ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Παραδείγματα και ασκήσεις

Ανέστης Τσομίδης

Κατερίνη 2017

ISBN: 978-960-93-9421-5

Πρόλογος

Οι παρούσες σημειώσεις έχουν ως κύριο στόχο να παρουσιάσουν τις διάφορες κατηγορίες εξισώσεων που συναντά ο μαθητής σε όλο το φάσμα της ύλης των μαθηματικών των δύο πρώτων τάξεων του λυκείου. Έτσι ο μαθητής που ενδιαφέρεται να εξεταστεί στα μαθηματικά στην τρίτη λυκείου, μπορεί στο ξεκίνημα της προετοιμασίας του, να κάνει μια καλή επανάληψη σε αυτό το πεδίο.

Σε κάθε ενότητα παρουσιάζονται τα βασικά σημεία της θεωρίας, δίνονται αρκετά λυμένα παραδείγματα και ακολουθούν ασκήσεις για λύση. Τα περισσότερα παραδείγματα και οι ασκήσεις ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις σημερινού μέσου μαθητή του λυκείου.

Τα παραδείγματα και οι ασκήσεις έχουν ενιαία αρίθμηση σε όλο το εύρος των σημειώσεων. Για τις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον LaTeX με κειμενογράφο Texmaker σε συνδυασμό με το Miktex και για το κείμενο η γραμματοσειρά kerkis (Βλ. http://myria.math.aegean.gr/kerkis/) . Όλα τα παραπάνω λογισμικά διανέμονται δωρεάν μέσω του διαδικτύου.

Απαγορεύεται η χρήση όλου ή μέρους του περιεχομένου των σημειώσεων αυτών για εμπορικούς σκοπούς.

Ανέστης Τσομίδης
Αύγουστος 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εξισώσεις $1^{\text{ου}}$ βαθμού

Μια εξίσωση της μορφής $a \cdot x + \beta = 0$ με $a \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση $1^{\text{ου}}$ βαθμού με άγνωστο x και συντελεστές a, β. Η εξίσωση αυτή έχει μοναδική λύση $x = -\beta/a$.
Αν $a = 0$ και $\beta \neq 0$ τότε έχουμε την εξίσωση $0 \cdot x + \beta = 0$, η οποία είναι αδύνατη.
Αν $a = 0$ και $\beta = 0$ τότε έχουμε την εξίσωση $0 \cdot x + 0 = 0$, η οποία είναι αόριστη, δηλαδή έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα 1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x - 5 = x + 9$ β) $3(x-2) + 2x = 5x - 3$ γ) $2x - 3 = 2(x+1) - 5$

Λύση. α) Χωρίζουμε γνωστούς και αγνώστους όρους, κάνουμε αναγωγή ομοίων όρων και τελικά διαιρούμε με το συντελεστή του αγνώστου.

$$3x - 5 = x + 9 \Leftrightarrow 3x - x = 9 + 5 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7.$$

β) Επειδή η εξίσωση περιέχει παρένθεση ξεκινάμε με την απαλοιφή της. Επομένως:

$$3(x-2) + 2x = 5x - 3 \Leftrightarrow 3x - 6 + 2x = 5x - 3 \Leftrightarrow 3x + 2x - 5x = -3 + 6 \Leftrightarrow 0x = 3$$

που είναι αδύνατη.
γ) Όπως και στην εξίσωση του (β) ερωτήματος ξεκινάμε με την απαλοιφή της παρένθεσης.

$$2x - 3 = 2(x+1) - 5 \Leftrightarrow 2x - 3 = 2x + 2 - 5 \Leftrightarrow 2x - 2x = 2 - 5 + 3 \Leftrightarrow 0x = 0$$

που είναι αόριστη, δηλαδή η εξίσωση έχει λύση κάθε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα 2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{3x-1}{2} - \dfrac{2-x}{4} = \dfrac{x}{6} - 1$ β) $\dfrac{-3x+5}{3} = \dfrac{x-4}{2}$ γ) $2 - \left(\dfrac{x}{2} - 4\right) = \dfrac{x}{3}$

Λύση. α) Επειδή στην εξίσωση αυτή εμφανίζονται κλάσματα, ξεκινάμε με απαλοιφή παρονομαστών (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με το ΕΚΠ των παρονομαστών).

$$\frac{3x-1}{2} - \frac{2-x}{4} = \frac{x}{6} - 1 \Leftrightarrow 12 \cdot \left(\frac{3x-1}{2} - \frac{2-x}{4}\right) = 12 \cdot \left(\frac{x}{6} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$12\frac{3x-1}{2}-12\frac{2-x}{4}=12\frac{x}{6}-12\cdot 1 \Leftrightarrow 6(3x-1)-3(2-x)=2x-12 \Leftrightarrow$$
$$18x-6-6+3x=2x-12 \Leftrightarrow 18x+3x-2x=-12+6+6 \Leftrightarrow 19x=0 \Leftrightarrow x=0.$$

β) Στην περίπτωση που έχουμε ισότητα κλασμάτων μπορούμε εκτός από την απαλοιφή παρονομαστών να αξιοποιήσουμε και την χιαστί ιδιότητα, δηλαδή την ισοδυναμία:

$$\frac{a}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta} \Leftrightarrow a\delta=\beta\gamma\,, \quad \text{εφόσον } \beta,\delta\neq 0.$$

Επομένως

$$\frac{-3x+5}{3}=\frac{x-4}{2} \Leftrightarrow 2(-3x+5)=3(x-4) \Leftrightarrow -6x+10=3x-12 \Leftrightarrow x=\frac{22}{9}.$$

γ) Αν έχουμε κλάσματα και παρενθέσεις συνήθως ξεκινάμε με απαλοιφή παρενθέσεων.

$$2-\left(\frac{x}{2}-4\right)=\frac{x}{3} \Leftrightarrow 6-\frac{x}{2}=\frac{x}{3} \Leftrightarrow 6\cdot 6-6\cdot\frac{x}{2}=6\cdot\frac{x}{3} \Leftrightarrow 36-3x=2x \Leftrightarrow x=\frac{36}{5}.$$

Παράδειγμα 3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-2}{14}+\frac{x-3}{13}+\frac{x-4}{12}=\frac{x-14}{2}+\frac{x-13}{3}+\frac{x-12}{4}$$

Λύση. Προφανώς μια απαλοιφή παρονομαστών στην εξίσωση αυτή θα οδηγούσε σε πάρα πολλές πράξεις. Παρατηρούμε ότι $2+14=16$, $3+13=16$ και $4+12=16$. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\frac{x-16+14}{14}+\frac{x-16+13}{13}+\frac{x-16+12}{12}=\frac{x-16+2}{2}+\frac{x-16+3}{3}+\frac{x-16+4}{4} \Leftrightarrow$$
$$\frac{x-16}{14}+1+\frac{x-16}{13}+1+\frac{x-16}{12}+1=\frac{x-16}{2}+1+\frac{x-16}{3}+1+\frac{x-16}{4}+1 \Leftrightarrow$$
$$(x-16)\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\right)=(x-16)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow$$
$$(x-16)\left[\left(\frac{1}{14}+\frac{1}{13}+\frac{1}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]=0.$$

Επειδή $1/14<1/2$, $1/13<1/3$ και $1/12<1/4$, το περιεχόμενο της αγκύλης είναι αρνητικός αριθμός, άρα και μη μηδενικός. Συνεπώς η τελευταία εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x-16=0 \Leftrightarrow x=16$.

Παράδειγμα 4. Να λύσετε ως προς ρ τον τύπο της Φυσικής που ακολουθεί:

$$R=\frac{\rho\cdot l}{A}.$$

Λύση. Εργαζόμαστε όπως στις υπόλοιπες πρωτοβάθμιες εξισώσεις θεωρώντας ως άγνωστο το ρ. Τα υπόλοιπα γράμματα παίζουν τον ρόλο γνωστών σταθερών αριθμών. Επομένως

$$R=\frac{\rho\cdot l}{A} \Leftrightarrow A\cdot R=A\cdot\frac{\rho\cdot l}{A} \Leftrightarrow A\cdot R=\rho\cdot l \Leftrightarrow \rho=\frac{A\cdot R}{l}.$$

Στην παραπάνω λύση προφανώς θεωρήσαμε ότι οι αριθμοί A και l είναι μη μηδενικοί.

Παράδειγμα 5. Να λύσετε την παρακάτω εξίσωση με άγνωστο x και παράμετρο λ :

$$\lambda^2 x - 4\lambda = 9x + 12.$$

Λύση. Αρχικά χωρίζουμε γνωστούς, αγνώστους και παραγοντοποιούμε τα δύο μέλη της εξίσωσης.

$$\lambda^2 x - 4\lambda = 9x + 12 \Leftrightarrow \lambda^2 x - 9x = 12 + 4\lambda \Leftrightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 3)x = 4(\lambda + 3).$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε για ποιες τιμές του λ μηδενίζεται ο συντελεστής του αγνώστου.

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda - 3 = 0 \text{ ή } \lambda + 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Τελικά διακρίνουμε περιπτώσεις για την παράμετρο λ έτσι ώστε να μην μηδενίζεται ή να μηδενίζεται ο συντελεστής του αγνώστου.
Αν $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$ τότε $(\lambda - 3)(\lambda + 3) \neq 0$, οπότε

$$x = \frac{4(\lambda + 3)}{(\lambda - 3)(\lambda + 3)} = \frac{4}{\lambda - 3}.$$

Αν $\lambda = 3$ τότε έχουμε $(3 - 3)(3 + 3)x = 4(3 + 3) \Leftrightarrow 0x = 24$, που είναι αδύνατη.
Αν $\lambda = -3$ τότε έχουμε $(-3 - 3)(-3 + 3)x = 4(-3 + 3) \Leftrightarrow 0x = 0$, η οποία αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα 6. Θεωρούμε την εξίσωση $(\lambda - 2)x - (1 - 3\lambda)x = 5 + 2\lambda$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο αριθμός -2 να είναι λύση της εξίσωσης.
Λύση. Ο αριθμός -2 είναι λύση της εξίσωσης αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή

$$(\lambda - 2)(-2) - (1 - 3\lambda)(-2) = 5 + 2\lambda \Leftrightarrow -2\lambda + 4 + 2 - 6\lambda = 5 + 2\lambda \Leftrightarrow -10\lambda = -1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{10}.$$

Παράδειγμα 7. Σε ένα κριτήριο αξιολόγησης με 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες, για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρείται 1 μονάδα, ενώ αν σε κάποια ερώτηση δεν δοθεί κάποια απάντηση ούτε δίνονται ούτε αφαιρούνται μονάδες. Ο Γιώργος δεν έδωσε κάποια απάντηση σε 3 ερωτήσεις και πήρε στο κριτήριο αυτό 61 μονάδες. Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά;
Λύση. Στα προβλήματα συμβολίζουμε με x το ζητούμενο, γράφουμε σύμφωνα με τα δεδομένα μια εξίσωση η οποία περιγράφει το πρόβλημα και στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση αυτή. Ελέγχουμε στο τέλος αν η λύση που βρήκαμε είναι αποδεκτή.
Στο συγκεκριμένο πρόβλημα συμβολίζουμε με x το πλήθος των σωστών απαντήσεων του Γιώργου. Τότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων είναι $20 - x - 3 = 17 - x$. Ο Γιώργος παίρνει $x \cdot 5$ μονάδες για τις σωστές απαντήσεις και χάνει $(17 - x) \cdot 1$ για τις λανθασμένες. Άρα προκύπτει η εξίσωση

$$5x - 1(17 - x) = 61 \Leftrightarrow 5x - 17 + x = 61 \Leftrightarrow 6x = 78 \Leftrightarrow x = 13.$$

Η λύση $x = 13$ σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος είναι αποδεκτή. (Για παράδειγμα δεν θα δεχόμασταν ως λύση ένα φυσικό μεγαλύτερο του 20.)

Ασκήσεις για λύση

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2x - 5 = 9$ β) $3(x-2) = 1 - 2(x-4)$ γ) $2(3-4x)+1 = 7-8x$ δ) $2(1-x) = 3-2x$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\dfrac{x+1}{2} - \dfrac{2x}{5} = x - 4$ β) $4\left(\dfrac{x-1}{3} - \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{4} = \dfrac{x}{3} + 2$ γ) $\dfrac{4x-1}{8} = \dfrac{x-1}{2}$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-11}{89} + \frac{x-13}{87} + \frac{x-15}{85} = \frac{x-89}{11} + \frac{x-87}{13} + \frac{x-85}{15}$$

4. Να λύσετε τους παρακάτω τύπους ως προς R, a, R_1 και m αντίστοιχα:

α) $F = m\dfrac{v^2}{R}$ β) $V = V_0(1 + a\theta)$ γ) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ δ) $I = \dfrac{mnE}{mR_1 + nR_2}$

5. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$:

α) $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - \lambda$ β) $\left(\lambda^2 - 2\lambda\right)x = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ γ) $\lambda^2 x - 2\lambda = 25x + 10$

6. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις για τις διάφορες τιμές των παραμέτρων $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

α) $(\lambda - \mu)x = \lambda^2 - \mu^2$ β) $(\lambda - 2\mu)x + \mu = -3\lambda x + 5$ γ) $\left(\lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2\right)x + \lambda\mu = \lambda^2$

7. Θεωρούμε την εξίσωση $(\lambda+5)x - 2(x-3\lambda) = 6 - \lambda$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο αριθμός 3 να είναι λύση της εξίσωσης.

8. Ο Γιώργος διάβασε ένα βιβλίο 300 σελίδων σε 4 ημέρες. Κάθε μέρα διάβαζε 10 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Πόσες σελίδες διάβασε την πρώτη μέρα;

9. Αγόρασε κάποιος ένα σαλόνι που αποτελείται από τρεις πολυθρόνες, ένα τραπέζι και ένα καναπέ και πλήρωσε 1470€. Αν μια πολυθρόνα κοστίζει όσο το τραπέζι και ο καναπές κοστίζει όσο 3 πολυθρόνες, να βρείτε πόσο κοστίζει κάθε πολυθρόνα και πόσο κοστίζει ο καναπές.

10. Από τους μαθητές μιας τάξης, οι μισοί πηγαίνουν στο σχολείο με τα πόδια, το $1/3$ αυτών χρησιμοποιεί ποδήλατο και τέσσερις μαθητές χρησιμοποιούν το λεωφορείο. Πόσους μαθητές έχει η τάξη αυτή;

11. Ένας πατέρας είναι 43 ετών και ο γιος του 12 ετών. Μετά από πόσα έτη η ηλικία του πατέρα θα είναι τριπλάσια από την ηλικία του γιου του;

12. Ένας δάσκαλος έδωσε σε ένα μαθητή του να προσθέσει τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς. Ο μαθητής βρήκε αποτέλεσμα 103. Απάντησε σωστά ή όχι;

13. Μια βρύση μπορεί να γεμίσει μια άδεια δεξαμενή σε 8 ώρες, μια άλλη σε 4 ώρες, ενώ μια τρίτη βρύση μπορεί να την αδειάσει όταν είναι γεμάτη σε 6 ώρες. Σε πόσες ώρες θα γεμίσει η δεξαμενή, αν είναι άδεια και ανοίξουμε ταυτόχρονα και τις τρεις βρύσες;

14. Ο Γιώργος έγραψε ένα διψήφιο φυσικό αριθμό του οποίου το ψηφίο των δεκάδων είναι τριπλάσιο από το ψηφίο των μονάδων. Αν αλλάξουμε τη θέση των ψηφίων προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 36. Ποιος είναι ο αριθμός που έγραψε ο Γιώργος;

15. Έχουμε ένα διάλυμα 50 ml περιεκτικότητας 6% σε οινόπνευμα. Πόσα ml οινοπνεύματος πρέπει να προσθέσουμε στο διάλυμα αυτό, ώστε να πάρουμε ένα νέο περιεκτικότητας 20% σε οινόπνευμα;

16. Δύο ποδήλατα A και B απέχουν μεταξύ τους 3 km. Ξεκινούν ταυτόχρονα να κινούνται ευθύγραμμα προς την ίδια κατεύθυνση από το A προς το B με σταθερές ταχύτητες 20 km/h και 15 km/h αντίστοιχα. Να βρείτε πόσα χιλιόμετρα θα έχει διανύσει το A μέχρι να φτάσει το B.

Κεφάλαιο 2

Εξισώσεις $2^{\text{ου}}$ βαθμού

Μια εξίσωση της μορφής $a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ ονομάζεται εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με άγνωστο x και συντελεστές a, β και γ. Ονομάζουμε διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής την παράσταση

$$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma.$$

- Αν $\Delta > 0$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την $x = -\beta/2a$.

- Αν $\Delta < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση $a \cdot x^2 + \beta \cdot x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, έχει ρίζες x_1, x_2 τότε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της δίνεται από τους τύπους του Vieta:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \qquad \text{και} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}.$$

Παράδειγμα 8. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $3x^2 - 7x + 2 = 0$ β) $x^2 = 6 - x$ γ) $x^2 - 4x + 4 = 0$ δ) $x^2 - x + 3 = 0$

Λύση. α) Βρίσκουμε πρώτα τη διακρίνουσα της εξίσωσης. Έχουμε $\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25$. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 3} = \frac{7 \pm 5}{6} = 2 \text{ ή } \frac{1}{3}.$$

β) Μεταφέρουμε αρχικά όλους τους όρους στο πρώτο μέλος και η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 + x - 6 = 0.$$

Έχουμε $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25$. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} = -3 \text{ ή } 2.$$

γ) Έχουμε $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$. Συνεπώς η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την

$$x = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2.$$

δ) Έχουμε $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = -11 < 0$. Συνεπώς η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 9. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(2x-1)(x+3) = 0$ β) $2x^2 - 9x = 0$ γ) $x^2 - 9 = 0$ δ) $x^2 + 3 = 0$

Λύση. α) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την επιμεριστική ιδιότητα, να κάνουμε τις πράξεις και να λύσουμε την δευτεροβάθμια εξίσωση που θα προκύψει. Επειδή εδώ έχουμε ένα γινόμενο ίσο με 0, είναι πιο εύκολο να εργαστούμε ως εξής:

$$(2x-1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0 \text{ ή } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -3.$$

β) Μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση $2x^2 - 9x + 0 = 0$ και να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό τύπο, όμως πιο εύκολο είναι να εργαστούμε με παραγοντοποίηση. Έχουμε

$$2x^2 - 9x = 0 \Leftrightarrow x(2x-9) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = \frac{9}{2}.$$

γ) Έχουμε

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ή } x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ή } x = -3.$$

δ) Επειδή $x^2 \geq 0$ έπεται ότι $x^2 + 3 > 0$, οπότε η εξίσωση $x^2 + 3 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})x + \sqrt{6} = 0$ β) $x^2 - 2016x + 2015 = 0$ γ) $2x^2 - 99x - 99^2 = 0$

Λύση. α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{2}x + \sqrt{2}\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x(x - \sqrt{3}) - \sqrt{2}(x - \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{3})(x - \sqrt{2}) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - \sqrt{3} = 0 \text{ ή } x - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3} \text{ ή } x = \sqrt{2}.$$

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 - 2015x - x + 2015 = 0 \Leftrightarrow x(x - 2015) - (x - 2015) = 0 \Leftrightarrow (x - 2015)(x - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 2015 = 0 \text{ ή } x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2015 \text{ ή } x = 1.$$

γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2 - 99x + x^2 - 99^2 = 0 \Leftrightarrow x(x - 99) + (x - 99)(x + 99) = 0 \Leftrightarrow (x - 99)(2x + 99) = 0$$
$$\Leftrightarrow x - 99 = 0 \text{ ή } 2x + 99 = 0 \Leftrightarrow x = 99 \text{ ή } x = -\frac{99}{2}.$$

Παράδειγμα 11. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x-2)(x+3)=(2x-1)(x+1)$ β) $\dfrac{x^2-x}{2}-\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{x^2-3x+1}{2}+\dfrac{x^2-1}{4}$

Λύση. α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$x^2+3x-2x-6=2x^2+2x-x-1 \Leftrightarrow x^2+x-6=2x^2+x-1 \Leftrightarrow x^2+5=0.$$

Η τελευταία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+5>0$.
β) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με 12 και η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$6(x^2-x)-4(x-1)=6(x^2-3x+1)+3(x^2-1) \Leftrightarrow 6x^2-10x+4=9x^2-18x+3$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-8x-1=0.$$

Η διακρίνουσα της τελευταίας εξίσωσης είναι $\Delta=(-8)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=76>0$. Η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{76}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{19}}{3}.$$

Παράδειγμα 12. Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις με άγνωστο x και παράμετρο a.

$$x^2-(a-4)x+3-a=0 \qquad (1) \qquad \text{και} \qquad a^2x^2-ax+2=0 \qquad (2)$$

α) Να δείξετε ότι η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου a. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση αυτή.
β) Να δείξετε ότι η (2) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου a.
Λύση. α) Η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$ αν $\Delta \geq 0$. Πράγματι

$$\Delta=(a-4)^2-4(3-a)=a^2-8a+16-12+4a=a^2-4a+4=(a-2)^2\geq 0.$$

Η εξίσωση έχει δύο ρίζες (άνισες αν $a\neq 2$ και ίσες αν $a=2$) τις

$$x_{1,2}=\frac{a-4\pm\sqrt{(a-2)^2}}{2}=\frac{a-4\pm(a-2)}{2}=a-3 \text{ ή } -1.$$

β) Αν $a=0$, τότε η (2) δίνει $2=0$ και προφανώς είναι αδύνατη. Αν $a\neq 0$, τότε η (2) είναι δευτεροβάθμια και αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta<0$. Πράγματι έχουμε

$$\Delta=(-a)^2-4\cdot a^2\cdot 2=a^2-8a^2=-7a^2<0.$$

Παράδειγμα 13. Αν $a,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $a+\beta+\gamma=0$ και $a^3+\beta^3+\gamma^3\geq 0$, να λύσετε την εξίσωση

$$3x^2-2\sqrt{a^3+\beta^3+\gamma^3}\,x+a\beta\gamma=0.$$

Λύση. Επειδή $a+\beta+\gamma=0$ θα είναι $a^3+\beta^3+\gamma^3=3a\beta\gamma$. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα

$$\Delta=\left(-2\sqrt{a^3+\beta^3+\gamma^3}\right)^2-4\cdot 3\cdot a\beta\gamma=4\left(a^3+\beta^3+\gamma^3-3a\beta\gamma\right)=4\cdot 0=0.$$

Συνεπώς η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την

$$x=\frac{\sqrt{a^3+\beta^3+\gamma^3}}{3}=\frac{\sqrt{3a\beta\gamma}}{3}.$$

Παράδειγμα 14. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ την εξίσωση

$$2x^2-4x+\lambda=0.$$

Λύση. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=(-4)^2-4\cdot 2\cdot\lambda=16-8\lambda$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
Αν $\Delta>0\Leftrightarrow\lambda<2$, τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες, τις

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8\lambda}}{2\cdot 2}=\frac{4\pm 4\sqrt{1-\frac{\lambda}{2}}}{4}=1\pm\sqrt{1-\frac{\lambda}{2}}.$$

Αν $\Delta=0\Leftrightarrow\lambda=2$, τότε η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, την $x=-(-4)/4=1$.
Αν $\Delta<0\Leftrightarrow\lambda>2$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 15. Σε μια γιορτή κάθε καλεσμένος τσούγκρισε το ποτήρι του με κάθε έναν από τους υπόλοιπους καλεσμένους. Ακούστηκαν 36 τσουγκρίσματα. Πόσοι ήταν οι καλεσμένοι;
Λύση. Ονομάζουμε x το πλήθος των καλεσμένων. Κάθε καλεσμένος τσουγκρίζει το ποτήρι του με $x-1$ καλεσμένους. Όταν ο καλεσμένος Α τσουγκρίσει το ποτήρι του με τον Β, ταυτόχρονα έχει τσουγκρίσει και ο Β το ποτήρι του με τον Α. Συνεπώς το πλήθος των τσουγκρισμάτων είναι

$$\frac{x(x-1)}{2}$$

αφού στο γινόμενο $x(x-1)$ κάθε τσούγκρισμα έχει μετρηθεί δύο φορές. Συνεπώς έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x(x-1)}{2}=36\Leftrightarrow x^2-x-72=0.$$

Λύνοντας την τελευταία βρίσκουμε $x=9$ ή $x=-8$. Δεκτή είναι μόνο η $x=9$, αφού το x είναι φυσικός αριθμός.

Παράδειγμα 16. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 9 και γινόμενο -22.
Λύση. Επειδή το άθροισμα των αριθμών είναι 9, αν x είναι ο ένας αριθμός τότε ο άλλος είναι $9-x$. Ακόμη το γινόμενο των αριθμών είναι -22 οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$x(9-x)=-22\Leftrightarrow -x^2+9x+22=0.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x=11$ οπότε $9-x=-2$ ή $x=-2$ οπότε $9-x=11$. Επομένως σε κάθε περίπτωση οι ζητούμενοι αριθμοί είναι ο 11 και ο -2.

Παράδειγμα 17. Να βρείτε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς $1/4$ και $1/5$.
Λύση. Μία τέτοια εξίσωση είναι η

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{x}{5} - \frac{x}{4} + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 9x + 1 = 0.$$

Παράδειγμα 18. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - \lambda x + 21 = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο αριθμός -3 να είναι ρίζα της εξίσωσης και στη συνέχεια να βρείτε και την άλλη ρίζα της.
Λύση. Ο -3 είναι ρίζα της εξίσωσης αν και μόνο αν την επαληθεύει, δηλαδή

$$(-3)^2 - \lambda(-3) + 21 = 0 \Leftrightarrow 3\lambda + 30 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -10.$$

Αν ρ είναι η άλλη ρίζα της εξίσωσης τότε το γινόμενο των ριζών της (τύποι Vieta) είναι

$$\rho(-3) = \frac{21}{1} \Leftrightarrow \rho = -7.$$

Σχόλιο. Θα μπορούσαμε, κάνοντας περισσότερες πράξεις, να βρούμε την άλλη ρίζα αντικαθιστώντας την τιμή $\lambda = -10$ στην εξίσωση και να τη λύσουμε χρησιμοποιώντας τον γνωστό τύπο.

Παράδειγμα 19. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + \lambda x + 18 = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες, η μία διπλάσια της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον πραγματικό αριθμό λ.
Λύση. Έστω x_1, x_2 με $x_2 = 2x_1$ οι ρίζες της εξίσωσης. Τότε από τους τύπους του Vieta έχουμε

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{18}{1} \Leftrightarrow 2x_1^2 = 18 \Leftrightarrow 2(x_1 - 3)(x_2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3 \text{ ή } x_1 = -3$$

δηλαδή $x_1 = 3$ και $x_2 = 6$ ή $x_1 = -3$ και $x_2 = -6$.
Αν $x_1 = 3$ και $x_2 = 6$ τότε $x_1 + x_2 = -\lambda/1 \Leftrightarrow \lambda = -9$, ενώ αν $x_1 = -3$ και $x_2 = -6$ τότε $x_1 + x_2 = -\lambda/1 \Leftrightarrow \lambda = 9$.

Παράδειγμα 20. Θεωρούμε την εξίσωση $-2x^2 + \lambda x - \mu = 0$, με άγνωστο x και παραμέτρους $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$.
α) Αποδείξτε ότι $\lambda^2 > 8\mu$.
β) Να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία να έχει ρίζες τις $\rho_1 = 2/x_1$, $\rho_2 = 2/x_2$.
Λύση. α) Αφού η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες θα είναι

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4(-2)(-\mu) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 > 8\mu.$$

β) Μία τέτοια εξίσωση είναι η

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0.$$

Συνεπώς, χρειάζεται αρχικά να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\rho_1 + \rho_2$ και $\rho_1 \cdot \rho_2$. Έχουμε

$$\rho_1 + \rho_2 = \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{2\lambda}{\mu} \quad \text{και} \quad \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{2}{x_1} \cdot \frac{2}{x_2} = \frac{4}{x_1 x_2} = \frac{8}{\mu}$$

αφού $x_1 + x_2 = -\lambda/(-2) = \lambda/2$ και $x_1 x_2 = -\mu/(-2) = \mu/2$. Η εξίσωση που ζητάμε είναι

$$x^2 - (\rho_1 + \rho_2)x + \rho_1 \cdot \rho_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{2\lambda}{\mu}x + \frac{8}{\mu} = 0 \Leftrightarrow \mu x^2 - 2\lambda x + 8 = 0.$$

Παράδειγμα 21. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 - 6x + 3\lambda = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ, η οποία έχει λύση στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $\lambda \leq 3$ και στη συνέχεια να βρείτε το λ, ώστε να ισχύει η σχέση

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 = 540\lambda.$$

Λύση. Αφού η εξίσωση έχει λύση στο $\mathbb{R}$ θα είναι $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow (-6)^2 - 4 \cdot 3\lambda \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \leq 3$. Έχουμε

$$x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3 = 540\lambda \Leftrightarrow (x_1 x_2)^2 (x_1 + x_2) = 540\lambda \Leftrightarrow (3\lambda)^2 \cdot 6 = 540\lambda \Leftrightarrow 54\lambda(\lambda - 10) = 0.$$

Από την τελευταία παίρνουμε $\lambda = 0$ ή $\lambda = 10$, από τις οποίες δεχόμαστε μόνο την $\lambda = 0$, λόγω της σχέσης $\lambda \leq 3$.

Παράδειγμα 22. Θεωρούμε την εξίσωση $3x^2 + (\lambda^2 - 9)\, x + 3\lambda = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες αντίθετες.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες αντίστροφες.
Λύση. α) Οι ρίζες είναι αντίθετες όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 0, δηλαδή

$$x_1 + x_2 = 0 \Leftrightarrow -\frac{\lambda^2 - 9}{3} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 3 \text{ ή } \lambda = -3.$$

Για $\lambda = 3$ η εξίσωση γράφεται $3x^2 + 9 = 0$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, ενώ για $\lambda = -3$ η εξίσωση γράφεται $3x^2 - 9 = 0$, η οποία έχει δύο ρίζες τις $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$. Επομένως η μόνη τιμή που γίνεται δεκτή είναι η $\lambda = -3$.
β) Οι ρίζες είναι αντίστροφες όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με 1, δηλαδή

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \Leftrightarrow \frac{3\lambda}{3} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Για $\lambda = 1$ η εξίσωση γράφεται $3x^2 - 8x + 3 = 0$, η οποία έχει πραγματικές ρίζες αφού $\Delta = 28 > 0$. Επομένως η τιμή $\lambda = 1$ είναι δεκτή.

Ασκήσεις για λύση

17. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 4x + 3 = 0$ β) $3x^2 = 1 - 2x$ γ) $x^2 + 6x + 9 = 0$ δ) $x^2 - x + 2 = 0$

18. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(-x + 1)(2x - 5) = 0$ β) $4x^2 - 5x = 0$ γ) $x^2 - 4 = 0$ δ) $x^2 + 8 = 0$

19. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - (\sqrt{5} + 1)x + \sqrt{5} = 0$ β) $x^2 - 113x + 112 = 0$ γ) $2x^2 - 55x - 55^2 = 0$

20. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(3x - 4)(x + 1) = (2x + 1)(x - 1)$ β) $(3x - 1)(x - 3) = (-2 + 5x)(3x - 1)$

21. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{3} = 1$ β) $\dfrac{x^2 + 1}{2} - \dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{3x - 2}{2}$ γ) $\dfrac{x + 2}{2} - (x + 2)^2 = \dfrac{3x - 4}{2} + 1$

22. Θεωρούμε τις παρακάτω εξισώσεις με άγνωστο x και παράμετρο a.

$$x^2 - ax + a - 1 = 0 \qquad (1) \qquad \text{και} \qquad -a^2x^2 + ax - 4 = 0 \qquad (2)$$

α) Να δείξετε ότι η (1) έχει λύση στο $\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου a. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση αυτή.
β) Να δείξετε ότι η (2) είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου a.

23. Δίνεται η εξίσωση $a^2x^2 + (a^2 - \beta^2)\,x - \beta^2 = 0$ με άγνωστο x και παραμέτρους $a \neq 0$ και $\beta \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει λύση στο $\mathbb{R}$ την οποία να βρείτε.

24. Αν $a\beta + \beta\gamma + \gamma a = 0$, να λύσετε την εξίσωση $4x^2 + 4(a + \beta + \gamma)x + a^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 0$.

25. Να λύσετε για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ την εξίσωση $x^2 - 20x + 2\lambda = 0$.

26. Το εμβαδό ενός τετραγώνου είναι αριθμητικά ίσο με το εννιαπλάσιο της πλευράς του αυξημένο κατά 10. Να υπολογίσετε την πλευρά του τετραγώνου.

27. Θεωρούμε ορθογώνιο με εμβαδό 10 cm^2, η μία πλευρά του οποίου είναι κατά 3 cm μικρότερη από την άλλη. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

28. Να βρείτε έναν αριθμό ο οποίος όταν προστεθεί στον αντίστροφό του δίνει άθροισμα 5.

29. Μια τάξη νοίκιασε για εκδρομή ένα λεωφορείο αντί 240 €. Επειδή δύο μαθητές αρρώστησαν, το εισιτήριο αυξήθηκε για καθένα από τους υπόλοιπους κατά 0,5 €. Πόσοι μαθητές πήγαν εκδρομή;

30. Δύο ποδηλάτες διανύουν μια απόσταση 45 km με μέσες ταχύτητες που διαφέρουν κατά 5 km/h. Ο ένας ποδηλάτης χρειάζεται 1,5 h περισσότερο από τον άλλο. Να βρείτε τις ταχύτητες των ποδηλατών.

31. Να βρείτε δύο πραγματικούς αριθμούς με άθροισμα 5 και γινόμενο -14.

32. Να βρείτε μια δευτεροβάθμια εξίσωση, η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς 4 και -9.

33. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-4x+2\lambda=0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε ο αριθμός 5 να είναι ρίζα της εξίσωσης και στη συνέχεια να βρείτε και την άλλη ρίζα της.

34. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-\lambda x+12=0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ. Αν η εξίσωση έχει δύο ρίζες, η μία τριπλάσια της άλλης, να βρείτε τις ρίζες και τον πραγματικό αριθμό λ.

35. Θεωρούμε την εξίσωση $2x^2+3x-8=0$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες τις x_1, x_2. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να βρείτε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού η οποία να έχει ρίζες τις:

α) $\rho_1=\dfrac{1}{x_1}\,,\ \rho_2=\dfrac{1}{x_2}$ β) $\rho_1=x_1^2\,,\ \rho_1=x_2^2$ γ) $\rho_1=x_1+2\,,\ \rho_1=x_2+2.$

36. Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-(\lambda-2)x-\lambda=0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ.
α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ.
β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει

$$3x_1+x_2=x_1x_2-2x_2+4\lambda-1.$$

37. Θεωρούμε την εξίσωση $2x^2-\left(\lambda^2-4\right)x+\lambda=0$, με άγνωστο x και παράμετρο λ.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες αντίθετες.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες αντίστροφες.

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις $3^{\text{ου}}$ ή μεγαλύτερου βαθμού

Για τις εξισώσεις $3^{\text{ου}}$ ή $4^{\text{ου}}$ βαθμού υπάρχουν τύποι που δίνουν τις λύσεις τους, οι οποίοι όμως είναι αρκετά πολύπλοκοι για τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Για εξισώσεις βαθμού μεγαλυτέρου του $4^{\text{ου}}$ δεν υπάρχουν τύποι, όπως αυτός της δευτεροβάθμιας εξίσωσης, που να δίνει τις λύσεις . Γενικά, για την επίλυση εξισώσεων $3^{\text{ου}}$ ή μεγαλύτερου βαθμού θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική της παραγοντοποίησης, η οποία υποστηρίζεται από τις γνωστές ταυτότητες αλλά και το σχήμα Horner.

Ειδική περίπτωση αποτελεί η διωνυμική εξίσωση $x^{\nu} = a$, όπου ν θετικός ακέραιος και a πραγματικός αριθμός.

- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται $x^{\nu} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- Αν $a > 0$ και ν άρτιος, τότε $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$ ή $x = -\sqrt[\nu]{a}$.
- Αν $a > 0$ και ν περιττός, τότε $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = \sqrt[\nu]{a}$.
- Αν $a < 0$ και ν άρτιος, τότε η $x^{\nu} = a$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
- Αν $a < 0$ και ν περιττός, τότε $x^{\nu} = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[\nu]{-a}$.

Σε μερικές εξισώσεις με κατάλληλα τεχνάσματα μπορούμε να ανάγουμε την επίλυσή τους στην επίλυση εξισώσεων μικρότερου βαθμού, κατά προτίμηση $1^{\text{ου}}$ ή $2^{\text{ου}}$. Για όλα τα παραπάνω ακολουθούν παραδείγματα.

Παράδειγμα 23. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^9 - 4 = 0$ β) $2x^4 - 32 = 0$ γ) $x^5 + 9 = 0$ δ) $x^{12} + 5x^8 = 0$

Λύση. α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^9 = 4 \Leftrightarrow x = \sqrt[9]{4}$.
β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16}$ ή $x = -\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$.
γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $x^5 = -9 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{9}$.
δ) Έχουμε $x^{12} + 5x^8 = 0 \Leftrightarrow x^8(x^4 + 5) = 0 \Leftrightarrow x^8 = 0$ ή $x^4 = -5 \Leftrightarrow x = 0$, αφού η εξίσωση $x^4 = -5$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 24. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^3 = x$ β) $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0$ γ) $(x^2 - 4)(x - 3) = (x^2 - 9)(2x + 1)$

Λύση. α) Έχουμε $x^3 = x \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0$. Η τελευταία δίνει $x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$.
β) Έχουμε $x^3 - 5x^2 - 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 5) - 2(x - 5) = 0 \Leftrightarrow (x - 5)(x^2 - 2) = 0$. Η τελευταία δίνει $x = 5$ ή $x^2 = 2$, δηλαδή $x = 5$ ή $x = \sqrt{2}$ ή $x = -\sqrt{2}$.
γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$(x-2)(x+2)(x-3)-(x-3)(x+3)(2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-3)\left[(x - 2)(x + 2) - (x + 3)(2x + 1)\right]$$

$$\Leftrightarrow (x - 3)\left[x^2 - 4 - (2x^2 + 7x + 3)\right] \Leftrightarrow (x - 3)\left[-x^2 - 7x - 7\right] = 0.$$

Η τελευταία δίνει $x-3 = 0$ ή $-x^2-7x-7 = 0$. Έχουμε $x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $-x^2-7x-7 = 0$ βρίσκουμε $(-7\pm\sqrt{21})/2$. Τελικά οι ζητούμενες λύσεις είναι

$$x = 3 \quad \text{ή} \quad x = \frac{-7 + \sqrt{21}}{2} \quad \text{ή} \quad x = \frac{-7 - \sqrt{21}}{2}.$$

Παράδειγμα 25. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$ β) $2x^3 - 3x + 1 = 0$ γ) $x^4 - x^3 - 5x^2 + 3x + 6 = 0$

Λύση. α) Επειδή η εξίσωση δεν παραγοντοποιείται εύκολα θα χρησιμοποιήσουμε για το σκοπό αυτό το σχήμα Horner.[1]

1	2	-5	-6	-1
	-1	-1	6	
1	1	-6	**0**	

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$(x - (-1))\,(x^2 + x - 6) = 0 \Leftrightarrow$
$(x + 1)(x^2 + x - 6) = 0$.

Η τελευταία δίνει $x + 1 = 0$ ή $x^2 + x - 6 = 0$. Έχουμε $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$. Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + x - 6 = 0$ βρίσκουμε $x = 2$ ή $x = -3$. Τελικά οι ζητούμενες λύσεις είναι $x = -1$ ή $x = 2$ ή $x = -3$.
β) Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner. Προσέχουμε ότι ο συντελεστής του x^2 είναι ο αριθμός 0.

2	0	-3	1	1
	2	2	-1	
2	2	-1	**0**	

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$(x - 1)(2x^2 + 2x - 1) = 0$.

[1] Δοκιμάζουμε τις πιθανές ακέραιες ρίζες (είναι οι διαιρέτες του σταθερού όρου) με στόχο ο αριθμός που θα προκύψει στο τέλος να είναι 0. Τότε ο ένας παράγοντας είναι $x - \rho$ όπου ρ η πιθανή ακέραια ρίζα και ο άλλος έχει συντελεστές τους αριθμούς που βρίσκονται αριστερά του 0. Στους υπολογισμούς του σχήματος Horner κατακόρυφα προσθέτουμε και διαγώνια πολλαπλασιάζουμε.

Η τελευταία δίνει $x-1=0$ ή $2x^2+2x-1=0$. Έχουμε $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$. Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση $2x^2+2x-1=0$ βρίσκουμε $x=(-1\pm\sqrt{3})/2$. Τελικά οι ζητούμενες λύσεις είναι

$$x=1 \quad \text{ή} \quad x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{ή} \quad x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

γ) Η εξίσωση είναι $4^{\text{ου}}$ βαθμού και θα χρησιμοποιήσουμε δύο φορές το σχήμα Horner.

1	-1	-5	3	6	-1
	-1	2	3	-6	
1	-2	-3	6	**0**	

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x+1)(x^3-2x^2-3x+6)=0$.

1	-2	-3	6	2
	2	0	-6	
1	0	-3	**0**	

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(x+1)(x-2)(x^2-3)=0$.

Η τελευταία δίνει $x+1=0$ ή $x-2=0$ ή $x^2-3=0$, οπότε τελικά παίρνουμε

$$x=-1 \quad \text{ή} \quad x=2 \quad \text{ή} \quad x=\sqrt{3} \quad \text{ή} \quad x=-\sqrt{3}.$$

Παράδειγμα 26. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις[2]:

α) $x^4-6x^2+5=0$ β) $\left(x^2+x+2\right)^3-\left(x^2+x+3\right)-5=0$

Λύση. α) Θέτουμε $x^2=\omega$ και η δοθείσα εξίσωση γράφεται $\omega^2-6\omega+5=0$. Η διακρίνουσα της τελευταίας είναι $\Delta=36-20=16$, οπότε έχουμε $\omega=(6\pm\sqrt{16})/2 \Leftrightarrow \omega=5$ ή $\omega=1$.

- Για $\omega=5$ έχουμε $x^2=5 \Leftrightarrow x=\sqrt{5}$ ή $x=-\sqrt{5}$.
- Για $\omega=1$ έχουμε $x^2=1 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$.

Η αρχική εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες $x=\sqrt{5}$ ή $x=-\sqrt{5}$ ή $x=1$ ή $x=-1$.
β) Θέτουμε $x^2+x+2=\omega$, οπότε $x^2+x+3=\omega+1$ και η δοθείσα εξίσωση γράφεται $\omega^3-(\omega+1)-5=0 \Leftrightarrow \omega^3-\omega-6=0$. Για την τελευταία θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

1	0	-1	-6	2
	2	4	6	
1	2	3	**0**	

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $(\omega-2)(\omega^2+2\omega+3)=0$.

Η τελευταία δίνει $\omega-2=0$ ή $\omega^2+2\omega+3=0$, οπότε τελικά παίρνουμε ως μόνη λύση την $\omega=2$, αφού η $\omega^2+2\omega+3=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ έχοντας αρνητική διακρίνουσα. Τελικά για $\omega=2$ έχουμε

$$x^2+x+2=2 \Leftrightarrow x^2+x=0 \Leftrightarrow x(x+1)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=-1.$$

[2]Μια εξίσωση της μορφής $ax^4+\beta x^2+\gamma=0$ με $a,\beta\neq 0$ ονομάζεται **διτετράγωνη**. Θέτοντας $x^2=\omega$ η εξίσωση ανάγεται σε δευτεροβάθμια με άγνωστο ω.

Παράδειγμα 27. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^4 - 7x^3 + 14x^2 - 7x + 1 = 0$ β) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3$

Λύση. α) Ο αριθμός 0 δεν είναι λύση της εξίσωσης αφού δεν την επαληθεύει. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $x^2 \neq 0$ και παίρνουμε

$$x^2 - 7x + 14 - \frac{7}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0.$$

Επειδή $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 7\left(x + \frac{1}{x}\right) + 12 = 0.$$

Θέτουμε $x + 1/x = \omega$ και προκύπτει η εξίσωση $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$. Λύνοντας την τελευταία παίρνουμε $\omega = 3$ ή $\omega = 4$.

- Για $\omega = 3$ έχουμε $x + \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = (3+\sqrt{5})/2$ ή $x = (3-\sqrt{5})/2$.
- Για $\omega = 4$ έχουμε $x + \frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{3}$ ή $x = 2 - \sqrt{3}$.

Η αρχική εξίσωση έχει τέσσερις ρίζες $x = (3+\sqrt{5})/2$ ή $x = (3-\sqrt{5})/2$ ή $x = 2+\sqrt{3}$ ή $x = 2 - \sqrt{3}$.
β) Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$(x-1)(x-4)(x-2)(x-3) = 3 \Leftrightarrow \left(x^2 - 5x + 4\right)\left(x^2 - 5x + 6\right) = 3.$$

Θέτουμε $x^2 - 5x + 4 = \omega$, οπότε $x^2 - 5x + 6 = \omega + 2$ και η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$\omega(\omega + 2) = 3 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 1 \quad \text{ή} \quad \omega = -3.$$

- Για $\omega = 1$ έχουμε $x^2 - 5x + 4 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0$, η οποία έχει δύο ρίζες $x = (5+\sqrt{13})/2$ ή $x = (5-\sqrt{13})/2$.
- Για $\omega = -3$ έχουμε $x^2 - 5x + 4 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 7 = 0$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ αφού $\Delta = -3 < 0$.

Συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει δύο ρίζες $x = (5+\sqrt{13})/2$ ή $x = (5-\sqrt{13})/2$.

Παράδειγμα 28. α) Να βρείτε μια εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς 2, 3, 4.
β) Να βρείτε μια εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 3 και διπλή ρίζα τον αριθμό -1.

Λύση. α) Μια τέτοια εξίσωση είναι η $(x-2)(x-3)(x-4)=0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$\left(x^2-5x+6\right)(x-4)=0 \Leftrightarrow x^3-9x^2+26x-24=0.$$

β) Μια τέτοια εξίσωση είναι η $(x-1)(x-3)(x+1)^2=0$, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$\left(x^2-4x+3\right)\left(x^2+2x+1\right)=0 \Leftrightarrow x^4-2x^3-4x^2+2x+3=0.$$

Παράδειγμα 29. Θεωρούμε την εξίσωση $x^3+(a+\beta)x^2+1-a=0$, με άγνωστο x και παραμέτρους a, β. Με δεδομένο ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το -1, να βρείτε τα a, β και την άλλη ρίζα της εξίσωσης.
Λύση. Επειδή το -1 είναι λύση της δοθείσας εξίσωσης θα την επαληθεύει. Επομένως $(-1)^3+(a+\beta)(-1)^2+1-a=0 \Leftrightarrow \beta=0$ και η εξίσωση γράφεται $x^3+ax^2+1-a=0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner για την τελευταία εξίσωση.

1	a	0	$1-a$	-1
	-1	$-a+1$	$a-1$	
1	$a-1$	$-a+1$	**0**	

Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα
$(x+1)[x^2+(a-1)x-a+1]=0$.

Επειδή το -1 είναι διπλή ρίζα της αρχικής εξίσωσης, θα είναι λύση και της εξίσωσης $x^2+(a-1)x-a+1=0$. Άρα $(-1)^2+(a-1)(-1)-a+1=0 \Leftrightarrow -2a+3=0 \Leftrightarrow a=3/2$. Έχουμε

$$(x+1)[x^2+(a-1)x-a+1]=0 \Leftrightarrow (x+1)\left[x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right]=0 \Leftrightarrow (x+1)(2x^2+x-1)=0.$$

Από την τελευταία εξίσωση έχουμε ισοδύναμα $x+1=0$ ή $2x^2+x-1=0$. Η πρωτοβάθμια δίνει $x=-1$, ενώ η δευτεροβάθμια $x=-1$ ή $x=1/2$.

Παράδειγμα 30. Θεωρούμε την εξίσωση $x^4-(a-2)x^2+16=0$, με άγνωστο x και παράμετρο a. Να βρείτε το a ώστε η εξίσωση να έχει δύο διπλές ρίζες.
Λύση. Θέτουμε $x^2=\omega$ και η εξίσωση γράφεται

$$\omega^2-(a-2)\omega+16=0. \qquad (1)$$

Η δοθείσα εξίσωση έχει δύο διπλές ρίζες αν και μόνο αν η (1) έχει μία διπλή θετική ρίζα. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν $\Delta=0$, $S>0$ και $P>0$, όπου Δ, S και P η διακρίνουσα, το άθροισμα των ριζών και το γινόμενο των ριζών της (1) αντίστοιχα. Έχουμε

$$\Delta=0 \Leftrightarrow (a-2)^2-64=0 \Leftrightarrow (a-2)^2-8^2=0 \Leftrightarrow (a-10)(a+6)=0 \Leftrightarrow a=10 \text{ ή } a=-6.$$

Το γινόμενο των ριζών είναι $P=16>0$ για οποιαδήποτε τιμή του a. Για $a=10$ είναι $S=a-2=8>0$ ενώ για $a=-6$ είναι $S=a-2=-8<0$. Συνεπώς η δοθείσα εξίσωση έχει δύο διπλές ρίζες για $a=10$.

Ασκήσεις για λύση

38. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^5 - 6 = 0$ β) $-3x^4 + 48 = 0$ γ) $x^9 + 5 = 0$ δ) $x^{10} = -10$ ε) $x^8 + 3x^4 = 0$

39. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^{21} = x^{19}$ β) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$ γ) $(x^2 + 1)(x - 2) = (x^2 - 4)(-3x + 2)$

40. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2x^3 - 3x^2 + 5x - 4 = 0$ β) $x^3 - 3x^2 + 2 = 0$ γ) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$

41. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ β) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$ γ) $2x^6 - 6x^3 + 3 = x^6 + 3x^3 - 5$

42. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(x^2 - x + 1\right)^3 - 4\left(x^2 - x + 1\right) - 15 = 0$ β) $\left(x^2 - 3x + 3\right)^3 - 2\left(x^2 - 3x\right)^2 = -7$

43. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x(x-1)(x+1)(x+2) = 24$ β) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

44. α) Να βρείτε μια εξίσωση $3^{ου}$ βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς -1, -2, 3.
β) Να βρείτε μια εξίσωση $4^{ου}$ βαθμού η οποία να έχει ρίζες τους αριθμούς 1, 2 και διπλή ρίζα τον αριθμό -3.

45. Ένας κύβος ακμής x, έχει όγκο μικρότερο από τον όγκο ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων x, x, $5x$ κατά 32 cm^3. Να βρείτε το μήκος της ακμής του κύβου.

46. Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς x cm και ύψος $2x$ cm. Αν τριπλασιάσουμε την πλευρά του τετραγώνου της βάσης και αυξήσουμε κατά 1 cm το ύψος του τότε ο όγκος του αυξάνεται κατά 25 cm^3. Να βρείτε τον όγκο του αρχικού παραλληλεπιπέδου.

47. Θεωρούμε την εξίσωση $x^3 + (2a - \beta)x^2 + 4 - 8a = 0$, με άγνωστο x και παραμέτρους a, β. Με δεδομένο ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα το -2, να βρείτε τα a, β και την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

48. Θεωρούμε την εξίσωση $x^4 - 3x^2 - (1 - a) = 0$, με άγνωστο x και παράμετρο a. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση έχει ακριβώς δύο απλές πραγματικές ρίζες.

49. Έστω ότι η εξίσωση $ax^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \beta x + a = 0$, με άγνωστο x και παραμέτρους a, β με $a \neq 0$, έχει ρίζα τον ρ.
α) Να δείξετε ότι $\rho \neq 0$.
β) Να δείξετε ότι η δοθείσα εξίσωση έχει ρίζα και τον αριθμό $1/\rho$.

50. Η εξίσωση $x^3 + ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, με άγνωστο x και παραμέτρους τους ακεραίους a, β, γ, έχει ρίζα τον ακέραιο ρ. Να δείξετε ότι

$$|\rho| \leq |a| + |\beta| + |\gamma| .$$

51. Η εξίσωση $ax^3 + \beta x^2 - a\gamma^2 x + \delta = 0$, με άγνωστο x και παραμέτρους a, β, γ και δ, όπου $a \neq 0$, έχει ρίζα τον αριθμό γ. Να βρείτε τις άλλες ρίζες της εξίσωσης.

Κεφάλαιο 4

Ρητές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται ο άγνωστος σε ένα τουλάχιστον παρονομαστή. Κάθε παρονομαστής που περιέχει άγνωστο, πρέπει να είναι διαφορετικός από το 0, ώστε να ορίζεται το αντίστοιχο κλάσμα.

Παράδειγμα 31. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^2-3}{x-1} = 3 - \dfrac{2}{x-1}$ β) $\dfrac{x^2-x}{x-3} + \dfrac{x-1}{x-2} = \dfrac{1-x}{x^2-5x+6}$ γ) $\dfrac{2}{x-3} = \dfrac{x+1}{x^2-9}$

Λύση. α) Επειδή η παράσταση $x-1$ βρίσκεται στον παρονομαστή έχουμε τον περιορισμό $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$. Στη συνέχεια κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$(x-1)\frac{x^2-3}{x-1} = (x-1)3 - (x-1)\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow x^2-3 = 3x-3-2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0.$$

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $x=1$ ή $x=2$. Λόγω του περιορισμού δεκτή είναι μόνο η $x=2$.
β) Επειδή $x^2-5x+6 = x^2-2x-3x+6 = x(x-2)-3(x-2) = (x-2)(x-3)$, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2-x}{x-3} + \frac{x-1}{x-2} = \frac{1-x}{(x-2)(x-3)}\,. \tag{1}$$

Στην (1), επειδή οι παρονομαστές πρέπει να είναι διάφοροι του μηδενός, έχουμε τους περιορισμούς $x \neq 2$ και $x \neq 3$. Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με το ΕΚΠ των παρονομαστών, που είναι $(x-2)(x-3)$. Η (1) γράφεται

$$(x-2)(x-3)\frac{x^2-x}{x-3} + (x-2)(x-3)\frac{x-1}{x-2} = (x-2)(x-3)\frac{1-x}{(x-2)(x-3)} \Leftrightarrow$$

$$(x-2)\left(x^2-x\right) + (x-3)(x-1) = 1-x \Leftrightarrow x^3-x^2-2x^2+2x+x^2-x-3x+3 = 1-x$$

$$\Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-1\right)=0.$$

Η τελευταία δίνει $x = 2$ ή $x = 1$ ή $x = -1$. Λόγω των περιορισμών δεκτές είναι μόνο οι λύσεις $x = 1$ ή $x = -1$.
γ) Επειδή $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$, η εξίσωση γράφεται

$$\frac{2}{x-3} = \frac{x+1}{(x-3)(x+3)}.$$

Στην τελευταία εξίσωση, επειδή οι παρονομαστές δεν πρέπει να μηδενίζονται, λαμβάνουμε τους περιορισμούς $x \neq 3$ και $x \neq -3$. Μπορούμε να συνεχίσουμε την επίλυση εφαρμόζοντας τη γνωστή χιαστί ιδιότητα ή να κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών. Εφαρμόζουμε τη δεύτερη επιλογή. Η τελευταία εξίσωση γράφεται

$$(x-3)(x+3)\frac{2}{x-3} = (x-3)(x+3)\frac{x+1}{(x-3)(x+3)} \Leftrightarrow (x+3)2 = x+1 \Leftrightarrow x = -5.$$

Η λύση $x = -5$, λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς είναι δεκτή.

Παράδειγμα 32. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{4-x}{3-\dfrac{2}{x+1}} = \dfrac{2}{5}$ β) $\dfrac{x^2+1}{2x} + \dfrac{6x}{x^2+1} = 4$ γ) $x^2 + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{x+2}{x^2-4} - 1$

Λύση. α) Επειδή οι παρονομαστές δεν πρέπει να μηδενίζονται, έχουμε τους περιορισμούς $x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ και $3 - 2/(x+1) \neq 0 \Leftrightarrow 3x + 3 \neq 2 \Leftrightarrow x \neq -1/3$. Μετατρέπουμε πρώτα στην εξίσωση το πρώτο μέλος σε απλό κλάσμα. Η εξίσωση γράφεται

$$\frac{\dfrac{4-x}{1}}{\dfrac{3(x+1)-2}{x+1}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{(4-x)(x+1)}{3x+1} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow 5(4-x)(x+1) = 2(3x+1) \Leftrightarrow$$

$$15x + 20 - 5x^2 = 6x + 2 \Leftrightarrow -5x^2 + 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{6}{5}.$$

Λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς οι λύσεις που βρέθηκαν είναι δεκτές.
β) Για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $x^2 + 1 \neq 0$. Ακόμη θα πρέπει $2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2+1}{2x} + 3\frac{2x}{x^2+1} = 4.$$

Θέτουμε $\dfrac{x^2+1}{2x} = \omega$, οπότε $\dfrac{2x}{x^2+1} = \dfrac{1}{\omega}$ και η εξίσωση γράφεται

$$\omega + \frac{3}{\omega} = 4 \Leftrightarrow \omega^2 + 3 = 4\omega \Leftrightarrow \omega^2 - 4\omega + 3 = 0 \Leftrightarrow \omega = 3 \quad \text{ή} \quad \omega = 1.$$

Για $\omega = 3$ έχουμε

$$\frac{x^2+1}{2x} = 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3 + \sqrt{8} \quad \text{ή} \quad x = 3 - \sqrt{8}.$$

Για $\omega = 1$ έχουμε

$$\frac{x^2+1}{2x} = 1 \Leftrightarrow x^2+1 = 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Ο μόνος περιορισμός $x \neq 0$ ικανοποιείται από όλες τις λύσεις και συνεπώς είναι όλες αποδεκτές.
γ) Θα πρέπει $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 2$ και $x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$, οπότε τελικά έχουμε τους περιορισμούς $x \neq 2$ και $x \neq -2$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$x^2 + \frac{1}{x-2} = \frac{x+2}{(x-2)(x+2)} - 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x-2} - 1 \Leftrightarrow x^2 = -1$$

που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 33. Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{2}{x(x+2)} + \frac{3}{x(x+3)} + \frac{4}{x(x+4)} + \frac{5}{x(x+5)} = 2 - \frac{2x+7}{(x+2)(x+5)} - \frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}.$$

Λύση. Επειδή οι παρονομαστές δεν πρέπει να μηδενίζονται, έχουμε τους περιορισμούς $x \neq 0$, $x \neq -2$, $x \neq -3$, $x \neq -4$ και $x \neq -5$. Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος της εξίσωσης γράφεται

$$\begin{aligned}
&\frac{x+2-x}{x(x+2)} + \frac{x+3-x}{x(x+3)} + \frac{x+4-x}{x(x+4)} + \frac{x+5-x}{x(x+5)} = \\
&\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+5} = \\
&\frac{4}{x} - \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) - \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right) = \\
&\frac{4}{x} - \frac{2x+7}{(x+2)(x+5)} - \frac{2x+7}{(x+3)(x+4)}
\end{aligned}$$

Συνεπώς η δοθείσα εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\dfrac{4}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 2$. Η λύση αυτή είναι δεκτή αφού ικανοποιεί τους περιορισμούς.

Ασκήσεις για λύση

52. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{-3}{x+2} + \dfrac{5}{x^2-4} = \dfrac{1}{x-2}$ β) $\dfrac{1}{x^2-x} + \dfrac{3}{x-1} = \dfrac{5}{x}$ γ) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+2}{x+1} = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$

53. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{x}{x-2} - \dfrac{8}{x^2-2x} = \dfrac{4}{x}$ β) $\dfrac{x^2+2x+4}{x} + \dfrac{2x-5}{x-2} = \dfrac{-2}{x^2-2x}$ γ) $\dfrac{5}{x+1} = \dfrac{x}{x^2-1}$

54. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{1-\dfrac{1}{x+3}}{x-\dfrac{6}{x-1}}=\dfrac{2}{x+3}$ β) $\dfrac{2x-4}{x-5}+\dfrac{x-5}{x-2}=-3$ γ) $x^6+\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{x-3}{x^2-9}-4x^2$

55. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2}{x(x+2)}-\frac{2}{x(x-2)}=4-\frac{2x}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x}{(x+2)(x-2)}$$

Κεφάλαιο 5

Άρρητες εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με εξισώσεις στις οποίες εμφανίζεται ο άγνωστος σε ένα τουλάχιστον ριζικό. Κάθε υπόρριζη ποσότητα που περιέχει άγνωστο, πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 0, ώστε να ορίζεται η αντίστοιχη ρίζα.

Παράδειγμα 34. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt[4]{10-x}-2=0$ β) $\sqrt{x-5}=-4$ γ) $\sqrt[3]{x-9}=0$ δ) $\sqrt{3-x}+3=2x$

Λύση. α) Η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 0, οπότε έχουμε $10-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 10$. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\sqrt[4]{10-x}=2 \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{10-x}\right)^4=2^4 \Leftrightarrow 10-x=16 \Leftrightarrow x=-6.$$

Η λύση $x=-6$ είναι αποδεκτή αφού ικανοποιεί τον περιορισμό $x\leq 10$.
β) Η εξίσωση είναι προφανώς αδύνατη αφού το πρώτο μέλος είναι $\sqrt{x-5}\geq 0$, ενώ $-4<0$.
γ) Έχουμε τον περιορισμό $x-9\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 9$. Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στον κύβο και παίρνουμε ισοδύναμα $x-9=0 \Leftrightarrow x=9$. Η λύση είναι δεκτή αφού ικανοποιεί τον περιορισμό.
δ) Η υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση από το 0, άρα $3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$. Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\sqrt{3-x}=2x-3.$$

Επειδή το πρώτο μέλος της τελευταίας εξίσωσης είναι μη αρνητικός αριθμός, το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και με το δεύτερο. Επομένως $2x-3\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 3/2$. Τελικά προκύπτει ο περιορισμός $x\in[3/2,3]$. Έχουμε [1]

$$\sqrt{3-x}=2x-3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3-x}\right)^2=(2x-3)^2 \Leftrightarrow 3-x=4x^2-12x+9 \Leftrightarrow 4x^2-11x+6=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει τις λύσεις $x=2$ ή $x=3/4$. Από τις λύσεις αυτές, λόγω του περιορισμού, δεχόμαστε μόνο την $x=2$.

[1] Γενικά όταν υψώνουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη μιας εξίσωσης, η νέα εξίσωση δεν είναι ισοδύναμη με την αρχική. Είναι όμως όταν και τα δύο μέλη είναι μη αρνητικά.

Παράδειγμα 35. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt{x-1}$ β) $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=\sqrt{x+2}$ γ) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=0$

Λύση. α) Κάθε υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0, οπότε προκύπτει $x \geq 1$. Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην έκτη (το 6 είναι το ΕΚΠ των δεικτών των ριζών) και η εξίσωση γράφεται

$$\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^6=\left(\sqrt{x-1}\right)^6 \Leftrightarrow (x-1)^2=(x-1)^3 \Leftrightarrow (x-1)^2(2-x)=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2.$$

Οι λύσεις $x=1$ ή $x=2$ είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x \geq 1$.
β) Θα πρέπει $x-1 \geq 0$, $3-x \geq 0$ και $x+2 \geq 0$, οπότε προκύπτει ο περιορισμός $x \in [1,3]$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}\right)^2=\left(\sqrt{x+2}\right)^2 \Leftrightarrow x-1+3-x+2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}=x+2 \Leftrightarrow$$

$$2\sqrt{x-1}\sqrt{3-x}=x \qquad (1)$$

Επειδή το πρώτο μέλος της (1) είναι μη αρνητικός αριθμός, το ίδιο θα πρέπει να συμβαίνει και με το δεύτερο. Επομένως πρέπει $x \geq 0$ και λαμβάνοντας υπόψιν τον αρχικό περιορισμό έχουμε πάλι $x \in [1,3]$. Υψώνουμε στο τετράγωνο τα δύο μέλη της (1) και γράφεται ισοδύναμα

$$4(x-1)(3-x)=x^2 \Leftrightarrow -4x^2+16x-12=x^2 \Leftrightarrow 5x^2-16x+12=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ ή } x=\frac{6}{5}.$$

Οι λύσεις $x=2$ ή $x=6/5$ είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $x \in [1,3]$.
γ) Κάθε υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0, οπότε προκύπτει $x \geq 0$. Επειδή το πρώτο μέλος είναι ένα άθροισμα μη αρνητικών όρων και το δεύτερο μέλος είναι 0, έπεται ότι κάθε όρος του πρώτου μέλους θα είναι ίσος με 0. Έτσι παίρνουμε

$$\sqrt{x}=0 \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{x}=0 \quad \text{και} \quad \sqrt[4]{x}=0.$$

Καθεμία από τις παραπάνω δίνει $x=0$. Η λύση αυτή είναι αποδεκτή αφού ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 0$.

Παράδειγμα 36. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{8x^3-12x^2+5}=2x-1$.
Λύση. Επειδή ο περιορισμός $8x^3-12x^2+5 \geq 0$ είναι δύσκολο να λυθεί θα εργαστούμε χωρίς περιορισμούς. Αυτό όμως θα έχει ως συνέπεια ότι πρέπει καθεμία από τις λύσεις που θα προκύψουν να την ελέγξουμε αν επαληθεύει τη δοθείσα εξίσωση. Επομένως έχουμε

$$\sqrt[3]{8x^3-12x^2+5}=2x-1 \Rightarrow \left(\sqrt[3]{8x^3-12x^2+5}\right)^3=(2x-1)^3$$

$$\Rightarrow 8x^3-12x^2+5=8x^3-12x^2+6x-1 \Rightarrow -6x=-6 \Rightarrow x=1.$$

Για $x=1$ η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\sqrt[3]{8\cdot 1^3-12\cdot 1^2+5}=2\cdot 1-1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8-12+5}=1 \Leftrightarrow \sqrt[3]{1}=1$$

η οποία προφανώς αληθεύει. Άρα η λύση $x=1$ είναι δεκτή.

Παράδειγμα 37. Να λύσετε την εξίσωση $x+\left(\sqrt[3]{x-1}\right)^2=1+6\sqrt[3]{x-1}$.
Λύση. Πρέπει $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Θέτουμε $\sqrt[3]{x-1}=y$, οπότε $x=y^3+1$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$y^3+1+y^2=1+6y \Leftrightarrow y^3+y^2-6y=0 \Leftrightarrow y(y^2+y-6)=0 \Leftrightarrow y=0 \text{ ή } y=2 \text{ ή } y=-3.$$

- Για $y=0$ έχουμε $\sqrt[3]{x-1}=0 \Leftrightarrow x=1$, η οποία είναι δεκτή.
- Για $y=2$ έχουμε $\sqrt[3]{x-1}=2 \Leftrightarrow x=9$, η οποία είναι δεκτή.
- Για $y=-3$ έχουμε $\sqrt[3]{x-1}=-3$ η οποία είναι αδύνατη.

Παράδειγμα 38. Να λύσετε την εξίσωση

$$2\sqrt{x-1}+3\sqrt{x+2}+4\sqrt{x+7}+5\sqrt{x+14}=40.$$

Λύση. Κάθε υπόρριζη ποσότητα πρέπει να είναι μεγαλύτερη ή ίση του 0, οπότε προκύπτει $x\geq 1$. Παρατηρούμε ότι για $x=2$ η εξίσωση επαληθεύεται, αφού

$$2\sqrt{2-1}+3\sqrt{2+2}+4\sqrt{2+7}+5\sqrt{2+14}=40 \Leftrightarrow 2+6+12+20=40 \Leftrightarrow 40=40.$$

Θα δείξουμε ότι κάθε αριθμός $\rho\neq 2$ δεν είναι λύση της εξίσωσης, οπότε η δοθείσα εξίσωση θα έχει μοναδική λύση την $x=2$.
Αν $\rho>2$ είναι λύση της εξίσωσης τότε

$$\rho-1>1\,,\qquad \rho+2>4\,,\qquad \rho+7>9\,,\qquad \rho+14>16$$

άρα

$$\sqrt{\rho-1}>1\,,\qquad \sqrt{\rho+2}>2\,,\qquad \sqrt{\rho+7}>3\,,\qquad \sqrt{\rho+14}>4$$

συνεπώς

$$2\sqrt{\rho-1}>2\,,\qquad 3\sqrt{\rho+2}>6\,,\qquad 4\sqrt{\rho+7}>12\,,\qquad 5\sqrt{\rho+14}>20$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και παίρνουμε

$$2\sqrt{\rho-1}+3\sqrt{\rho+2}+4\sqrt{\rho+7}+5\sqrt{\rho+14}>40$$

δηλαδή $40>40$, που είναι άτοπο.
Αν $1\leq\rho<2$ είναι λύση της εξίσωσης τότε

$$\rho-1<1\,,\qquad \rho+2<4\,,\qquad \rho+7<9\,,\qquad \rho+14<16$$

άρα

$$\sqrt{\rho-1}<1\,,\qquad \sqrt{\rho+2}<2\,,\qquad \sqrt{\rho+7}<3\,,\qquad \sqrt{\rho+14}<4$$

συνεπώς

$$2\sqrt{\rho-1}<2\,,\qquad 3\sqrt{\rho+2}<6\,,\qquad 4\sqrt{\rho+7}<12\,,\qquad 5\sqrt{\rho+14}<20$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις τελευταίες ανισότητες και παίρνουμε

$$2\sqrt{\rho-1}+3\sqrt{\rho+2}+4\sqrt{\rho+7}+5\sqrt{\rho+14}<40$$

δηλαδή $40<40$, που είναι άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης είναι η $x=2$.

Ασκήσεις για λύση

56. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x-2}-1=0$ β) $\sqrt{x-9}=-3$ γ) $\sqrt[5]{x-4}=0$ δ) $\sqrt{5x+10}+x=8$

57. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{x+2}$ β) $\sqrt{1-\sqrt{x}}=\sqrt[3]{1-x}$ γ) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+6}$

58. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}=0$ β) $\sqrt{x-4}+\sqrt[3]{x-4}+\sqrt[4]{x-4}+\sqrt[5]{x-4}=4$

59. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt[9]{x^9-x+1}=x$ β) $\sqrt{x^6+2x-2}+2=x^3$ γ) $\sqrt[3]{x^3-2x^2+3x+6}-1=x$

60. Δίνεται η εξίσωση

$$\sqrt[3]{x^4}-3x+6\sqrt[3]{x}-a=0$$

όπου a πραγματικός αριθμός, της οποίας μία ρίζα είναι ο αριθμός 8. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό a και στη συνέχεια να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Κεφάλαιο 6

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται μέσα σε απόλυτη τιμή.
Η εξίσωση $|x| = a$ λύνεται ως εξής:

- Αν $a > 0$, τότε $x = a$ ή $x = -a$.
- Αν $a = 0$, τότε $x = 0$.
- Αν $a < 0$, τότε η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό.

Για την εξίσωση $|x| = |y|$ έχουμε ισοδύναμα $x = y$ ή $x = -y$.
Για να απαλλαγούμε από το σύμβολο της απόλυτης τιμής αρκεί να γνωρίζουμε το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται εντός του απολύτου. Ισχύουν οι ισοδυναμίες

$$|x| = x \Leftrightarrow x \geq 0 \qquad \text{και} \qquad |x| = -x \Leftrightarrow x \leq 0\,.$$

Παράδειγμα 39. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|4 - x| - 5 = 0$ β) $|3x - 2| = -4$ γ) $|2x - 8| = 0$ δ) $|5 - x| - |2x - 3| = 0$

Λύση. α) Έχουμε

$$|4 - x| - 5 = 0 \Leftrightarrow |4 - x| = 5 \Leftrightarrow 4 - x = 5 \quad \text{ή} \quad 4 - x = -5 \Leftrightarrow x = -1 \quad \text{ή} \quad x = 9.$$

β) Η δοθείσα εξίσωση είναι αδύνατη αφού $-4 < 0$ ενώ το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό.
γ) Η εξίσωση δίνει ισοδύναμα $2x - 8 = 0$, απ' όπου προκύπτει η λύση $x = 4$.
δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$|5 - x| = |2x - 3| \Leftrightarrow 5 - x = 2x - 3 \quad \text{ή} \quad 5 - x = -(2x - 3) \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \quad \text{ή} \quad x = -2.$$

Παράδειγμα 40. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $||x - 2| - 3| = 5$ β) $|x - 8| + 3\,|8 - x| = 4$ γ) $|2x - 1| + |-4x + 2| = 12$

Λύση. α) Η δοθείσα εξίσωση δίνει ισοδύναμα $|x - 2| - 3 = 5$ ή $|x - 2| - 3 = -5$, δηλαδή $|x - 2| = 8$ ή $|x - 2| = -2$.

- Η εξίσωση $|x-2| = 8$ δίνει ισοδύναμα $x-2 = 8$ ή $x-2 = -8$, δηλαδή $x = 10$ ή $x = -6$.
- Η εξίσωση $|x-2| = -2$ είναι αδύνατη αφού $-2 < 0$, ενώ το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό.

β) Επειδή $|x-8| = |8-x|$, η εξίσωση γράφεται

$$4|x-8| = 4 \Leftrightarrow |x-8| = 1 \Leftrightarrow x-8 = 1 \quad \text{ή} \quad x-8 = -1 \Leftrightarrow x = 9 \quad \text{ή} \quad x = 7.$$

γ) Παρατηρούμε ότι $|-4x+2| = |-2(2x-1)| = |-2|\,|2x-1| = 2\,|2x-1|$. Η εξίσωση γράφεται

$$3\,|2x-1| = 12 \Leftrightarrow |2x-1| = 4 \Leftrightarrow 2x-1 = 4 \quad \text{ή} \quad 2x-1 = -4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \quad \text{ή} \quad x = -\frac{3}{2}.$$

Παράδειγμα 41. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x-3)^2 - |x-3| - 6 = 0$ β) $\dfrac{|x-4|-2}{3} + \dfrac{|x-4|+3}{2} = \dfrac{|x-4|-6}{6} + |x-4|$

Λύση. α) Επειδή $(x-3)^2 = |x-3|^2$, θέτουμε $|x-3| = \omega$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή

$$\omega^2 - \omega - 6 = 0.$$

Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και βρίσκουμε $\omega = -2$ ή $\omega = 3$, δηλαδή $|x-3| = -2$ ή $|x-3| = 3$. Η $|x-3| = -2$ είναι αδύνατη (αφού $-2 < 0$ και το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό) ενώ η $|x-3| = 3$ δίνει $x-3 = 3$ ή $x-3 = -3$, οπότε $x = 6$ ή $x = 0$.
β) Για ευκολία θέτουμε $|x-4| = y$ και η εξίσωση γράφεται

$$\frac{y-2}{3} + \frac{y+3}{2} = \frac{y-6}{6} + y \Leftrightarrow 2(y-2) + 3(y+3) = y - 6 + 6y \Leftrightarrow 5y + 2 = 7y - 6 \Leftrightarrow y = 4.$$

Έτσι έχουμε $|x-4| = 4 \Leftrightarrow x-4 = 4$ ή $x-4 = -4 \Leftrightarrow x = 8$ ή $x = 0$.

Παράδειγμα 42. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-1| + 2x = -1$ β) $\left|x^2 - x\right| = x - 1$ γ) $|x-2| + |x+1| + x = 2$

Λύση. α) Θα λύσουμε την εξίσωση διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο της παράστασης που βρίσκεται εντός της απολύτου τιμής.

- Αν $x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ τότε $|x-1| = x-1$ και η δοθείσα εξίσωση γράφεται

  $$x - 1 + 2x = -1 \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

  Η λύση $x = 0$ απορρίπτεται αφού έχουμε $x \geq 1$.

- Αν $x-1<0 \Leftrightarrow x<1$ τότε $|x-1|=-x+1$ και η δοθείσα εξίσωση γράφεται
$$-x+1+2x=-1 \Leftrightarrow x=-2.$$
Η λύση $x=-2$ είναι δεκτή αφού έχουμε $x<1$.

β) Επειδή η παράσταση εντός του απολύτου είναι δευτέρου βαθμού είναι πιο εύκολο να εργαστούμε όπως παρακάτω. Επειδή το πρώτο μέλος είναι μη αρνητικό, θα πρέπει να είναι και το δεύτερο, επομένως $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$. Τώρα έχουμε

$$\left|x^2-x\right|=x-1 \Leftrightarrow x^2-x=x-1 \quad \text{ή} \quad x^2-x=-x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \quad \text{ή} \quad x^2-1=0.$$

Λύνοντας την $x^2-2x+1=0$ βρίσκουμε $x=1$, ενώ λύνοντας την $x^2-1=0$ βρίσκουμε $x=1$ ή $x=-1$. Δεκτή λόγω του περιορισμού $x \geq 1$ είναι μόνο η $x=1$.
γ) Θα λύσουμε την εξίσωση διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται εντός των απολύτων τιμών. Οι παραστάσεις $x-2$, $x+1$ μηδενίζονται για $x=2$, $x=-1$ αντίστοιχα και χωρίζουν το $\mathbb{R}$ στα διαστήματα $(-\infty,-1)$, $[-1,2]$, $(2,+\infty)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x<-1$, τότε $x+1<0$ και $x-2<0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$-(x-2)-(x+1)+x=2 \Leftrightarrow -x+1=2 \Leftrightarrow x=-1$$
που απορρίπτεται.

- Αν $-1 \leq x \leq 2$, τότε $x+1 \geq 0$ και $x-2 \leq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$-(x-2)+(x+1)+x=2 \Leftrightarrow 3+x=2 \Leftrightarrow x=-1$$
που είναι αποδεκτή.

- Αν $x>2$, τότε $x+1>0$ και $x-2>0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$x-2+(x+1)+x=2 \Leftrightarrow 3x-1=2 \Leftrightarrow x=1$$
που απορρίπτεται.

Παράδειγμα 43. Να λύσετε την εξίσωση $|x^2-3x+2|+|x^2-4x+3|=3|x-1|$.
Λύση. Παρατηρούμε ότι
$$x^2-3x+2=x^2-x-2x+2=x(x-1)-2(x-1)=(x-1)(x-2)$$
και
$$x^2-4x+3=x^2-x-3x+3=x(x-1)-3(x-1)=(x-1)(x-3)$$
οπότε η δοθείσα εξίσωση γράφεται
$$|x-1|\,|x-2|+|x-1|\,|x-3|-3\,|x-1|=0 \Leftrightarrow |x-1|\,(|x-2|+|x-3|-3)=0.$$

Η τελευταία δίνει

$$|x-1| = 0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1 \quad \text{ή} \quad |x-2|+|x-3|-3=0.$$

Θα λύσουμε την εξίσωση $|x-2|+|x-3|-3=0$ διακρίνοντας περιπτώσεις για το πρόσημο των παραστάσεων που βρίσκονται εντός των απολύτων τιμών. Οι παραστάσεις $x-2$, $x-3$ μηδενίζονται για $x=2$, $x=3$ αντίστοιχα και χωρίζουν το $\mathbb{R}$ στα διαστήματα $(-\infty,2)$, $[2,3]$, $(3,+\infty)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x<2$, τότε $x-2<0$ και $x-3<0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$-(x-2)-(x-3)-3=0 \Leftrightarrow -2x+2=0 \Leftrightarrow x=1$$
που είναι αποδεκτή.

- Αν $2 \leq x \leq 3$, τότε $x-2 \geq 0$ και $x-3 \leq 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$x-2-(x-3)-3=0 \Leftrightarrow -2=0$$
που είναι αδύνατη.

- Αν $x>3$, τότε $x-2>0$ και $x-3>0$, οπότε η εξίσωση γράφεται
$$x-2+x-3-3=0 \Leftrightarrow 2x-8=0 \Leftrightarrow x=4$$
που είναι αποδεκτή.

Με βάση τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η αρχική εξίσωση έχει τις λύσεις $x=1$ ή $x=4$.

Ασκήσεις για λύση

61. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-9|=6$ β) $|4x-1|+2=0$ γ) $|4x-2|=0$ δ) $|3-x|-|3x-5|=0$

62. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x^2-4x+4}-6=0$ β) $\sqrt{x^2+2x+1}+|x+1|=4$ γ) $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{x^2}$

63. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $||2x-1|-3|=6$ β) $\left|\dfrac{x-1}{|x-1|+3}\right|=\dfrac{2}{3}$ γ) $|2|x|-|x-2||=||x|-2|x-2||$

64. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x|+|-x|+|-3x|=10$ β) $2\,|x-3|+5\,|3-x|=14$ γ) $|3x-2|+|-9x+6|=8$

65. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x-8)^2-6\,|x-8|+5=0$ β) $(x-1)^2+5\,|x-1|+6=0$ γ) $|x|^3-6x^2+11\,|x|=6$

66. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\dfrac{|x+3|-1}{4}+\dfrac{|x+3|}{3}=\dfrac{2-|x+3|}{6}$ β) $\dfrac{|x-2|-3}{2}+\dfrac{|x-2|}{5}=|2-x|+|2x-4|$

67. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-5|+3x=1$ β) $\left|x^2-2x\right|=4-x$ γ) $|x-1|+2\,|1-x|+x=11$

68. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $|x-3|+2\,|x-5|-x=13$ β) $2\,|x-1|+3\,|x-2|+4\,|x-3|-5\,|x-4|=0$

69. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left|x^2-1\right|+\left|x^2+4x+3\right|=4\,|x+1|$ β) $\left|x^3-x\right|+\left|x^3-2x^2-x+2\right|=3\left|1-x^2\right|$

70. Αν a, β, γ, δ είναι πραγματικοί αριθμοί, να δείξετε ότι η εξίσωση

$$|x-a|+|x-\beta|+|x-\gamma|+|x-\delta|=|a-\beta|+|\gamma-\delta|-1$$

είναι αδύνατη.

Κεφάλαιο 7

Τριγωνομετρικές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με εξισώσεις στις οποίες εμφανίζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί του αγνώστου. Απαραίτητες είναι οι βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις:

- $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \theta\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \theta \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \theta\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$
- $\sigma\phi x = \sigma\phi\theta \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \theta\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$

Παράδειγμα 44. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x - 1 = 0$ β) $-2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0$ γ) $3\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0$ δ) $1 - \sigma\phi x = 0$

Λύση. α) Έχουμε

$$2\eta\mu x - 1 = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Τελικά για την αρχική εξίσωση έχουμε

$$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$-2\sigma\upsilon\nu x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{4}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ) Έχουμε $3\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\sigma\phi x = 1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}\,, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 45. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2\eta\mu x + 1 = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0$ γ) $3\epsilon\phi x + \sqrt{3} = 0$ δ) $1 + \sigma\phi x = 0$

Λύση.[1] α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\eta\mu x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \eta\mu x = -\eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \pi + \frac{\pi}{6}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Τελικά για την αρχική εξίσωση έχουμε

$$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

β) Η εξίσωση γράφεται $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, οπότε έχουμε ισοδύναμα

$$\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = 2\kappa\pi - \frac{3\pi}{4}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\epsilon\phi x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = -\epsilon\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{6}, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$\sigma\phi x = -1 \Leftrightarrow \sigma\phi x = -\sigma\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \sigma\phi x = \sigma\phi\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = \kappa\pi - \frac{\pi}{4}, \quad \text{όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Παράδειγμα 46. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2(x-3) + 2\eta\mu(x-3) = 0$ β) $-\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\eta\mu x + 3 = 0$ γ) $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu\frac{\pi}{5} = 0$

Λύση. α) Η εξίσωση γράφεται

$$\eta\mu(x-3)\left(\eta\mu(x-3) + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu(x-3) = 0 \quad \text{ή} \quad \eta\mu(x-3) + 2 = 0.$$

Η εξίσωση $\eta\mu(x-3) + 2 = 0$ γράφεται $\eta\mu(x-3) = -2$ και είναι αδύνατη, αφού για κάθε πραγματικό x ισχύει $-1 \leq \eta\mu(x-3) \leq 1$. Η εξίσωση $\eta\mu(x-3) = 0$ γράφεται

$$\eta\mu(x-3) = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x - 3 = 2\kappa\pi + 0 \quad \text{ή} \quad x - 3 = 2\kappa\pi + \pi - 0$$

δηλαδή $x = 3 + 2\kappa\pi$ ή $x = 3 + 2\kappa\pi + \pi$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
β) Επειδή $\sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x$, η εξίσωση γράφεται $-(1 - \eta\mu^2 x) - 3\eta\mu x + 3 = 0$, δηλαδή

$$\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0.$$

Θέτουμε $\eta\mu x = y$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y^2 - 3y + 2 = 0$. Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και βρίσκουμε $y = 1$ ή $y = 2$.

[1]Ισχύουν οι σχέσεις: $-\eta\mu\theta = \eta\mu\,(-\theta)$, $-\sigma\upsilon\nu\theta = \sigma\upsilon\nu\,(\pi - \theta)$, $-\epsilon\phi\theta = \epsilon\phi\,(-\theta)$, $-\sigma\phi\theta = \sigma\phi\,(-\theta)$.

- Για $y=2$ παίρνουμε $\eta\mu x = 2$, η οποία είναι αδύνατη αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.
- Για $y=1$ παίρνουμε $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{2}$, οπότε $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

γ)[2] Η εξίσωση γράφεται

$$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{3\pi}{10}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 47. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sigma\upsilon\nu(2x) - \sqrt{3}\eta\mu(2x) = 0$ β) $\eta\mu^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

Λύση. α) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\sigma\upsilon\nu(2x) = \sqrt{3}\eta\mu(2x)$. Επειδή $\eta\mu(2x) \neq 0$ (αν $\eta\mu(2x) = 0$, τότε η εξίσωση δίνει $\sigma\upsilon\nu(2x) = 0$, πράγμα άτοπο αφού δεν επαληθεύεται η ταυτότητα $\eta\mu^2(2x) + \sigma\upsilon\nu^2(2x) = 1$) διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $\eta\mu(2x)$ και παίρνουμε

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(2x)}{\eta\mu(2x)} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sigma\phi(2x) = \sigma\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\kappa\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
β) Επειδή $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ (αν $\sigma\upsilon\nu x = 0$, τότε η εξίσωση δίνει $\eta\mu x = 0$, πράγμα άτοπο αφού δεν επαληθεύεται η ταυτότητα $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$) διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $\sigma\upsilon\nu^2 x$ και παίρνουμε

$$\epsilon\phi^2 x + \left(1+\sqrt{3}\right)\epsilon\phi x + \sqrt{3} = 0.$$

Θέτουμε $\epsilon\phi x = y$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $y^2 - \left(1+\sqrt{3}\right)y + \sqrt{3} = 0$. Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και βρίσκουμε $y = \sqrt{3}$ ή $y = 1$.

- Για $y = \sqrt{3}$ παίρνουμε $\epsilon\phi x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.
- Για $y = 1$ παίρνουμε $\epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 48. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(\eta\mu x + 1)\left(3\epsilon\phi x - \sqrt{3}\right) = 0$ β) $\sigma\phi^2 x + 2 = \frac{5}{2\eta\mu x}$ γ) $\eta\mu x + \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 1$

Λύση. α) Επειδή $\epsilon\phi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ προκύπτει ο περιορισμός $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$. Η δοθείσα εξίσωση δίνει

$$\eta\mu x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3\epsilon\phi x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = -1 \quad \text{ή} \quad \epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

[2]Ισχύουν οι σχέσεις $\eta\mu\theta = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\sigma\upsilon\nu\theta = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\epsilon\phi\theta = \sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$, $\sigma\phi\theta = \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$.

- Για την $\eta\mu x = -1$ έχουμε $\eta\mu x = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{3\pi}{2}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Οι λύσεις αυτές απορρίπτονται αφού δεν ικανοποιούν τον περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

- Για την $\epsilon\phi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ έχουμε $\epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.

β) Επειδή $\sigma\phi x = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ προκύπτει ο περιορισμός $\eta\mu x \neq 0$. Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} + 2 = \frac{5}{2\eta\mu x} \Leftrightarrow \frac{1-\eta\mu^2 x}{\eta\mu^2 x} + 2 = \frac{5}{2\eta\mu x} \Leftrightarrow 2\left(1-\eta\mu^2 x\right) + 4\eta\mu^2 x = 5\eta\mu x \Leftrightarrow$$

$$2\eta\mu^2 x - 5\eta\mu x + 2 = 0.$$

Θέτουμε $\eta\mu x = y$ και η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2y^2 - 5y + 2 = 0$. Λύνουμε την τελευταία εξίσωση και βρίσκουμε $y = 2$ ή $y = 1/2$.

- Για $y = 2$ παίρνουμε $\eta\mu x = 2$, η οποία είναι αδύνατη αφού για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$.

- Για $y = 1/2$ παίρνουμε $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6}$, οπότε $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Οι λύσεις αυτές είναι δεκτές αφού ικανοποιούν τον περιορισμό $\eta\mu x \neq 0$.

γ) Η εξίσωση γράφεται $\eta\mu x = 1 - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$, η οποία συνεπάγεται ότι [3]

$$\eta\mu^2 x = \left(1-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x\right)^2 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu^2 x = 1-2\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x+3\sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση γράφεται $\sigma\upsilon\nu x\left(2\sigma\upsilon\nu x - \sqrt{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}/2$.

- Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = 0$ γράφεται $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, τότε η δοθείσα εξίσωση δίνει $1 + 0 = 1$, που αληθεύει, άρα η λύση αυτή είναι δεκτή. Αν $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2}$, τότε η δοθείσα εξίσωση δίνει $-1 + 0 = 1$, που δεν αληθεύει, άρα η λύση αυτή δεν είναι δεκτή.

- Η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}/2$ δίνει $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{6}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Αν $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$, τότε η δοθείσα εξίσωση δίνει $1/2 + 3/2 = 1$, που δεν αληθεύει, άρα η λύση αυτή δεν είναι δεκτή. Αν $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, τότε η δοθείσα εξίσωση δίνει $-1/2 + 3/2 = 1$, που αληθεύει, άρα η λύση αυτή είναι δεκτή.

[3] Επειδή υψώνουμε στο τετράγωνο η εξίσωση που προκύπτει δεν είναι ισοδύναμη με την αρχική. Συνεπώς θα χρειαστεί επαλήθευση των λύσεων που θα βρεθούν.

Παράδειγμα 49. Να λύσετε την εξίσωση $\epsilon\phi x - 1 = 0$ στο διάστημα $[-\pi, 2\pi]$.
Λύση. Έχουμε $\epsilon\phi x - 1 = 0 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 1 \Leftrightarrow \epsilon\phi x = \epsilon\phi\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$. Λόγω του περιορισμού για το x έχουμε

$$-\pi \leq x \leq 2\pi \Leftrightarrow -\pi \leq \kappa\pi + \frac{\pi}{4} \leq 2\pi \Leftrightarrow -4\pi \leq 4\kappa\pi + \pi \leq 8\pi \Leftrightarrow -5\pi \leq 4\kappa\pi \leq 7\pi \Leftrightarrow$$

$$-\frac{5}{4} \leq \kappa \leq \frac{7}{4}.$$

Επειδή ο κ είναι ακέραιος έπεται ότι $\kappa = -1$ ή $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$.

- Για $\kappa = -1$ έχουμε $x = (-1)\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4}$.
- Για $\kappa = 0$ έχουμε $x = 0\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$.
- Για $\kappa = 1$ έχουμε $x = 1\pi + \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{4}$.

Παράδειγμα 50. Λόγω παλίρροιας σε μια θαλάσσια περιοχή το ύψος της στάθμης των υδάτων δίνεται από τον τύπο

$$y = 2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right)$$

όπου y το ύψος της στάθμης των υδάτων σε μέτρα και t ο χρόνος σε ώρες με $0 \leq t \leq 24$. Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές το ύψος της στάθμης των υδάτων είναι 1 μέτρο.
Λύση. Οι ζητούμενες χρονικές στιγμές είναι οι λύσεις της εξίσωσης $2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 1$, όπου $0 \leq t \leq 24$. Έχουμε λοιπόν

$$2\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 1 \Leftrightarrow \eta\mu\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{6}t = 2\kappa\pi + \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow$$

$$t = 12\kappa + 1 \quad \text{ή} \quad t = 12\kappa + 5\,, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{Z}.$$

- Για $t = 12\kappa + 1$ έχουμε $0 \leq 12\kappa + 1 \leq 24 \Leftrightarrow -1/12 \leq \kappa \leq 23/12$ και επειδή ο κ είναι ακέραιος προκύπτει $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Συνεπώς $t = 12 \cdot 0 + 1 = 1$ ή $t = 12 \cdot 1 + 1 = 13$.
- Για $t = 12\kappa + 5$ έχουμε $0 \leq 12\kappa + 5 \leq 24 \Leftrightarrow -5/12 \leq \kappa \leq 19/12$ και επειδή ο κ είναι ακέραιος προκύπτει $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$. Συνεπώς $t = 12 \cdot 0 + 5 = 5$ ή $t = 12 \cdot 1 + 5 = 17$.

Τελικά έχουμε τις λύσεις $t = 1$ ή $t = 5$ ή $t = 13$ ή $t = 17$.

Ασκήσεις για λύση

71. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ β) $-2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$ γ) $3\sigma\phi x - \sqrt{3} = 0$ δ) $1 - \epsilon\phi x = 0$

72. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ β) $2\eta\mu x + \sqrt{2} = 0$ γ) $3\sigma\phi x + \sqrt{3} = 0$ δ) $1 + \epsilon\phi x = 0$

73. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(2\eta\mu x + 3)(2\eta\mu x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$ β) $4\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x - 2\sqrt{2}\eta\mu x + 2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$

74. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\left(2\eta\mu(2x-1) - \sqrt{2}\right)(\sigma\upsilon\nu(3x+2) - 1) = 0$ β) $\epsilon\phi^2(3x-1) - \sqrt{3}\epsilon\phi(3x-1) = 0$

75. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu^2 x - 3\eta\mu x + 2 = 0$ β) $-2\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ γ) $\epsilon\phi^5 x - 9\epsilon\phi x = 0$

76. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(\eta\mu x - 1)(\epsilon\phi x - 1) = 0$ β) $\sigma\upsilon\nu x \cdot \epsilon\phi^2 x = 0$ γ) $3\epsilon\phi^2 x = \dfrac{7}{\sigma\upsilon\nu x} - 5$

77. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{7}$ β) $\eta\mu(3x) = \sigma\upsilon\nu x$ γ) $\sigma\upsilon\nu(2x) + \eta\mu\dfrac{\pi}{5} = 0$ δ) $\epsilon\phi x = \sigma\phi(x-2)$

78. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\eta\mu x = \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$ β) $3\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = \sqrt{2}$ γ) $\eta\mu^2 x - 2\sqrt{3}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 3\sigma\upsilon\nu^2 x = 0$

79. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις στο διάστημα $[-\pi, 3\pi]$:

α) $\epsilon\phi(2x) - \sqrt{3} = 0$ β) $2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{2} = 0$ γ) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$ δ) $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) - 1 = 0$

80. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις είναι αδύνατες:

α) $\epsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} - 3x\right) \cdot \epsilon\phi\left(\dfrac{\pi}{4} + 3x\right) = 2$ β) $\eta\mu^4 x + 3\sigma\upsilon\nu^6 x - 5 = 0$ γ) $\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x) - 1 = 0$

81. Η θερμοκρασία $\Theta(t)$ σε κάποια περιοχή, για δύο συνεχόμενες ημέρες, τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$$\Theta(t) = 8\eta\mu\left(\frac{\pi}{12}t\right) + 4, \qquad 0 \leq t \leq 48$$

όπου η θερμοκρασία είναι μετρημένη σε βαθμούς Κελσίου και ο χρόνος μετρημένος σε ώρες.

α) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές η θερμοκρασία είναι ίση με 0 βαθμούς Κελσίου.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή κατά την οποία η θερμοκρασία να είναι ίση με 13 βαθμούς Κελσίου.

Κεφάλαιο 8

Εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με εξισώσεις στις οποίες ο άγνωστος εμφανίζεται στον εκθέτη μιας δύναμης ή στον λογάριθμο μιας παράστασης. Ακολουθούν μερικές χρήσιμες ιδιότητες.

- Αν $a > 0$ και $a \neq 1$ τότε $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.
- Αν $a > 0$, $a \neq 1$ και $x, y > 0$ τότε $log_a x = log_a y \Leftrightarrow x = y$.
- Αν $a > 0$, $a \neq 1$ και $x, y > 0$ τότε:
  - $log_a x + log_a y = log_a(xy)$.
  - $log_a x - log_a y = log_a(x/y)$.
  - $\omega log_a x = log_a x^\omega$, $w \in \mathbb{R}$.
  - $log_a x = \dfrac{lnx}{lna} = \dfrac{logx}{loga}$.
  - $log_a a = 1$ και $log_a 1 = 0$.
  - $x = lne^x$ και $x = log10^x$.
  - $log_a x = \omega \Leftrightarrow a^\omega = x$, $w \in \mathbb{R}$.
  - $x = e^{lnx}$ και $x^y = e^{ylnx}$.

Παράδειγμα 51. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5 \cdot 3^{2x-1} = 45$ β) $\dfrac{3}{4^x} = 24$ γ) $2^{x-4} - 1 = 0$ δ) $e^x - 5 = 0$ ε) $3^{x-2} = 2^{3-x}$

Λύση. α) Έχουμε

$$5 \cdot 3^{2x-1} = 45 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 9 \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 3^2 \Leftrightarrow 2x - 1 = 2 \Leftrightarrow x = 3/2.$$

β) Έχουμε

$$\frac{3}{4^x} = 24 \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-x} = 24 \Leftrightarrow 4^{-x} = 8 \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^3 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -3/2.$$

γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$2^{x-4} = 1 \Leftrightarrow 2^{x-4} = 2^0 \Leftrightarrow x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4.$$

δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$e^x = 5 \Leftrightarrow lne^x = ln5 \Leftrightarrow xlne = 5 \Leftrightarrow x \cdot 1 = 5 \Leftrightarrow x = 5.$$

ε) Λογαριθμίζουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης, η οποία γράφεται ισοδύναμα

$$ln3^{x-2} = ln2^{3-x} \Leftrightarrow (x-2)ln3 = (3-x)ln2 \Leftrightarrow xln3 + xln2 = 3ln2 + 2ln3 \Leftrightarrow$$

$$x(ln3 + ln2) = ln2^3 + ln3^2 \Leftrightarrow xln(3 \cdot 2) = ln(8 \cdot 9) \Leftrightarrow xln6 = ln72 \Leftrightarrow x = \frac{ln72}{ln6}$$

$$\Leftrightarrow x = log_6 72.$$

Παράδειγμα 52. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $2 \cdot 3^{x-2} = 6\sqrt[4]{3^5}$ β) $5^{3x-2} = 0$ γ) $e^{x-1} + 5 = 0$ δ) $3^{x^2-4x+3} = 1^{x^2-5x+6}$

Λύση. α) Έχουμε

$$2 \cdot 3^{x-2} = 6\sqrt[4]{3^5} \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3 \cdot 3^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow 3^{x-2} = 3^{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x - 2 = 9/4 \Leftrightarrow x = 17/4.$$

β) Η εξίσωση είναι αδύνατη αφού $5^{3x-2} > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.
γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $e^{x-1} = -5$ και είναι αδύνατη αφού $e^{x-1} > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.
δ) Επειδή για κάθε πραγματικό αριθμό x είναι $1^{x^2-5x+6} = 1$, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$3^{x^2-4x+3} = 1 \Leftrightarrow 3^{x^2-4x+3} = 3^0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad \text{ή} \quad x = 3.$$

Παράδειγμα 53. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $8 \cdot 3^x = 27 \cdot 2^x$ β) $9^x + 7 = 8 \cdot 3^x$ γ) $2 \cdot 5^{2x} + 2 \cdot 4^x = 5 \cdot 10^x$ δ) $(x-1)^{x^2-1} = 1$

Λύση. α) Έχουμε

$$8 \cdot 3^x = 27 \cdot 2^x \Leftrightarrow \frac{3^x}{2^x} = \frac{27}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3^3}{2^3} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \Leftrightarrow x = 3.$$

Σχόλιο. Με ανάλογο τρόπο λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $\kappa \cdot a^x = \lambda \cdot \beta^x$.
β) Η εξίσωση γράφεται $3^{2x} - 8 \cdot 3^x + 7 = 0$. Θέτουμε $3^x = \omega$ και παίρνουμε την εξίσωση $\omega^2 - 8\omega + 7 = 0$. Λύνουμε την τελευταία και βρίσκουμε $\omega = 1$ ή $\omega = 7$.

- Για $\omega = 1$ έχουμε $3^x = 1 \Leftrightarrow 3^x = 3^0 \Leftrightarrow x = 0$.

- Για $\omega = 7$ έχουμε $3^x = 7 \Leftrightarrow ln3^x = ln7 \Leftrightarrow x \cdot ln3 = ln7 \Leftrightarrow x = ln7/ln3 = log_3 7$.

Σχόλιο. Ομοίως λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $\kappa \cdot a^{2x} + \lambda \cdot a^x + \mu = 0$.
γ) Η εξίσωση γράφεται $2 \cdot 5^{2x} - 5 \cdot 2^x \cdot 5^x + 2 \cdot 2^{2x} = 0$. Διαιρούμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης με 2^{2x} και η εξίσωση γράφεται

$$2\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 5\left(\frac{5}{2}\right)^{x} + 2 = 0.$$

Θέτουμε $(5/2)^x = \omega$ και παίρνουμε την εξίσωση $2\omega^2 - 5\omega + 2 = 0$. Λύνουμε την τελευταία και βρίσκουμε $\omega = 2$ ή $\omega = 1/2$.

- Για $\omega = 2$ έχουμε $(5/2)^x = 2 \Leftrightarrow ln(5/2)^x = ln2 \Leftrightarrow x \cdot ln(5/2) = ln2 \Leftrightarrow x = ln2/ln(5/2) = log_{5/2}2$.

- Για $\omega = 1/2$ έχουμε $(5/2)^x = 2^{-1} \Leftrightarrow ln(5/2)^x = ln2^{-1} \Leftrightarrow x \cdot ln(5/2) = -ln2 \Leftrightarrow x = -ln2/ln(5/2) = -log_{5/2}2$.

Σχόλιο. Ομοίως λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $\kappa \cdot a^{2x} + \lambda \cdot a^x \beta^x + \mu \cdot \beta^{2x} = 0$.
δ) Η δοθείσα εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει

$$i)\, x - 1 = 1 \quad \text{ή} \quad ii)\, x - 1 = -1 \;\text{ και }\; x^2 - 1\, \text{άρτιος} \quad \text{ή} \quad iii)\, x^2 - 1 = 0 \;\text{ και }\; x - 1 \neq 0.$$

Στην πρώτη περίπτωση βρίσκουμε $x = 2$. Στη δεύτερη βρίσκουμε $x = 0$ η οποία απορρίπτεται αφού $0^2 - 1 = -1$ που δεν είναι άρτιος. Στην τρίτη περίπτωση βρίσκουμε $x = 1$ ή $x = -1$. Η $x = 1$ απορρίπτεται αφού $1 - 1 = 0$, ενώ η $x = -1$ είναι δεκτή αφού $-1 - 1 = -2 \neq 0$.
Σχόλιο. Με ανάλογο τρόπο λύνουμε εξισώσεις που ανάγονται στη μορφή $(f(x))^{g(x)} = 1$.

Παράδειγμα 54. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $log_2 x = 3$ β) $2logx - log(3x) = 1$ γ) $5^{lnx} - 4 = 0$ δ) $ln(x-3) + ln(6-x) = 0$

Λύση. α) Προφανώς $x > 0$. Έχουμε $log_2 x = 3 \Leftrightarrow 2^3 = x \Leftrightarrow x = 8$, η οποία είναι δεκτή.
β) Θα πρέπει $x > 0$ και $3x > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $x > 0$. Έχουμε

$$2logx - log(3x) = 1 \Leftrightarrow logx^2 - log(3x) = 1 \Leftrightarrow log\frac{x^2}{3x} = log10 \Leftrightarrow \frac{x}{3} = 10 \Leftrightarrow x = 30.$$

Η λύση που βρέθηκε είναι δεκτή.
γ) Προφανώς $x > 0$. Η εξίσωση γράφεται

$$5^{lnx} = 4 \Leftrightarrow ln5^{lnx} = ln4 \Leftrightarrow lnx \cdot ln5 = ln4 \Leftrightarrow lnx = \frac{ln4}{ln5} \Leftrightarrow lnx = log_5 4 \Leftrightarrow x = e^{log_5 4}.$$

Η λύση που βρέθηκε είναι δεκτή.
δ) Θα πρέπει $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$ και $6 - x > 0 \Leftrightarrow x < 6$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $3 < x < 6$. Η εξίσωση γράφεται

$$ln\left((x-3)(6-x)\right) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(6-x) = e^0 \Leftrightarrow -x^2 + 9x - 19 = 0.$$

Λύνουμε την τελευταία και βρίσκουμε $x = (9 \pm \sqrt{5})/2$. Οι λύσεις είναι δεκτές αφού ανήκουν στο διάστημα $(3, 6)$.

Παράδειγμα 55. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $ln^3x + lnx^2 = -3$ β) $log(x-1) = lnx$ γ) $5^{2logx} - 4x^{log5} - 100^{log\sqrt{5}} = 0$

Λύση. α) Θα πρέπει $x > 0$ και $x^2 > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $x > 0$. Η εξίσωση γράφεται

$$ln^3x + 2lnx + 3 = 0.$$

Θέτουμε $lnx = \omega$ και η εξίσωση γράφεται $\omega^3 + 2\omega + 3 = 0$. Η τελευταία με τη βοήθεια του σχήματος Horner παίρνει τη μορφή $(\omega+1)(\omega^2 - \omega + 3) = 0$ και δίνει τη λύση $\omega = -1$, αφού η $\omega^2 - \omega + 3 = 0$ έχει αρνητική διακρίνουσα και είναι αδύνατη. Παίρνουμε λοιπόν $lnx = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = 1/e$, που είναι δεκτή.
β) Θα πρέπει $x > 0$ και $x - 1 > 0$, οπότε συμπεραίνουμε ότι $x > 1$. Η εξίσωση γράφεται

$$log(x-1) = \frac{logx}{loge} \Leftrightarrow loge \cdot log(x-1) = logx \Leftrightarrow log(x-1)^{loge} = logx \Leftrightarrow (x-1)^{loge} = x.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη αφού για $x > 1$ έχουμε

$$(x-1)^{loge} < x^{loge} < x^{log10} = x^1 = x.$$

γ) Πρέπει $x > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$100^{log\sqrt{5}} = 10^{2log\sqrt{5}} = 10^{log\sqrt{5}^2} = 10^{log5} = 5$$

και

$$x^{log5} = 5^{logx} \Leftrightarrow logx^{log5} = log5^{logx} \Leftrightarrow log5 \cdot logx = logx \cdot log5\,, \quad \text{η οποία αληθεύει.}$$

Η δοθείσα εξίσωση γράφεται

$$\left(5^{logx}\right)^2 - 4 \cdot 5^{logx} - 5 = 0.$$

Θέτουμε $5^{logx} = y$ και η τελευταία εξίσωση παίρνει τη μορφή $y^2 - 4y - 5 = 0$, η οποία έχει λύσεις τις $y = -1$ ή $y = 5$. Για $y = -1$ παίρνουμε $5^{logx} = -1$, που είναι αδύνατη αφού το πρώτο μέλος είναι θετικό. Για $y = 5$ παίρνουμε $5^{logx} = 5^1 \Leftrightarrow logx = 1 \Leftrightarrow x = 10$, που είναι δεκτή.

Ασκήσεις για λύση

82. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3 \cdot 2^{x+5} = 24$ β) $\dfrac{5}{8^x} = 20$ γ) $9 \cdot 3^x = \dfrac{1}{3^{2x-1}}$ δ) $5^{2x+3} = 1$ δ) $2^{x-3} = \dfrac{1}{8}$

83. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $2^{-4x+3}=\sqrt[3]{2^5}$ β) $49\cdot 7^{x-1}=\sqrt{7}$ γ) $3^{x-1}=9\sqrt{3}$ δ) $\left(\sqrt{5}\right)^x=5^{x+1}$

84. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $9^x=3^{4x}$ β) $7^x=\dfrac{1}{7^x}$ γ) $3^{x-6}=0$ δ) $5^{2x-1}+2=0$ ε) $5^x=1^x$

85. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3\cdot 5^x=5\cdot 3^x$ β) $3\cdot 4^{2x}=2\cdot 3^{4x}$ γ) $\dfrac{2}{9}\cdot 3^{x+2}+\dfrac{1}{3}\cdot 3^{x+1}=\dfrac{1}{4}\cdot 2^{x+2}+8\cdot 2^{x-3}$

86. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $5^{2x+1}=9^{x+\frac{1}{2}}$ β) $8\cdot 3^{x+1}=27\cdot 2^{x+1}$ γ) $3^x-\dfrac{1}{40}\cdot 5^{x+1}=3\cdot 5^x-\dfrac{3}{8}\cdot 3^{x-1}$

87. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{2x}-4\cdot 3^x+3=0$ β) $9^x-2\cdot 3^x-3=0$ γ) $2^x-5\sqrt{2^x}+4=0$

88. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $8^{3x}-4\cdot 8^{2x}=4-2^{3x}$ β) $3^{3x}-9^x=3^{x+1}-3$ γ) $2^{3x}+2^{x+1}-3=0$

89. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3\cdot 9^x-5\cdot 6^x+2^{2x+1}=0$ β) $5\cdot 5^{2x}+3\cdot 9^x=8\cdot 3^x\cdot 5^x$

90. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^{x+1}=e^{x^2}$ β) $\dfrac{1}{e^x}=e^{3x}$ γ) $e^2\cdot e^x=\dfrac{e^{x+2}}{e^{-x+3}}$ δ) $e^{2x}-(e+1)e^x+e=0$

91. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\left(x^2-5x+5\right)^{x+2}=1$ β) $\left(x^2-x-1\right)^{3x-2}=1$

92. Να βρείτε τον αριθμό x στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $log_8 4=x$ β) $log_4 x=-2$ γ) $log_x 3=2$ δ) $lnx=e$ ε) $logx=-3$

93. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $log(x-4)+log(x-2)=2log\sqrt{3}$ β) $log(5-x)+1=log(x-2)$

94. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(logx)^2-log\left(x^5\right)+6=0$ β) $(logx)^3+1=(logx)^2+logx$

95. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $e^x=3$ β) $e^x=ln2$ γ) $5^{1-4x}=e^2$ δ) $3^{logx}=10$ ε) $x^{logx}\cdot\sqrt{x}=1000$

96. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3^{2logx}-2\cdot x^{log3}-100^{log\sqrt{3}}=0$ β) $2^{3logx}+x^{log2}-100^{log\sqrt{2}}=0$

Βιβλιογραφία

[**1**] Ανδρεαδάκης Σ. κ.α., *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α′ Γενικού Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 2011.
[**2**] Ανδρεαδάκης Σ. κ.α., *Άλγεβρα Β′ Γενικού Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 2012.