να βρείτε :

- α) τη μέση τιμή \bar{x} β) τη διακύμανση S^2 γ) την τυπική απόκλιση S
δ) το συντελεστή μεταβολής CV . Είναι το δείγμα ομοιογενές ;

21. Σε μια κανονική κατανομή η μέση τιμή είναι 75 και η τυπική απόκλιση 5.

Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκεται μεταξύ :

- α) 70 και 80 β) 70 και 85 γ) 65 και 75 δ) πάνω από 85 ε) κάτω από 70.

22. Για τα δεδομένα του παρακάτω πίνακα να βρείτε : \bar{x} , δ , S , CV .

x_i	1	2	3	4
$f_i \%$	40	20	25	15

23. Εξετάζουμε ένα δείγμα μαθητών ενός σχολείου ως προς τη βαθμολογία τους σ' ένα διαγώνισμα . Η μέση τιμή βρέθηκε 15 και η τυπική απόκλιση 1.

α) Αν η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξηθεί κατά 2 να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση.

β) Ομοίως αν η βαθμολογία κάθε μαθητή αυξηθεί κατά 10%.

24. Αν η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι 0, τι συμπέρασμα προκύπτει για τις παρατηρήσεις αυτές ; (δικαιολόγηση)

25. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες (ώρα 12:00) που παρατηρήθηκαν σε μια πόλη της Ελλάδας το μήνα Νοέμβριο και οι αντίστοιχες συχνότητες .

ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΕΣ	ΣΥΧΝΟΤΗΤΑ (ΑΡΙΘΜΟΣ ΗΜΕΡΩΝ)
-7	5
-3	10
-1	6
1	7
5	2
ΣΥΝΟΛΟ	30

α) Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο .

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής .

γ) Αν οι θερμοκρασίες (ώρα 12:00) που παρατηρήθηκαν στην ίδια πόλη το μήνα Απρίλιο , προκύπτουν από τις θερμοκρασίες (ώρα 12:00) που παρατηρήθηκαν το μήνα Νοέμβριο , με την πρόσθεση μιας σταθεράς c , να βρείτε για ποιες τιμές της σταθεράς c το δείγμα των θερμοκρασιών του Απριλίου είναι ομοιογενές.

26. Σε μια έρευνα που έγινε στους εργατές μιας βιομηχανίας , για το χρόνο που χρειάζονται για να τελειώσουν μια συγκεκριμένη εργασία , βρέθηκε ότι το 84% περίπου χρειάζεται λιγότερο από 33 λεπτά , ενώ το 97,5% περίπου χρειάζεται περισσότερο από 24 λεπτά . Υποθέτουμε ότι η κατανομή του χρόνου είναι κατά προσέγγιση κανονική .

α) Να βρείτε το μέσο χρόνο εκτέλεσης της εργασίας καθώς και την αντίστοιχη τυπική απόκλιση .

β) Μια μέρα λόγω βλάβης σε κάποιο μηχάνημα , κάθε εργάτης καθυστέρησε να τελειώσει την παραπάνω εργασία κατά 4 λεπτά . Να εξετάσετε αν το νέο δείγμα είναι ομοιογενές .

27. Οι παρακάτω αριθμοί είναι οι πόντοι δύο παικτών του μπάσκετ στους 5 αγώνες που έπαιξαν κατά τη διάρκεια ενός τουρνουά .

Παίκτης Α	12	14	13	16	15
Παίκτης Β	14	10	17	18	11

Ποιον από τους δύο παίκτες θα επιλέγατε για μια ομάδα που ενδιαφέρεται για παίκτη-σκόρερ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

28. Έστω x_1, x_2, \dots, x_n n παρατηρήσεις με μέση τιμή α και τυπική απόκλιση $\beta \neq 0$.

Να δείξετε ότι οι n παρατηρήσεις $\frac{x_1 - \alpha}{\beta}, \frac{x_2 - \alpha}{\beta}, \dots, \frac{x_n - \alpha}{\beta}$ έχουν μέση τιμή 0

και τυπική απόκλιση 1 .

29. Ο Γιώργος πήρε στο πρώτο τεστ των μαθηματικών 11 με άριστα το 20. Σε αυτό το τεστ η μέση βαθμολογία του τμήματός του ήταν 9 και η τυπική απόκλιση 3 . Στο δεύτερο τεστ , ο Γιώργος πήρε 48 με άριστα το 100 . Σε αυτό το τεστ η μέση βαθμολογία του τμήματός του ήταν 45 και η τυπική απόκλιση 2.

Σε ποιο τεστ πήγε καλύτερα ο Γιώργος ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας .

Η κατανομή και για τα δύο τεστ είναι κατά προσέγγιση κανονική .

2) ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

- 1) Δύο ομάδες, ο ΠΑΟΚ και ο ΑΡΗΣ παίζουν μεταξύ τους στην φάση play-off του πρωταθλήματος basket (οι αγώνες δεν τελειώνουν ποτέ με ισοπαλία). Νικήτρια θεωρείται η ομάδα που θα νικήσει σε δύο αγώνες στη σειρά ή σε δύο αγώνες ανεξαρτήτως σειράς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων :
- (θεωρούμε τα απλά ενδεχόμενα ισοπίθανα)
- α) Ακριβώς μία νίκη του ΠΑΟΚ .
 - β) Καμία νίκη του ΠΑΟΚ .
 - γ) Τουλάχιστον μία νίκη του ΠΑΟΚ .
 - δ) Να περάσει ο ΠΑΟΚ στον επόμενο γύρο .
- 2) Μια μέρα με πολύ άσχημες καιρικές συνθήκες η πιθανότητα να λειτουργήσουν τα υπεραστικά λεωφορεία είναι 40%, η πιθανότητα να μη λειτουργήσουν τα τρένα είναι 70% και η πιθανότητα να λειτουργήσει ένα τουλάχιστον συγκοινωνιακό μέσο από τα προηγούμενα είναι 60%.
- A) Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν συγχρόνως και τα δύο;
 - B) Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσει μόνο ένα από τα δύο ;
 - Γ) Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσουν μόνο τα τρένα ;
 - Δ) Ποια η πιθανότητα να μην λειτουργήσει κανένα από τα δύο ;
 - E) Ποια η πιθανότητα να λειτουργήσει το πολύ ένα από τα δύο ;
- 3) Σ' ένα συρτάρι της ντουλάπας μας υπάρχουν 4 ζευγάρια ίδιες μαύρες κάλτσες και 2 ζευγάρια λευκές. Επιλέγουμε ταυτόχρονα 7 κάλτσες χωρίς να βλέπουμε το χρώμα τους. Ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε έτσι επιλέξει 2 ζευγάρια του ίδιου χρώματος;
- 4) Στην τάξη της Γ' Λυκείου υπάρχουν 100 αγόρια και 45 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{2}$ και από τα κορίτσια το $\frac{1}{3}$ είναι άριστοι στα Μαθηματικά. Καλούμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια η πιθανότητα:
- α) Να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά .
 - β) Να είναι αγόρι .
 - γ) Να είναι αγόρι άριστο στα Μαθηματικά .
 - δ) Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά .

- 5) Ρίχνουμε ένα ζάρι (ειδικής κατασκευής) για το οποίο έχουμε την πληροφορία ότι φέρνει ζυγά νούμερα δύο φορές συχνότερα απ' ότι μονά. Ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε ζυγό νούμερο;
- 6) Σε ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα η πιθανότητα να οφείλεται σε αδεξιότητα του οδηγού είναι 60% ,να μην οφείλεται σε βλάβη αυτοκινήτου 80%, να οφείλεται και στους δύο λόγους 5%.Να βρείτε την πιθανότητα το ατύχημα να οφείλεται :
- α) σε βλάβη αυτοκινήτου
- β) τουλάχιστον σε έναν από τους δύο λόγους
- γ) μόνο σε έναν από τους δύο λόγους
- δ) το πολύ σε έναν από τους δύο λόγους.
- 7) Ο παρακάτω πίνακας αναφέρεται στο κάπνισμα και τα προβλήματα υγείας των κατοίκων μιας πόλης (εμφανίζονται ποσοστά επί του συνόλου των κατοίκων).

	<i>Καπνιστές</i>	<i>Μη καπνιστές</i>	ΣΥΝΟΛΟ
<i>με προβλήματα υγείας</i>	10%		15%
<i>χωρίς προβλήματα υγείας</i>	30%		
ΣΥΝΟΛΟ		60%	100%

- Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο. Να βρεθεί η πιθανότητα
- α) Να είναι καπνιστής.
- β) Να είναι μη καπνιστής με προβλήματα υγείας.
- γ) Να μην έχει προβλήματα υγείας ή να είναι καπνιστής .
- δ) Να είναι καπνιστής με προβλήματα υγείας ή μη καπνιστής .
- 8) Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.Αν $A = \{\omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_2, \omega_4\}$ και ισχύουν $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,7$ και $P(\omega_2) = 0,4$ να βρείτε την $P(\omega_1)$.
- 9) Είναι γνωστό ότι από n σπόρους που φυτεύτηκαν θα φυτρώσει το 90% .Από τα φυτά που θα φυτρώσουν μόνο το 80% θα ζήσει μέχρι και να καρποφορήσει .
Αν φυτέψουμε ένα σπόρο , ποια είναι η πιθανότητα των ενδεχομένων :
A: « ο σπόρος να μην φυτρώσει » , B: « ο σπόρος να φυτρώσει αλλά να πεθάνει »
Γ: « ο σπόρος να καρποφορήσει » .

10) Ρίχνουμε ένα ζάρι και κατόπιν παίρνουμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Ποια είναι η πιθανότητα το ζάρι να δείξει τον αριθμό 4 και το τραπουλόχαρτο να είναι :

α) 4 μπαστούνι ; β) 4 οποιουδήποτε είδους ;

11) Για τα ενδεχόμενα A, B, Γ ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :

$P(A)=0,1$, $P(B)=0,2$, $P(\Gamma)=0,3$. Αποδείξτε ότι :

i) $P(A \cup B) \leq 0,3$

ii) $P(A \cup B \cup \Gamma) \leq 0,6$

iii) $P(A' \cap B') \geq 0,7$.

12) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω με $P(A)=0,7$, $P(B)=0,6$.

α) να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

β) να δείξετε ότι : I) $P(A \cup B) \geq 0,7$

II) $P(A \cap B) \leq 0,6$

III) $P(A \cap B) \geq 0,3$.

13) Σε ένα ζάρι ειδικής κατασκευής ($\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$) ισχύει:

$P(1)=P(2)$, $P(3)=P(4)=2P(1)$, $P(5)=P(6)=2P(3)$.

α) Να βρείτε την πιθανότητα εμφάνισης κάθε αποτελέσματος.

β) Αν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$, $\Gamma = \{3,4,5\}$, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν το πολύ δύο από τα A, B, Γ .

14) Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δ.χ. Ω με $P(A) \neq 0$ και $P(B) \neq 1$.

Αποδείξτε ότι :

α) $P(A-B) + P(B-A) \geq P(A \cup B) - 2P(A \cap B)$.

β) $\frac{P(A)}{P(B')} + \frac{1-P(B)}{1-P(A')} \geq 2$.