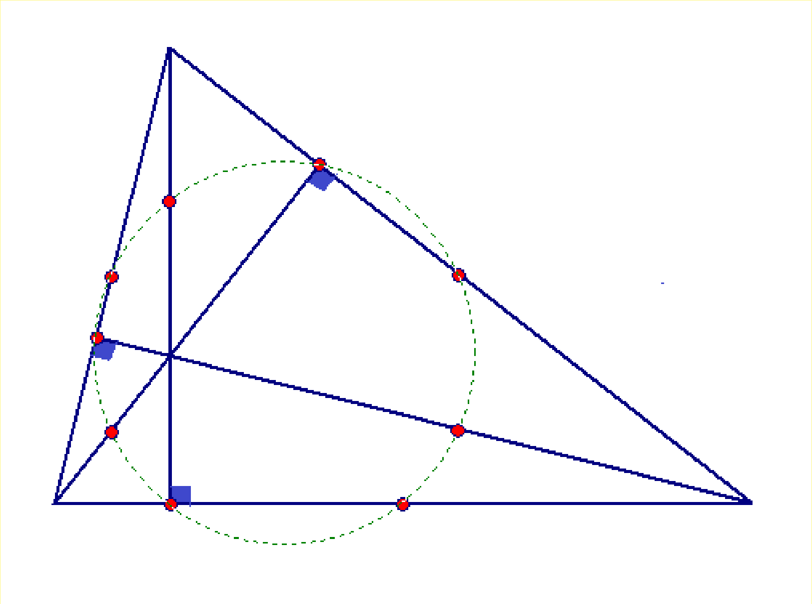
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

Θεωρία, παραδείγματα και ασκήσεις



Ανέστης Τσομίδης

Κατερίνη 2016
ISBN: 978-960-93-8028-7

"…ΓΝΩΣΕΣΘΕ ΤΗΝ ΑΛΗΘΕΙΑΝ ΚΑΙ Η ΑΛΗΘΕΙΑ ΕΛΕΥΘΕΡΩΣΕΙ ΥΜΑΣ "
(Κατά Ιωάννην Η΄ 32)

Πρόλογος

Το παρόν βιβλίο έχει ως στόχο να παρουσιάσει τις βασικές εισαγωγικές έννοιες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας του Λυκείου, απαλλαγμένες όμως από την υπερβολική πολλές φορές αυστηρότητα με την οποία παρουσιάζονται στα σχολικά βιβλία. Την ίδια αυτή αυστηρότητα δεν την συναντάμε για παράδειγμα στην Άλγεβρα και αυτή είναι ίσως αρκετές φορές που απωθεί το μέσο μαθητή από το αντικείμενο της Γεωμετρίας.

Παρουσιάζονται τα βασικά σημεία της θεωρίας με αποδείξεις όπου κρίνεται διδακτικά πρόσφορο. Δεν ακολουθείται η συνηθισμένη στα σχολικά βιβλία διάταξη της ύλης. Για παράδειγμα η αναφορά στις παράλληλες ευθείες και τις ιδιότητές τους γίνεται πριν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων. Στο τελευταίο κεφάλαιο γίνεται μια αναφορά στους γεωμετρικούς τόπους. Οι ασκήσεις που υπάρχουν σε κάθε ενότητα ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις σημερινού μέσου μαθητή του Λυκείου, πλην μερικών που σημειώνονται με ★ οι οποίες είναι δυσκολότερες, κατάλληλες για μαθητές με αυξημένο ενδιαφέρον για την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Τα θεωρήματα, τα παραδείγματα, οι ασκήσεις καθώς και τα σχήματα έχουν ενιαία αρίθμηση σε όλο το εύρος των σημειώσεων.

Για τις σημειώσεις αυτές χρησιμοποιήθηκε το περιβάλλον LaTeX με κειμενογράφο Texmaker σε συνδυασμό με το Miktex και για το κείμενο η γραμματοσειρά kerkis (Βλ. http://myria.math.aegean.gr/kerkis/) . Για τα σχήματα χρησιμοποιήθηκαν τα λογισμικά Isoptikon και Geogebra. Όλα τα παραπάνω λογισμικά διανέμονται δωρεάν μέσω του διαδικτύου.

Ανέστης Τσομίδης
Μάρτιος 2016

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Τα βασικά γεωμετρικά σχήματα

1.1 Ευθύγραμμα τμήματα και γωνίες

Η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από τις λεγόμενες **αρχικές έννοιες**, δηλαδή έννοιες που δεν επιδέχονται ορισμό, όπως οι έννοιες **σημείο**, **ευθεία**, **επίπεδο**.

Έστω μια ευθεία xy και ένα σημείο της Α. Το σημείο αυτό χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη Ax, Ay που το καθένα λέγεται **ημιευθεία** με αρχή το Α.

Έστω Α, Β δύο σημεία μιας ευθείας. Ονομάζουμε **ευθύγραμμο τμήμα** με άκρα τα Α, Β το σχήμα που απότελείται από τα Α, Β και τα σημεία της ευθείας που βρίσκονται μεταξύ των Α, Β. Θα το συμβολίζουμε με ΑΒ ή ΒΑ. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που τα άκρα του ταυτίζονται ονομάζεται **μηδενικό**.

Σε κάθε ευθύγραμο τμήμα ΑΒ αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που λέγεται **μήκος** του και συμβολίζεται (AB) ή και ΑΒ. Αν δύο τμήματα έχουν το ίδιο μήκος είναι **ίσα**, αλλιώς είναι **άνισα**. Το (AB) λέγεται και **απόσταση** των σημείων Α, Β. Γενικά το μήκος ενός τμήματος είναι θετικός αριθμός εκτός της περίπτωσης του μηδενικού τμήματος που έχει μήκος 0.

Μέσο ενός ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ είναι το εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο ώστε $AM = MB$.

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται μια ημιευθεία ή ένα ευθύγραμμο τμήμα λέγεται **φορέας** της ημιευθείας ή του τμήματος. Δύο ημιευθείες θα λέγονται **αντικείμενες** αν έχουν τον ίδιο φορέα και το μόνο κοινό σημείο τους είναι η αρχή τους.

Κάθε ευθεία ε ενός επιπέδου χωρίζει το επίπεδο αυτό σε δύο μέρη. Καθένα από τα μέρη αυτά μαζί με τα σημεία της ε λέγεται **ημιεπίπεδο**. Αν Α είναι σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει στην ε, τότε το ημιεπίπεδο που περιέχει το Α συμβολίζεται $(\varepsilon, \mathrm{A})$.

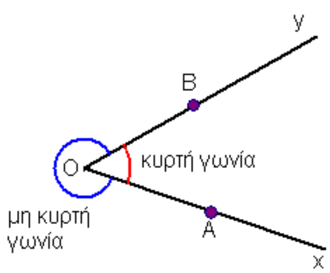
Έστω δύο ημιευθείες ενός επιπέδου οι οποίες έχουν κοινή αρχή και δεν έχουν τον ίδιο φορέα $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$. Αν Α, Β είναι σημεία των ημιευθειών $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ αντίστοιχα, ονομάζουμε **κυρτή γωνία**(ή απλά γωνία) με κορυφή Ο και πλευρές $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$ την τομή των ημιεπιπέδων $(\mathrm{O}x, \mathrm{B})$ και $(\mathrm{O}y, \mathrm{A})$. Θα τη συμβολίζουμε $x\widehat{\mathrm{O}}y$ ή $A\widehat{\mathrm{O}}B$ ή $\widehat{\mathrm{O}}$. Το σχήμα που αποτελείται από τα σημεία του επιπέδου που δεν ανήκουν στην κυρτή γωνία $x\widehat{\mathrm{O}}y$ μαζί με τα σημεία των ημιευθειών $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$, λέγεται **μη κυρτή γωνία** με κορυφή Ο και πλευρές $\mathrm{O}x$, $\mathrm{O}y$.

(Σχ. 1α)

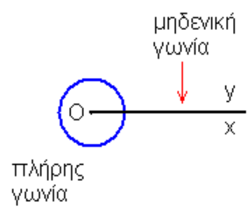
Στην περίπτωση που οι Ox, Oy ταυτίζονται τότε η κυρτή γωνία λέγεται **μηδενική γωνία** ενώ η μη κυρτή **πλήρης γωνία**. (Σχ. 1β)

Αν οι ημιευθείες Ox, Oy είναι αντικείμενες τότε καθένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία xy, λέγεται **ευθεία γωνία**. (Σχ. 1γ)

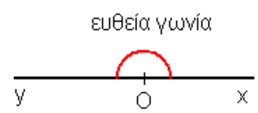
Σε κάθε κυρτή ή μη κυρτή γωνία $\hat{\omega}$ αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό που ονομάζεται μέτρο της και συμβολίζεται $(\hat{\omega})$ ή $\hat{\omega}$. Αν δύο γωνίες έχουν ίσα μέτρα είναι **ίσες**, αλλιώς θα είναι **άνισες**. Ως μονάδα μέτρησης συνήθως χρησιμοποιείται η **μοίρα**. Μια πλήρης γωνία έχει μέτρο $360°$, ενώ μια ευθεία γωνία $180°$. Επίσης μια κυρτή γωνία θα έχει μέτρο που θα ανήκει στο διάστημα $[0°, 180°]$.



ΣΧΗΜΑ 1α



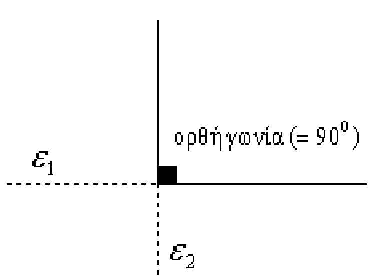
ΣΧΗΜΑ 1β



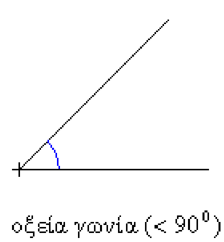
ΣΧΗΜΑ 1γ

Διχοτόμος μιας γωνίας λέγεται η ημιευθεία που έχει αρχή την κορυφή της γωνίας, βρίσκεται στο εσωτερικό της και τη χωρίζει σε δύο ίσες γωνίες.

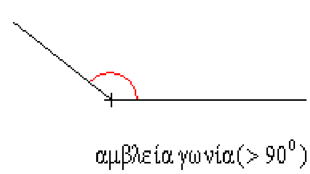
Θεωρούμε μια ευθεία γωνία και τη διχοτόμο της. Καθεμιά από τις ίσες γωνίες που προκύπτουν λέγεται **ορθή γωνία** και έχει μέτρο $90°$. Οι φορείς των πλευρών μιας ορθής γωνίας ονομάζονται **κάθετες ευθείες** μεταξύ τους. Αν οι ε_1, ε_2 είναι κάθετες γράφουμε $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$ (Σχ. 2α). Μια κυρτή γωνία θα λέγεται **οξεία** αν είναι μικρότερη από την ορθή (Σχ. 2β) και **αμβλεία** αν είναι μεγαλύτερη από την ορθή (Σχ. 2γ).



ΣΧΗΜΑ 2α



ΣΧΗΜΑ 2β

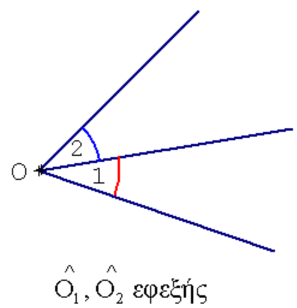


ΣΧΗΜΑ 2γ

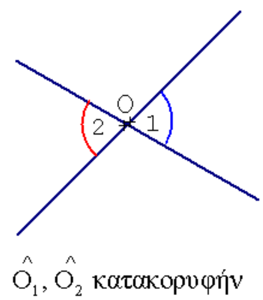
Δύο γωνίες λέγονται **συμπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μια ορθή γωνία ($90°$) και **παραπληρωματικές** αν έχουν άθροισμα μια ευθεία γωνία ($180°$).

Δύο γωνίες λέγονται **εφεξής** αν έχουν κοινή κορυφή, μία κοινή πλευρά και τις μη κοινές πλευρές εκατέρωθεν της κοινής (Σχ. 3α).

Δύο λέγονται **κατακορυφήν** αν έχουν κοινή κορυφή και οι πλευρές της μιας είναι προεκτάσεις των πλευρών της άλλης (Σχ. 3β).



ΣΧΗΜΑ 3α



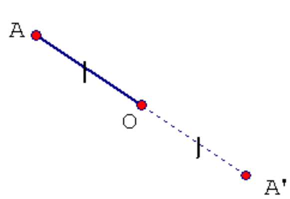
ΣΧΗΜΑ 3β

Θεώρημα 1. Οι κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες.
Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση.

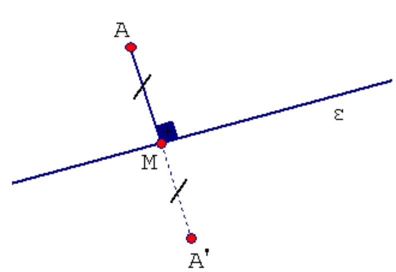
Θεώρημα 2. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση.

Έστω ένα σημείο Ο. Ονομάζουμε **συμμετρικό** του σημείου A ως προς Ο το μοναδικό σημείο A' που προκύπτει αν προεκτείνουμε το τμήμα ΑΟ και στην προέκταση να πάρουμε τμήμα $OA' = OA$. Τότε το Ο είναι το μέσο του τμήματος AA'. Τα σημεία A και A' λέγονται συμμετρικά σημεία ως προς **κέντρο συμμετρίας** το σημείο Ο. (Σχ. 4α).

Έστω μια ευθεία ε. Ονομάζουμε **συμμετρικό** του σημείου A ως προς την ε το μοναδικό σημείο A' που προκύπτει αν φέρουμε το κάθετο τμήμα ΑΜ από το A στην ε και στην προέκτασή του πάρουμε τμήμα $MA' = MA$. Τότε το Μ είναι το μέσο του τμήματος AA' και η ευθεία ε ονομάζεται **μεσοκάθετη** του AA'. Τα σημεία A και A' λέγονται συμμετρικά σημεία ως προς **άξονα συμμετρίας** την ε (Σχ. 4β). Ακόμη το μήκος του τμήματος ΑΜ ονομάζεται **απόσταση** του σημείου Α από την ευθεία ε.



ΣΧΗΜΑ 4α



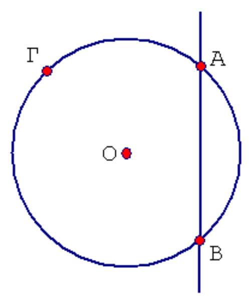
ΣΧΗΜΑ 4β

1.2 Κύκλος και πολύγωνα

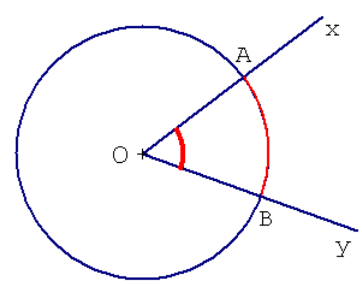
Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο Ο και ένα επίσης σταθερό θετικό αριθμό ρ. Ονομάζουμε **κύκλο** με **κέντρο** Ο και **ακτίνα** ρ το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν από το Ο απόσταση ίση με ρ. Θα τον συμβολίζουμε (Ο, ρ). Δύο κύκλοι με ίσες ακτίνες λέγονται **ίσοι**. Ένα σημείο Μ του επιπέδου θα λέγεται **εσωτερικό** του κύκλου (Ο, ρ) αν ΜΟ $< \rho$. Αν ΜΟ $> \rho$ το Μ λέγεται **εξωτερικό** του κύκλου (Ο, ρ).

Θεωρούμε ένα κύκλο και δύο σημεία του Α, Β. Η ευθεία ΑΒ χωρίζει τον κύκλο σε δύο μέρη καθένα από τα οποία λέγεται **τόξο** με άκρα τα Α, Β. Από τα τόξα αυτά αυτό που δεν βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που ορίζει η ευθεία ΑΒ με το κέντρο του κύκλου, λέγεται **κυρτογώνιο** (μικρό), ενώ το άλλο **μη κυρτογώνιο** (μεγάλο). Συνήθως συμβολίζουμε το κυρτογώνιο τόξο με άκρα τα Α, Β με $\widehat{\mathrm{AB}}$, ενώ για το αντίστοιχο μη κυρτογώνιο χρησιμοποιούμε και ένα τρίτο σημείο π.χ. $\widehat{\mathrm{A\Gamma B}}$ (Σχ. 5α).

Μία γωνία $x\widehat{\mathrm{O}}y$ με κορυφή το κέντρο Ο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη**. Το τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ του κύκλου που περιέχεται στη γωνία $x\widehat{\mathrm{O}}y$ λέγεται **αντίστοιχο** τόξο της. Λέμε ακόμη ότι η επίκεντρη γωνία $x\widehat{\mathrm{O}}y$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{\mathrm{AB}}$ (Σχ. 5β).



ΣΧΗΜΑ 5α

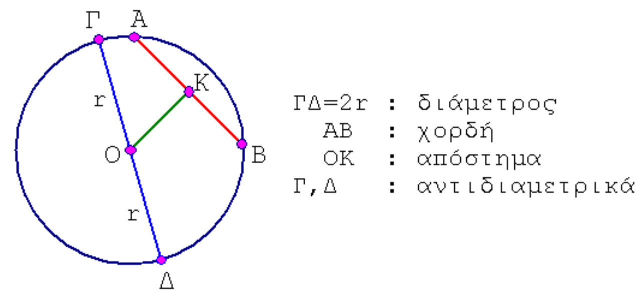


ΣΧΗΜΑ 5β

Ως **μέτρο** του τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$ λαμβάνουμε το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας $x\widehat{\mathrm{O}}y$ και το συμβολίζουμε $(\widehat{\mathrm{AB}})$ ή απλά $\widehat{\mathrm{AB}}$. Ένα τόξο μέτρου $180°$ λέγεται **ημικύκλιο**, ένα τόξο μέτρου $90°$ λέγεται **τεταρτοκύκλιο**, ενώ ένας κύκλος θεωρούμενος ως τόξο έχει μέτρο $360°$.

Δύο τόξα είναι συγκρίσιμα μόνο αν ανήκουν στον *ίδιο κύκλο* ή σε *ίσους κύκλους*. Δύο τέτοια τόξα θα είναι **ίσα** αν έχουν ίσες αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες ή ίσα μέτρα, αλλιώς θα είναι **άνισα**. **Μέσο** ενός τόξου $\widehat{\mathrm{AB}}$ ονομάζεται ένα εσωτερικό του σημείο Μ τέτοιο ώστε $\widehat{\mathrm{AM}} = \widehat{\mathrm{MB}}$.

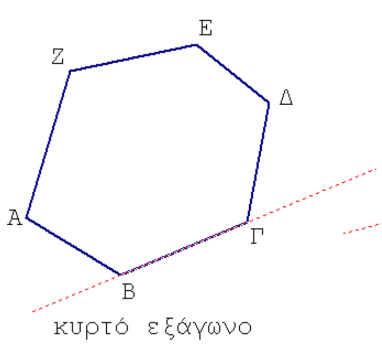
Έστω κύκλος (O, r). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ όπου Α, Β είναι δύο σημεία του κύκλου, ονομάζεται **χορδή** του κύκλου (ή των τόξων με άκρα τα Α, Β). Κάθε χορδή που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου λέγεται **διάμετρος** του κύκλου και είναι ίση με $2r$. Δύο σημεία Γ, Δ του κύκλου λέγονται **αντιδιαμετρικά** αν το τμήμα ΓΔ είναι διάμετρος του κύκλου. Ακόμη το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από το κέντρο του κύκλου σε μια χορδή ΑΒ του κύκλου λέγεται **απόστημα** της χορδής (Σχ. 6).



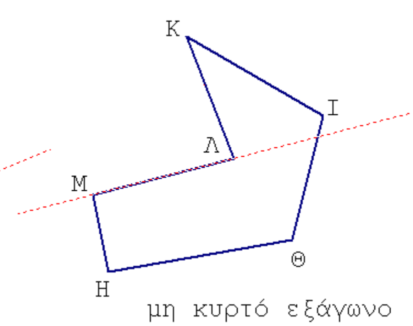
ΣΧΗΜΑ 6

Θεωρούμε τα σημεία $A_1, A_2, \cdots, A_n$ που έχουν καθορισμένη σειρά και ανά τρία διαδοχικά δεν είναι συνευθειακά. **Πολύγωνο** $A_1A_2\cdots A_n$, όπου $n \geq 3$, ονομάζουμε το σχήμα που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα A_1A_2 ,A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 με την ιδιότητα δύο οποιαδήποτε μη διαδοχικά τμήματα να μην έχουν κοινό σημείο. Τα σημεία $A_1, A_2, \cdots, A_n$ λέγονται **κορυφές** του πολυγώνου ενώ τα τμήματα A_1A_2 ,A_2A_3, $\cdots$, $A_{n-1}A_n$, A_nA_1 λέγονται **πλευρές** του πολυγώνου. Ένα πολύγωνο με 3 κορυφές λέγεται τρίγωνο, με 4 τετράπλευρο, με 5 πεντάγωνο κ.λ.π. Ένα πολύγωνο λέγεται **κυρτό** όταν ο φορέας οποιασδήποτε πλευράς του αφήνει όλες τις άλλες κορυφές του προς το ίδιο μέρος του, αλλιώς λέγεται **μη κυρτό** (Σχ. 7α και 7β). Με τον όρο πολύγωνο χωρίς άλλη διευκρίνιση εννοούμε κυρτό πολύγωνο.

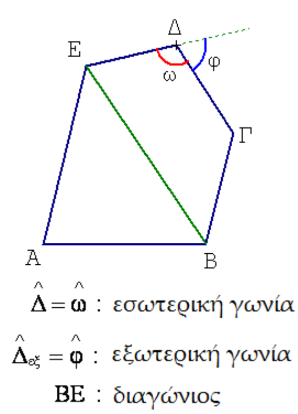
Γωνία (εσωτερική) ενός πολυγώνου είναι κάθε γωνία που σχηματίζεται από δύο διαδοχικές πλευρές του. **Εξωτερική γωνία** ενός πολυγώνου λέγεται κάθε γωνία που είναι εφεξής και παραπληρωματική μιας εσωτερικής γωνίας του. Κάθε τμήμα που έχει άκρα δύο μη διαδοχικές κορυφές ενός πολυγώνου λέγεται **διαγώνιος** του πολυγώνου (Σχ. 7γ). **Περίμετρος** ενός πολυγώνου ονομάζεται το άθροισμα των μηκών των πλευρών του.



ΣΧΗΜΑ 7α



ΣΧΗΜΑ 7β



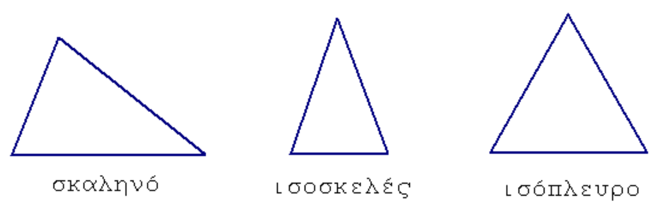
ΣΧΗΜΑ 7γ

1.3 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Θα συμβολίζουμε με α, β, γ τις πλευρές του ΒΓ, ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα και με τ την ημιπερίμετρο του τριγώνου, δηλαδή

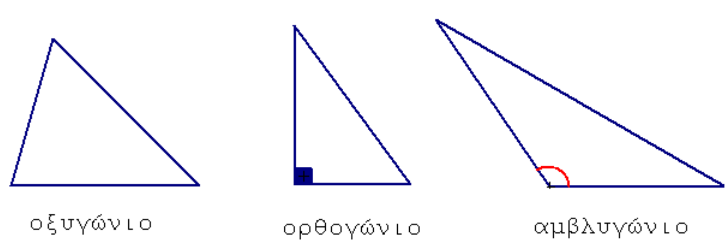
$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$$

Ένα τρίγωνο εξεταζόμενο ως προς τις πλευρές του ονομάζεται **σκαληνό** αν έχει όλες τις πλευρές του άνισες , **ισοσκελές** αν έχει δύο πλευρές του ίσες και **ισόπλευρο** αν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (Σχ. 8). Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ λέμε ότι έχει **βάση** την ΒΓ και **κορυφή** το Α.



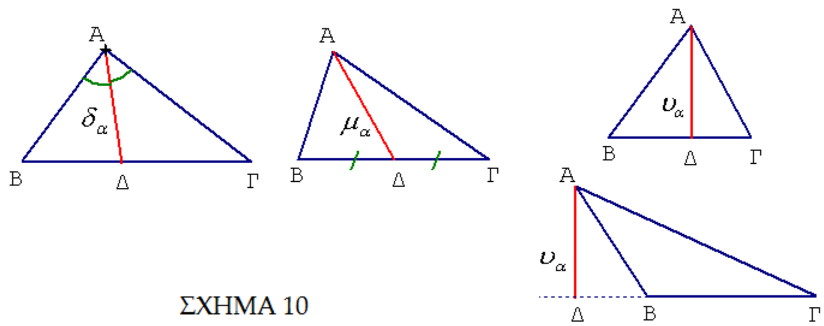
ΣΧΗΜΑ 8

Ένα τρίγωνο εξεταζόμενο ως προς τις γωνίες του ονομάζεται **οξυγώνιο** αν όλες οι γωνίες του είναι οξείες , **ορθογώνιο** αν έχει μία γωνία ορθή και **αμβλυγώνιο** αν έχει μία γωνία αμβλεία (Σχ. 9). Η πλευρά ενός ορθογωνίου τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία ονομάζεται **υποτείνουσα**.



ΣΧΗΜΑ 9

Ονομάζουμε **διχοτόμο** μιας γωνίας ενός τριγώνου το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. **Διάμεσο** ενός τριγώνου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. **Ύψος** ενός τριγώνου ονομάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που άγεται από μια κορυφή του, καταλήγει στο φορέα της απέναντι πλευράς του και είναι κάθετο στον φορέα αυτόν (Σχ. 10). Θα συμβολίζουμε με δ_α, μ_α και υ_α τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος αντίστοιχα, που καταλήγουν στην πλευρά α.



ΣΧΗΜΑ 10

Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου ονομάζονται **κύρια στοιχεία** του, ενώ οι διχοτόμοι, οι διάμεσοι και τα ύψη **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Ασκήσεις για λύση

1. Θεωρούμε μια ευθεία και δύο σημεία της Α, Β. Στην προέκταση του τμήματος ΑΒ (προς το μέρος του Β) παίρνουμε σημείο Γ.
α) Ποια ευθύγραμμα τμήματα ορίζονται με άκρα τα Α, Β, Γ ;
β) Ποιες ημιευθείες ορίζονται με αρχή το Α ή το Β ή το Γ και ποιες από αυτές είναι αντικείμενες ;

2. Αν τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά και ΑΒ $= 10$, ΒΓ $= 14$ και ΓΑ $= 4$, ποιο από τα σημεία Α, Β, Γ βρίσκεται μεταξύ των άλλων δύο;

3. Θεωρούμε τρία σημεία Α, Β, Γ μιας ευθείας ε. Αν ΑΒ $= 8$ και ΑΓ $= 10$, να βρείτε τις πιθανές τιμές του μήκους του τμήματος ΒΓ.

4. Θεωρούμε 4 σημεία Α, Β, Γ, Δ. Να εξετάσετε αν υπάρχει περίπτωση τα σημεία αυτά να ορίζουν 5 ευθείες ακριβώς, με δεδομένο ότι κάθε ευθεία πρέπει να διέρχεται από 2 τουλάχιστον από τα σημεία Α, Β, Γ, Δ.

5. Αν οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματικές και οι γωνίες $\hat{\vartheta}$, $\hat{\varphi}$ είναι συμπληρωματικές να υπολογίσετε τη διαφορά $\hat{\omega} - \hat{\vartheta}$.

6. Η παραπληρωματική μιας γωνίας $\hat{\omega}$ είναι πενταπλάσια της συμπληρωματικής της $\hat{\omega}$. Να υπολογίσετε την $\hat{\omega}$.

7. Θεωρούμε τρεις ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο. Ονομάζουμε $\hat{\omega}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\vartheta}$ τρεις από τις γωνίες που σχηματίζονται, οι οποίες ανά δύο δεν είναι εφεξής. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\omega} + \hat{\varphi} + \hat{\vartheta}$.

8. Θεωρούμε τις εφεξής γωνίες $x\widehat{\mathrm{O}}y = 30°$ και $y\widehat{\mathrm{O}}z = 70°$. Αν $\mathrm{O}t$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $x\widehat{\mathrm{O}}z$, να υπολογίσετε τη γωνία $y\widehat{\mathrm{O}}t$.

9. Θεωρούμε κύκλο και δύο διαμέτρους του ΑΒ, ΓΔ τέτοιες ώστε $\widehat{\text{ΓΒ}} = 2\widehat{\text{ΑΓ}}$. Να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\widehat{\text{ΑΓ}}$, $\widehat{\text{ΓΒ}}$, $\widehat{\text{ΒΔ}}$ και $\widehat{\text{ΔΑ}}$ καθώς και των αντίστοιχων επικέντρων γωνιών.

10. Θεωρούμε δύο κύκλους (Ο,R) και (Ο,r) με $R > r$ και την επίκεντρη γωνία $x\widehat{\text{O}}y = 30°$, η οποία έχει αντίστοιχα τόξα στους δύο κύκλους τα $\widehat{\text{ΑΒ}}$, $\widehat{\text{ΓΔ}}$. Να βρείτε τα μέτρα αυτών των δύο τόξων και να εξετάσετε αν αυτά είναι ίσα.

11. Θεωρούμε δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου με κέντρο Ο, οι οποίες έχουν μοναδικό κοινό σημείο Κ, εσωτερικό του κύκλου, το οποίο δεν ταυτίζεται με το Ο. Ονομάζουμε $\widehat{K}_1$, $\widehat{K}_2$ ένα ζεύγος κατακορυφήν γωνιών με κορυφή το Κ. Να εξετάσετε αν τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα.

12. Έστω κύκλος με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ του κύκλου διαφορετικό από τα Α, Β. Αν ΟΔ, ΟΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών $B\widehat{O}\Gamma$ και $A\widehat{O}\Gamma$ αντιστοίχως (Δ, Ε σημεία του κύκλου), αποδείξτε ότι το τόξο $\widehat{\text{ΔΕ}}$ είναι τεταρτοκύκλιο.

13. Ένα τετράπλευρο έχει πλευρές x, $x+1$, $x+2$, $x+2$ και περίμετρο 17. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του.

14. Σχεδιάστε ένα κυρτό πεντάγωνο και ένα μη κυρτό πεντάγωνο.

15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ η $\widehat{B}_{\varepsilon\xi}$ είναι πενταπλάσια της $\widehat{B}$. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B}$.

16. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστή ή λανθασμένη.
α) Με δ_a συμβολίζουμε τη διάμεσο τριγώνου ΑΒΓ προς την πλευρά ΒΓ.
β) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο είναι και ισοσκελές.
γ) Η περίμετρος ενός τριγώνου ΑΒΓ συμβολίζεται με τ.
δ) Το ύψος υ_a ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι κάθετο στην πλευρά ΑΒ.

17. ★ Δίνονται $n \geq 3$ σημεία τα οποία ανά τρία δεν είναι συνευθειακά . Αποδείξτε ότι το πλήθος των ευθειών που ορίζουν τα σημεία αυτά λαμβανόμενα ανά δύο είναι ίσο με

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

18. ★ Σε ένα πολύγωνο με n πλευρές να δείξετε ότι το πλήθος των διαγωνίων του είναι ίσο με

$$\frac{n(n-3)}{2}.$$

Κεφάλαιο 2

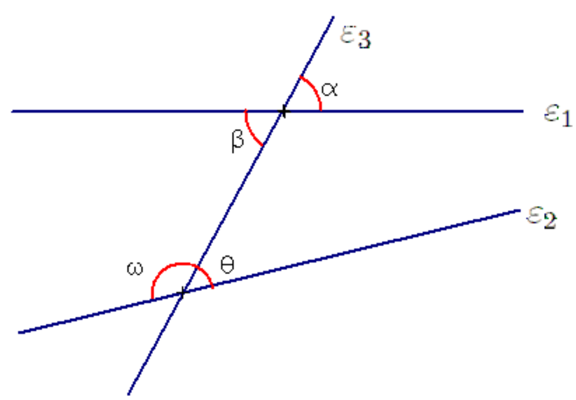
Παράλληλες ευθείες

2.1 Τέμνουσες παράλληλων ευθειών

Δύο διαφορετικές ευθείες λέγονται **τεμνόμενες** αν έχουν ένα μόνο κοινό σημείο και **παράλληλες** αν δεν έχουν κοινό σημείο. Αν δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι παράλληλες γράφουμε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ε_3. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες. Οι γωνίες που βρίσκονται μεταξύ των ε_1 και ε_2 λέγονται **εντός**, ενώ οι υπόλοιπες γωνίες λέγονται **εκτός**. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται **επί τα αυτά μέρη**, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται **εναλλάξ**.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών μπορούμε να ονομάσουμε οποιαδήποτε από τις οκτώ γωνίες που σχηματίζονται. Για παράδειγμα οι γωνίες $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$ ονομάζονται εντός εναλλάξ, οι $\hat{\beta}$, $\hat{\omega}$ εντός και επί τα αυτά μέρη ενώ οι $\hat{\theta}$, $\hat{\alpha}$ εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη (Σχ. 11).



ΣΧΗΜΑ 11

Δεχόμαστε αξιωματικά [1] ότι αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εκτός και επί τα αυτά γωνίες ίσες.

Άμεσα προκύπτει από το προηγούμενο αξίωμα ότι αν δοθούν δύο παράλληλες ευθείες και μια τέμνουσα, που δεν είναι κάθετη προς αυτές, τότε από τις 8 γωνίες που σχηματίζονται οι 4 οξείες είναι ίσες και οι 4 αμβλείες επίσης ίσες. Μια οξεία και μια αμβλεία όμως είναι παραπληρωματικές. Για παράδειγμα:

- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.

Παράδειγμα 1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρνουμε ευθεία παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Αποδείξτε ότι

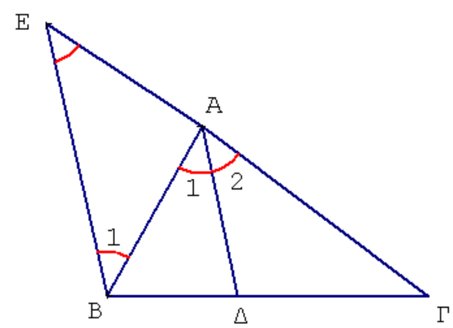
$$\widehat{E} = E\widehat{B}A\,.$$

Λύση. Επειδή $A\Delta \parallel BE$ έχουμε (Σχ. 12) :

- $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$, ως εντός εναλλάξ.
- $\widehat{E} = \widehat{A}_2$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά.

Επειδή $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ έπεται ότι $\widehat{B}_1 = \widehat{E}$, δηλαδή

$$\widehat{E} = E\widehat{B}A\,.$$

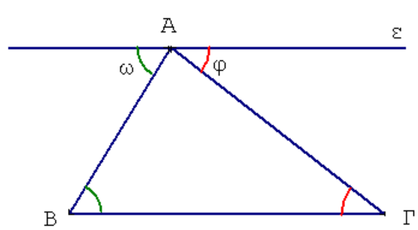


ΣΧΗΜΑ 12

2.2 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Θεώρημα 3. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με $180°$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε από την κορυφή Α ευθεία ε παράλληλη στην ΒΓ (Σχ. 13).



ΣΧΗΜΑ 13

[1] Το αξίωμα αυτό είναι ισοδύναμο με το Ευκλείδειο Αίτημα (Βλέπε ιστορικό σημείωμα στο κεφάλαιο 4 του [3]). Στο [3] επιλέγεται άλλο αξίωμα ως ισοδύναμο του Ευκλείδειου Αιτήματος.

Τότε $\hat{\omega} = \widehat{B}$ και $\hat{\varphi} = \widehat{\Gamma}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ε και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Επομένως

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = \widehat{A} + \hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^\circ.$$

Άμεσα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα ότι:

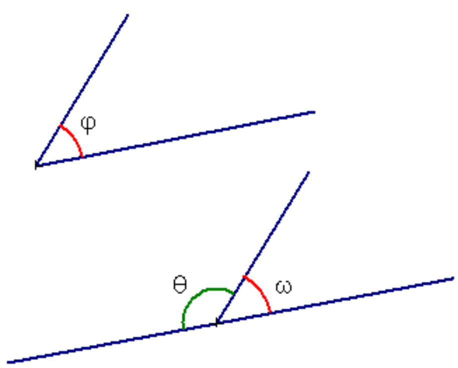
- Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. (Αποδείξτε το.)

- Το άθροισμα των γωνιών ενός τετραπλεύρου είναι ίσο με 360°. (Αποδείξτε το.)

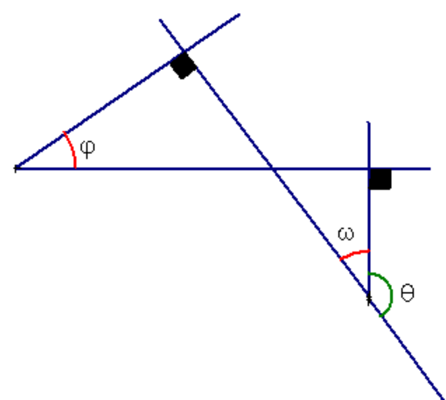
Θεώρημα 4. Θεωρούμε δύο γωνίες με πλευρές μία προς μία παράλληλες ή μία προς μία κάθετες.
α) Αν και οι δύο γωνίες είναι οξείες ή αμβλείες τότε είναι ίσες.
β) Αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία τότε είναι παραπληρωματικές.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Για παράδειγμα στα σχήματα 14α, 14β έχουμε γωνίες με πλευρές παράλληλες ή κάθετες αντίστοιχα και ισχύουν οι σχέσεις

$$\hat{\varphi} = \hat{\omega} \quad \text{και} \quad \hat{\varphi} + \hat{\theta} = 180^\circ.$$



ΣΧΗΜΑ 14α



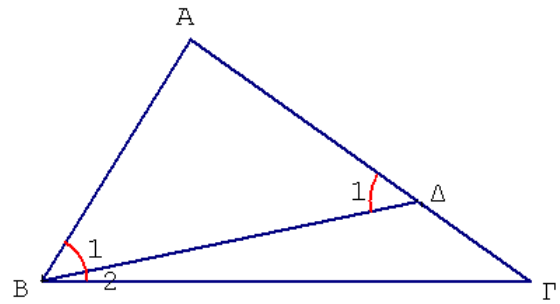
ΣΧΗΜΑ 14β

Παράδειγμα 2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 20^\circ$ και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Delta}B$.
α) Υπολογίστε τη γωνία $\Delta\widehat{B}\Gamma$.
β) Αποδείξτε ότι

$$\widehat{\Gamma} = 80^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

Λύση. α) Επειδή $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (Σχ. 15) έχουμε

$$\Delta\widehat{B}\Gamma = \widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{B}_1 = \widehat{B} - \widehat{\Delta}_1 = \widehat{B} - (\widehat{B}_2 + \widehat{\Gamma}).$$



ΣΧΗΜΑ 15

Άρα έχουμε $\widehat{B}_2 = \widehat{B} - \widehat{\varGamma} - \widehat{B}_2$ και επειδή $\widehat{B} - \widehat{\varGamma} = 20^\circ$ προκύπτει ότι $2\widehat{B}_2 = 20^\circ$ οπότε

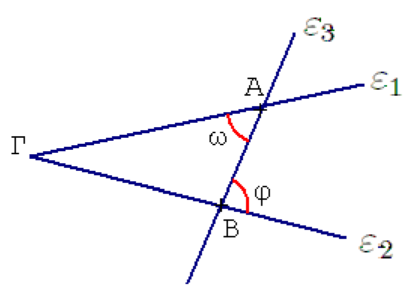
$$\widehat{B}_2 = 10^\circ.$$

β) Έχουμε διαδοχικά

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\varGamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + 20^\circ + \widehat{\varGamma} + \widehat{\varGamma} = 180^\circ \Leftrightarrow \widehat{\varGamma} = 80^\circ - \frac{\widehat{A}}{2}.$$

2.3 Κριτήρια παραλληλίας

Θεώρημα 5. Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$ και ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 δεν είναι παράλληλες (Σχ. 16).



ΣΧΗΜΑ 16

Τότε θα τέμνονται σε σημείο Γ και η $\hat{\varphi}$ είναι εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε θα έχουμε

$$\hat{\varphi} = \widehat{\varGamma} + \hat{\omega} \Rightarrow \hat{\varphi} > \hat{\omega}$$

που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$.

Άμεσα προκύπτει από το προηγούμενο θεώρημα ότι για να δείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες αρκεί να δείξουμε ένα από τα παρακάτω[2]:

- Οι εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι ίσες.
- Οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι παραπληρωματικές.
- Είναι παράλληλες προς τρίτη ευθεία.
- Είναι κάθετες προς τρίτη ευθεία.

Ασκήσεις για λύση

19. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y = 50^\circ$ και σημείο Δ της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Δ προς την Ox τέμνει την Oy στο Ε, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΟΔΕ.

20. Θεωρούμε δύο σημεία Α, Β μιας ευθεία ε και φέρνουμε τις ημιευθείες Ax, By με $Ax \parallel By$, προς το ίδιο μέρος της ε. Η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}x$ τέμνει την By στο Γ και η γωνία $A\widehat{B}\mathit{\Gamma}$ είναι ίση με 70°. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $A\widehat{\mathit{\Gamma}}B$.

21. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $x'x$, $y'y$ και παίρνουμε πάνω σ' αυτές σημεία Α, Β αντίστοιχα και σημείο Η μεταξύ των παραλλήλων έτσι ώστε να είναι $H\widehat{A}x = 40^\circ$ και $H\widehat{B}y = 30^\circ$. Να υπολογίσετε τη γωνία $A\widehat{H}B$.

22. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 2\widehat{B}$ και $\widehat{\mathit{\Gamma}}_{\varepsilon\xi} = 100^\circ + \widehat{B}$. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

23. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\widehat{A} = 3\widehat{\mathit{\Gamma}}$ και $\widehat{B} = 2\widehat{\mathit{\Gamma}}$. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του.

24. Εξετάστε αν είναι δυνατόν οι διχοτόμοι δύο γωνιών ενός τριγώνου να τέμνονται κάθετα.

25. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = \widehat{\mathit{\Gamma}}$ και $\widehat{B} = 4\widehat{A}$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\mathit{\Gamma}}$, να υπολογίσετε τη γωνία $B\widehat{I}\mathit{\Gamma}$.

26. Από σημείο Δ της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ με $\widehat{B} = \widehat{\mathit{\Gamma}}$, φέρνουμε την ΔΕ κάθετη στην ΑΓ. Αποδείξτε ότι $\widehat{A} = 2E\widehat{\Delta}\mathit{\Gamma}$.

27. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\widehat{A}_{\varepsilon\xi} = 90^\circ + \frac{1}{2}\widehat{B}$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A} = \widehat{\mathit{\Gamma}}$.

[2] για τα τρία πρώτα δεδομένου ότι τέμνονται από τρίτη ευθεία

28. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Αποδείξτε ότι η γωνία που σχηματίζει το ύψος με τη διχοτόμο που αντιστοιχούν στην πλευρά ΒΓ, είναι ίση με $\frac{1}{2}\left(\widehat{B} - \widehat{\Gamma}\right)$.

29. Αν ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών του τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι $A\widehat{\Delta}B + B\widehat{E}\Gamma + \Gamma\widehat{Z}A = 270°$.

30. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, τέμνονται στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 2A\widehat{E}B$.

31. Θεωρούμε κυρτό πολύγωνο με ν κορυφές. Αποδείξτε ότι:
α) Το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του είναι $(\nu - 2)180°$.
β) Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του είναι $360°$.

32. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$. Φέρνουμε το ύψος ΑΔ και παίρνουμε στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΔΓ σημείο Ε. Από το Ε φέρνουμε τα τμήματα $EZ \perp A\Delta$ και $EH \perp A\Gamma$. Αποδείξτε ότι οι γωνίες $\widehat{B}$ και $Z\widehat{E}H$ είναι παραπληρωματικές.

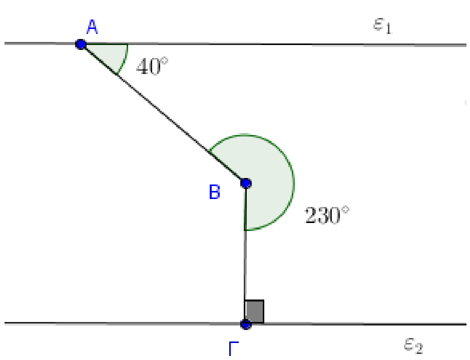
33. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ παράλληλο στην ΒΓ και από το Ζ ημιευθεία $Zx \parallel A\Gamma$. Αποδείξτε ότι $B\widehat{A}\Delta = A\widehat{Z}x$ ή $B\widehat{A}\Delta + A\widehat{Z}x = 180°$.

34. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Αποδείξτε ότι η διχοτόμος δ της εξωτερικής γωνίας $\widehat{A}$ είναι παράλληλη προς την ΒΓ.

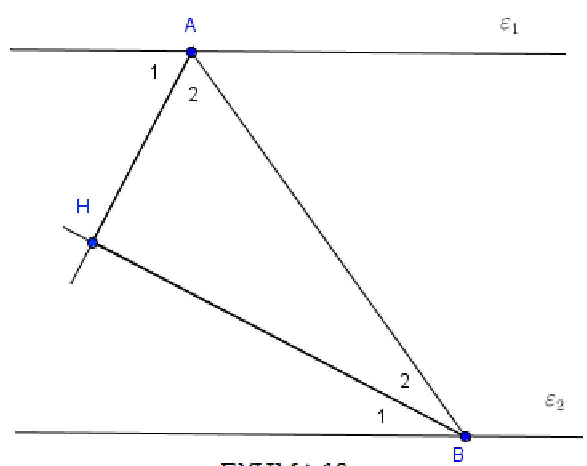
35. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τις ημιευθείες Ax, By τέτοιες ώστε να βρίσκονται και οι δύο στο ίδιο ημιεπίπεδο της ευθείας ΑΒ. Αν οι μη κυρτές γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ είναι $290°$ και $250°$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $Ax \parallel By$.

36. Για τα δεδομένα του σχήματος 17 να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.

37. Στο σχήμα 18 δίνονται οι σχέσεις $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$ και $AH \perp BH$. Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.



ΣΧΗΜΑ 17



ΣΧΗΜΑ 18

Κεφάλαιο 3

Τρίγωνα

3.1 Ισότητα τριγώνων

Δύο τρίγωνα λέμε ότι είναι **ίσα** αν έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις απέναντι των ίσων πλευρών γωνίες ίσες. Δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ, ΔΕΖ μπορούν να συμπέσουν με κατάλληλη τοποθέτηση του ενός επί του άλλου και γράφουμε

$$\overset{\triangle}{\mathrm{AB\Gamma}}=\overset{\triangle}{\Delta\mathrm{EZ}} \qquad \text{ή απλά} \qquad \mathrm{AB\Gamma} = \Delta\mathrm{EZ}.$$

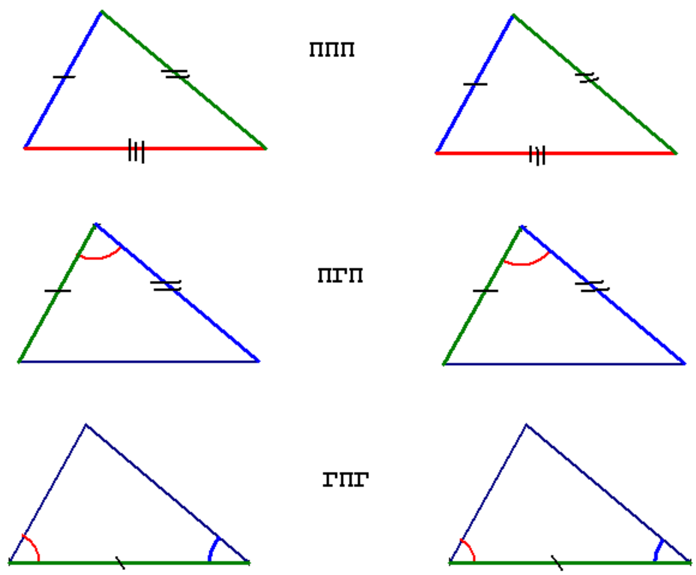
Ακολουθούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων τα οποία μας βοηθούν να αποδείξουμε την ισότητα δύο τριγώνων χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να εξετάσουμε προηγουμένως, σύμφωνα με τον ορισμό, την ισότητα όλων των αντίστοιχων ζευγών πλευρών και γωνιών των δύο τριγώνων. Μας αρκούν, όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί, τρία κατάλληλα ζεύγη ίσων κύριων στοιχείων των δύο τριγώνων.

Θεώρημα 6. Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία.
β) Έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες.[1]
γ) Έχουν μία πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία.[2]
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Ακολουθεί μια σχηματική παράσταση των κριτηρίων ισότητας τριγώνων.

[1]Για ορθογώνια τρίγωνα οι ίσες γωνίες (ορθές) δεν είναι απαραίτητο να είναι περιεχόμενες των πλευρών που είναι μία προς μία ίσες. Ακριβέστερα, δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν την υποτείνουσα και μια κάθετη πλευρά ίσες μία προς μία.

[2]Επειδή το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι $180°$, δεν είναι τελικά απαραίτητο να έχουμε τις προσκείμενες γωνίες ίσες μία προς μία. Ακριβέστερα, αν σε δύο τρίγωνα η μία πλευρά, η απέναντί της γωνία και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνία του ενός είναι αντίστοιχα ίσες με μία πλευρά, την απέναντί της γωνία και μία προσκείμενη σε αυτήν γωνία του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

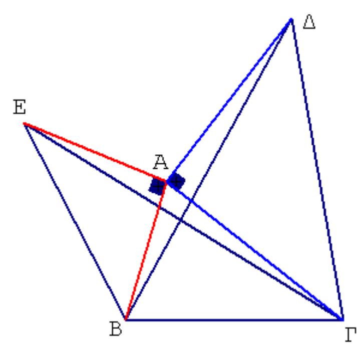


ΣΧΗΜΑ 19

Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει κριτήριο ισότητας που να μην περιλαμβάνει την ισότητα μιας τουλάχιστον πλευράς των τριγώνων.

Παράδειγμα 3. Θεωρούμε οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ. Εκτός αυτού σχεδιάζουμε τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ με υποτείνουσες τις ΓΔ, ΒΕ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.
Λύση. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ έχουν (Σχ. 20)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{AB} &= \mathrm{AE} && \text{από την υπόθεση,}\\
\mathrm{A\Delta} &= \mathrm{A\Gamma} && \text{από την υπόθεση,}\\
B\widehat{A}\Delta &= E\widehat{A}\Gamma && \text{αφού είναι ίσες με } 90^\circ + B\widehat{A}\Gamma.
\end{aligned}
$$

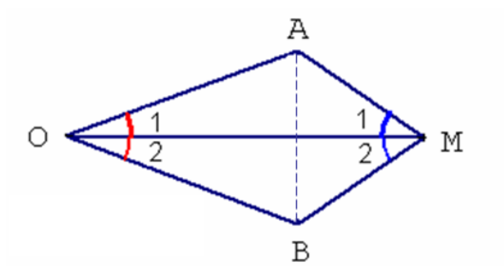


ΣΧΗΜΑ 20

Επομένως είναι ίσα (ΠΓΠ).

Παράδειγμα 4. Θεωρούμε τετράπλευρο ΟΑΜΒ τέτοιο ώστε η διαγώνιός του ΟΜ να διχοτομεί τις γωνίες του $\widehat{\mathrm{O}}$ και $\widehat{\mathrm{M}}$. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΜΑΒ είναι ισοσκελή.
Λύση. Θα δείξουμε ότι ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ. Αν δείξουμε ότι τα τρίγωνα ΟΑΜ, ΟΒΜ είναι ίσα τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα. Τα τρίγωνα ΟΑΜ, ΟΒΜ έχουν (Σχ. 21)

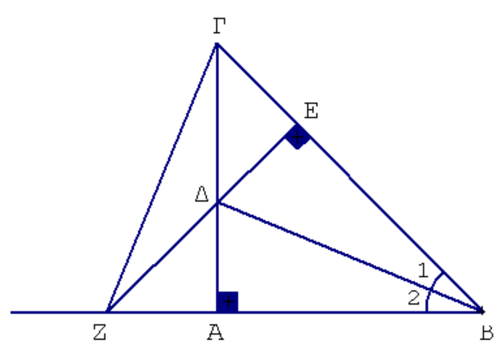
$$\begin{aligned} &\mathrm{OM} = \mathrm{OM} && \text{ως κοινή πλευρά,}\\ &\widehat{\mathrm{O}}_1 = \widehat{\mathrm{O}}_2 && \text{αφού ΟΜ διχοτόμος της } \widehat{\mathrm{O}},\\ &\widehat{\mathrm{M}}_1 = \widehat{\mathrm{M}}_2 && \text{αφού ΟΜ διχοτόμος της } \widehat{\mathrm{M}}. \end{aligned}$$



ΣΧΗΜΑ 21

Επομένως είναι ίσα (ΓΠΓ).

Παράδειγμα 5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 90°$ και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε $\varDelta E \perp B\varGamma$, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.
Λύση. Από τα δεδομένα προκύπτει το παρακάτω σχήμα.



ΣΧΗΜΑ 22

Θα δείξουμε ότι $B\varGamma = BZ$. Παρατηρούμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΖΕ έχουν κοινή τη γωνία $\widehat{B}$ και είναι ορθογώνια. Αναζητούμε λοιπόν και την ισότητα δύο ομώνυμων πλευρών, οπότε θα προκύψει η ισότητα των τριγώνων.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ έχουν

$\widehat{A} = \widehat{E}$	ως ορθές,
$\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$	αφού η ΒΔ είναι διχοτόμος,
ΒΔ = ΒΔ	ως κοινή πλευρά.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΔ είναι ίσα και συνεπώς θα είναι $AB = BE$.

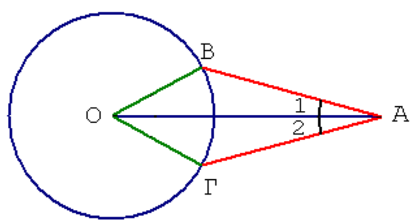
Για τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΖΕ έχουμε

$\widehat{A} = \widehat{E}$	ως ορθές,
$\widehat{B} = \widehat{B}$	ως κοινή γωνία,
ΑΒ = ΒΕ	(προηγούμενο συμπέρασμα).

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΖΕ είναι ίσα και συνεπώς θα είναι $B\Gamma = BZ$.

Παράδειγμα 6. Ένα σημείο Α που βρίσκεται εκτός κύκλου κέντρου Ο, απέχει εξίσου από δύο σημεία Β, Γ του κύκλου. Να δείξετε ότι η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$ διέρχεται από το Ο.

Λύση. Φέρνουμε την ΑΟ και θα δείξουμε ότι αυτή είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\widehat{A}\Gamma$, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (Σχ. 23).



ΣΧΗΜΑ 23

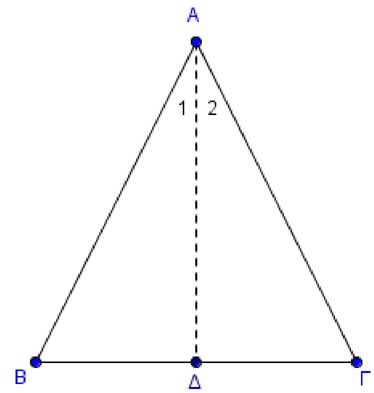
Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΑΟΓ έχουν

ΑΒ = ΑΓ	από την υπόθεση,
ΟΒ = ΟΓ	ως ακτίνες του ίδιου κύκλου,
ΟΑ = ΟΑ	ως κοινή πλευρά.

Επομένως είναι ίσα (ΠΠΠ) οπότε προκύπτει $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

3.2 Εφαρμογές της ισότητας τριγώνων

Θεώρημα 7. α) Αν ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές τότε οι προσκείμενες στη βάση γωνίες του είναι ίσες.
β) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες του ίσες τότε είναι ισοσκελές.
Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τη διχοτόμο ΑΔ (Σχ. 24).



ΣΧΗΜΑ 24

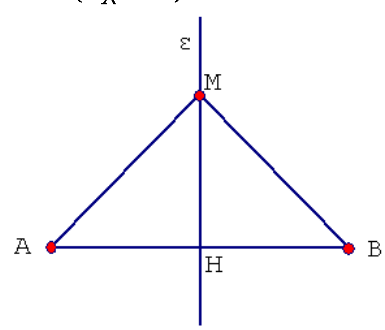
α) Υποθέτουμε ότι $AB = A\Gamma$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν $AB = A\Gamma$ (από την υπόθεση), $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (αφού ΑΔ διχοτόμος) και ΑΔ κοινή πλευρά. Επομένως $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.
β) Υποθέτουμε ότι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα διότι έχουν $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ (αφού ΑΔ διχοτόμος), ΑΔ κοινή πλευρά και $A\widehat{\Delta}B = A\widehat{\Delta}\Gamma$ αφού

$$A\widehat{\Delta}B = 180^\circ - \widehat{A}_1 - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A}_2 - \widehat{\Gamma} = A\widehat{\Delta}\Gamma.$$

Επομένως $AB = A\Gamma$.

Θεώρημα 8. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Δ σημείο της πλευράς ΒΓ. Θεωρούμε τις παρακάτω προτάσεις:
α) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ (δηλ. ΑΒ $=$ ΑΓ).
β) Το ΑΔ είναι διχοτόμος.
γ) Το ΑΔ είναι διάμεσος.
δ) Το ΑΔ είναι ύψος.
Αν αληθεύουν δύο από τις παραπάνω προτάσεις τότε αληθεύουν και οι άλλες δύο.
Απόδειξη. Βλέπε [5].

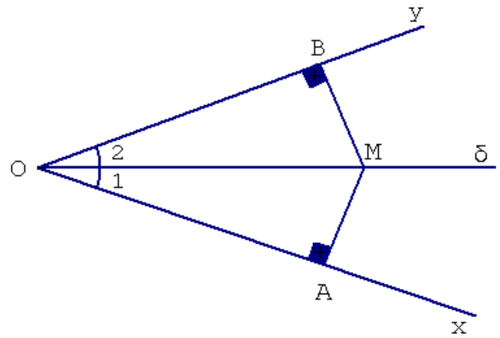
Θεώρημα 9. Ένα σημείο ισαπέχει από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος αν και μόνο αν βρίσκεται στην μεσοκάθετο του τμήματος.
Απόδειξη. Έστω ΑΒ ένα ευθύγραμμο τμήμα και Η το μέσο του (Σχ. 25).



ΣΧΗΜΑ 25

Έστω σημείο Μ με την ιδιότητα $MA = MB$. Θα δείξουμε ότι η ευθεία ΜΗ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ. Πράγματι, το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές και το ΜΗ διάμεσος άρα θα είναι και ύψος. Συνεπώς η ευθεία ΜΗ είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.
Έστω ε η μεσοκάθετη του ΑΒ και Μ σημείο αυτής. Θα δείξουμε ότι $MA = MB$. Πράγματι, στο τρίγωνο ΜΑΒ το ΜΗ είναι διάμεσος και ύψος, οπότε το ΜΑΒ θα είναι ισοσκελές με κορυφή το Μ, δηλαδή $MA = MB$.

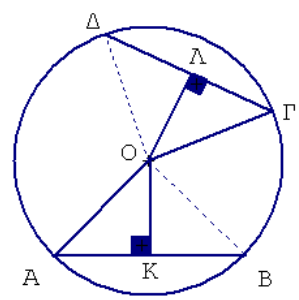
Θεώρημα 10. Ένα σημείο μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της αν και μόνο αν βρίσκεται στην διχοτόμο της.
Απόδειξη. Θεωρούμε γωνία $x\widehat{O}y$, ένα σημείο της Μ και συμβολίζουμε με ΜΑ, ΜΒ τις αποστάσεις του Μ από τις πλευρές της γωνίας (Σχ. 26).



ΣΧΗΜΑ 26

Υποθέτουμε ότι $MA = MB$ και θα δείξουμε ότι η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\widehat{O}y$, δηλαδή θα δείξουμε ότι $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Τα τρίγωνα ΜΟΑ, ΜΟΒ έχουν την ΟΜ κοινή, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ και $MA = MB$. Άρα είναι ίσα, οπότε $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.
Υποθέτουμε τώρα ότι το Μ ανήκει στη διχοτόμο Οδ της $x\widehat{O}y$ και θα δείξουμε ότι $MA = MB$. Τα τρίγωνα ΜΟΑ, ΜΟΒ έχουν την ΟΜ κοινή, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$ και $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$. Άρα είναι ίσα, οπότε $MA = MB$.

Θεώρημα 11. Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.
Απόδειξη. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ με αντίστοιχα αποστήματα ΟΚ, ΟΛ (Σχ. 27).
Υποθέτουμε πρώτα ότι ΑΒ = ΓΔ και θα δείξουμε ότι ΟΚ = ΟΛ. Τα τρίγωνα ΑΟΚ και ΓΟΛ έχουν $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90°$ και $OA = O\Gamma = \rho$. Στα ισοσκελή τρίγωνα ΑΟΒ, ΓΟΔ τα ΟΚ, ΟΛ είναι ύψη οπότε θα είναι και διάμεσοι, συνεπώς $AK = \Gamma\Lambda$ ως μισά ίσων τμημάτων. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα τρίγωνα ΑΟΚ και ΓΟΛ είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.
Υποθέτουμε τώρα ότι ΟΚ = ΟΛ και θα δείξουμε ότι ΑΒ = ΓΔ. Τα τρίγωνα ΑΟΚ και ΓΟΛ είναι ίσα αφού $\widehat{K} = \widehat{\Lambda} = 90°$, $OA = O\Gamma = \rho$ και ΟΚ = ΟΛ. Συνεπώς $AK = \Gamma\Lambda$, οπότε ΑΒ = ΓΔ.

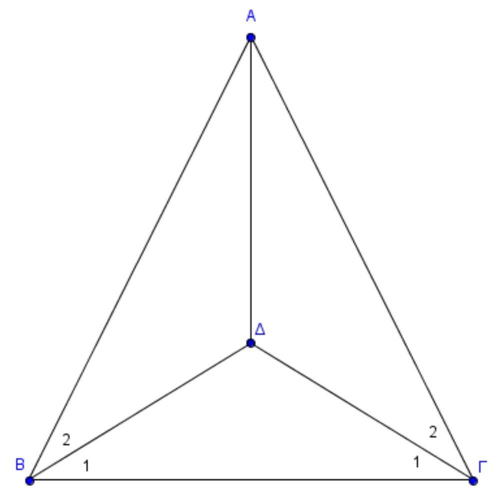


ΣΧΗΜΑ 27

Θεώρημα 12. α) Αν δύο τόξα ενός κύκλου (ή ίσων κύκλων) είναι ίσα, τότε οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.
β) Αν δύο χορδές ενός κύκλου (ή ίσων κύκλων) είναι ίσες, τότε τα αντίστοιχα τόξα τους είναι ίσα, με την προϋπόθεση ότι αυτά είναι και τα δύο κυρτογώνια ή και τα δύο μη κυρτογώνια.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Παράδειγμα 7. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και ονομάζουμε Δ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ του τριγώνου. Αποδείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.
β) Η ευθεία ΑΔ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ.

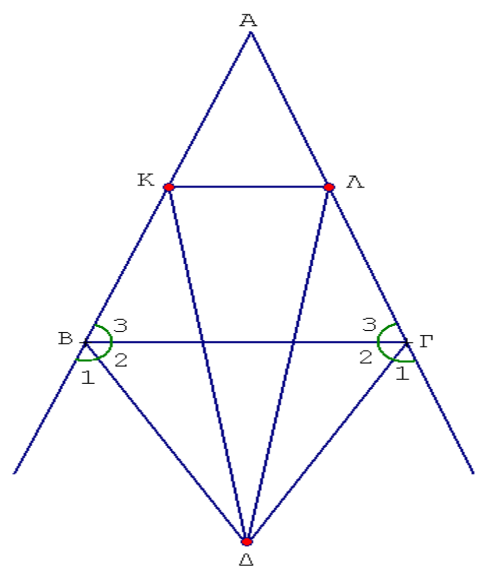
Λύση. (Σχ. 28)
α) Επειδή $AB = A\Gamma$ θα είναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$. Οι ΒΔ, ΓΔ είναι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{B}$ και $\widehat{\Gamma}$ οπότε $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1$ ως μισά ίσων γωνιών.
Έπεται ότι το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές με $\Delta B = \Delta\Gamma$.
β) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα αφού $AB = A\Gamma$, $\Delta B = \Delta\Gamma$ και η ΑΔ είναι κοινή πλευρά. Άρα $B\widehat{A}\Delta = \Delta\widehat{A}\Gamma$, δηλαδή η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$. Επειδή $AB = A\Gamma$ η διχοτόμος ΑΔ θα είναι κάθετη στη ΒΓ και θα διέρχεται από το μέσο της, δηλαδή θα είναι μεσοκάθετος του ΒΓ.



ΣΧΗΜΑ 28

Παράδειγμα 8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Οι εξωτερικές διχοτόμοι [3] των γωνιών του $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

Λύση. (Σχ. 29)
Οι γωνίες $\widehat{B}_3$, $\widehat{\Gamma}_3$ είναι ίσες ως προσκείμενες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ. Οι αντίστοιχες εξωτερικές θα είναι επίσης ίσες ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών και συνεπώς $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$ ως μισά ίσων γωνιών.
Τα τρίγωνα ΚΒΔ, ΛΓΔ έχουν $KB = \Lambda\Gamma$ (ως μισά ίσων τμημάτων), $K\widehat{B}\Delta = \Lambda\widehat{\Gamma}\Delta$ (ως αθροίσματα ίσων γωνιών) και $B\Delta = \Gamma\Delta$ (αφού $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_2$). Επομένως τα τρίγωνα ΚΒΔ, ΛΓΔ είναι ίσα, οπότε $K\Delta = \Lambda\Delta$, δηλαδή το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

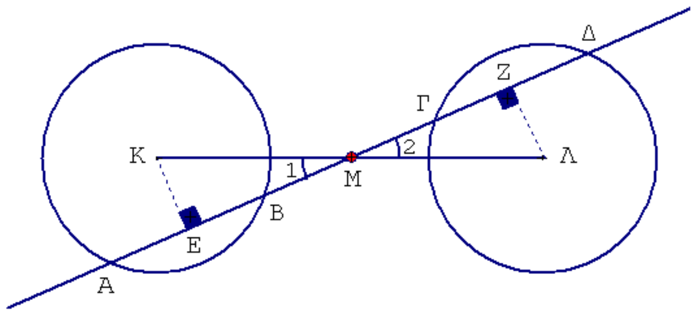


ΣΧΗΜΑ 29

[3] Ονομάζουμε **εξωτερική διχοτόμο** μιας γωνίας ενός τριγώνου την διχοτόμο της αντίστοιχης εξωτερικής γωνίας του.

Παράδειγμα 9. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και το μέσο του Μ. Γράφουμε με κέντρα τα Κ, Λ δύο ίσους κύκλους ακτίνας $\rho < K\Lambda/2$. Από το Μ φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $AB = \Gamma\Delta$.

Λύση. Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα (Σχ. 30).



ΣΧΗΜΑ 30

Τα τρίγωνα ΚΕΜ και ΛΖΜ έχουν

ΚΜ = ΜΛ	αφού το Μ είναι μέσο του ΚΛ,
$\widehat{M_1} = \widehat{M_2}$	ως κατακορυφήν,
$\widehat{E} = \widehat{Z}$	ως ορθές.

Άρα τα τρίγωνα ΚΕΜ και ΛΖΜ είναι ίσα, οπότε $KE = \Lambda Z$.

3.3 Ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο

Θεώρημα 13. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ.

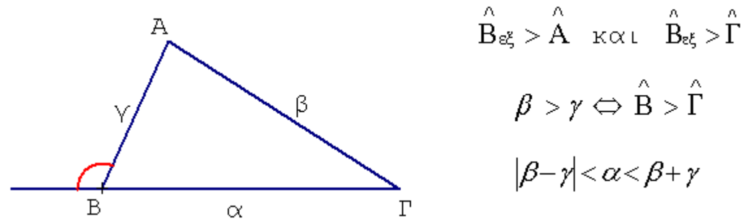
α) Κάθε εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

β) Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

γ) Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους (**τριγωνική ανισότητα**). [4]

Απόδειξη. Το (α) είναι προφανές αφού κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών. Για τα (β) και (γ) βλέπε [3].

[4] Άμεσα συμπεραίνουμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι μικρότερο από το άθροισμα των πλευρών οποιασδήποτε τεθλασμένης γραμμής που έχει τα ίδια άκρα. Επιβεβαιώνεται η κοινή αλήθεια ότι η συντομότερη οδός ανάμεσα σε δύο σημεία είναι η ευθεία.



ΣΧΗΜΑ 31

Θεώρημα 14. Θεωρούμε τρεις θετικούς αριθμούς α, β, γ. Αν ο μεγαλύτερος από τους α, β, γ είναι μικρότερος από το άθροισμα των άλλων δύο τότε υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ.
Απόδειξη. Βλέπε [1].

Παράδειγμα 10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} > 90°$ και σημεία Δ, Ε στις πλευρές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$B\Delta + \Delta E + E\Gamma < BE + \Gamma\Delta.$$

Λύση. Από την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο ΑΔΕ (Σχ. 32) προκύπτει

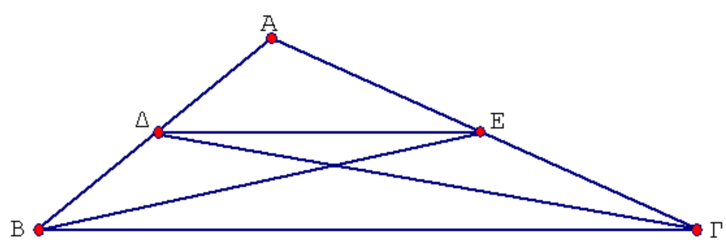
$$\Delta E < A\Delta + AE.$$

Επομένως

$$B\Delta + \Delta E + E\Gamma < B\Delta + A\Delta + AE + E\Gamma = AB + A\Gamma.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$AB + A\Gamma < BE + \Gamma\Delta.$$



ΣΧΗΜΑ 32

Η γωνία $\widehat{A}$ ως αμβλεία είναι η μεγαλύτερη στα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΓ οπότε

$$A\widehat{E}B < \widehat{A} \Rightarrow AB < BE \tag{1}$$

και

$$A\widehat{\Delta}\Gamma < \widehat{A} \Rightarrow A\Gamma < \Gamma\Delta. \tag{2}$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) προκύπτει το ζητούμενο.

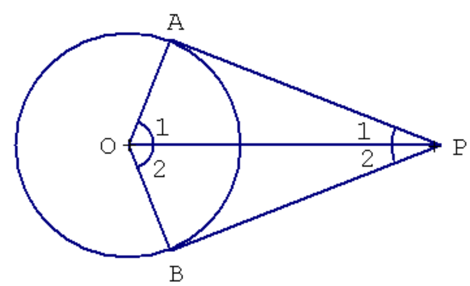
3.4 Σχετικές θέσεις ευθείας - κύκλου και δύο κύκλων

Θεωρούμε έναν κύκλο (O, R) μια ευθεία ε και την απόσταση d του κέντρου O από την ε. Οι σχετικές θέσεις του κύκλου (O, R) και της ευθείας ε είναι οι εξής: (να κάνετε σχήμα για κάθε περίπτωση)
α) Αν $d > R$ τότε η ε και ο (O, R) δεν έχουν κοινά σημεία και η ε λέγεται **εξωτερική** του (O, R).
β) Αν $d = R$ τότε η ε και ο (O, R) έχουν ένα κοινό σημείο και η ε λέγεται **εφαπτόμενη** του (O, R). Το κοινό σημείο λέγεται **σημείο επαφής** και μάλιστα η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.
γ) Αν $d < R$ τότε η ε και ο (O, R) έχουν δύο κοινά σημεία και η ε λέγεται **τέμνουσα** του (O, R).

Έστω κύκλος (O, R) και P ένα εξωτερικό σημείο του. Η ευθεία OP ονομάζεται **διακεντρική ευθεία** του P.

Θεώρημα 15. Θεωρούμε κύκλο (O, R) και ένα εξωτερικό σημείο του P. Τότε:
α) Τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από το P είναι ίσα μεταξύ τους.
β) Η διακεντρική ευθεία διχοτομεί τη γωνία των εφαπτομένων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

Απόδειξη. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής τότε (Σχ. 33) τα τρίγωνα AOP και BOP είναι ίσα αφού έχουν $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, OP κοινή και $OA = OB = R$. Άρα $PA = PB$, $\widehat{P_1} = \widehat{P_2}$ και $\widehat{O_1} = \widehat{O_2}$.

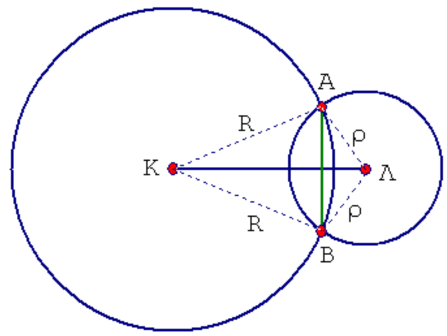


ΣΧΗΜΑ 33

Θεωρούμε τώρα δύο διαφορετικούς κύκλους (K, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ ονομάζεται **διάκεντρος**. Έστω $K\Lambda = d$. Οι σχετικές θέσεις των κύκλων (K, R) και (Λ, ρ) είναι οι εξής: (να κάνετε σχήμα για κάθε περίπτωση)
α) Αν $d > R + \rho$ τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και **καθένας είναι εξωτερικός του άλλου**.
β) Αν $d = R + \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) και **εφάπτονται εξωτερικά**. Το σημείο επαφής είναι σημείο της διακέντρου.
γ) Αν $R - \rho < d < R + \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν δύο κοινά σημεία και **τέμνονται**. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται κοινή χορδή των δύο κύκλων.
δ) Αν $d = R - \rho$ τότε οι κύκλοι έχουν ένα κοινό σημείο (σημείο επαφής) και **εφάπτονται εσωτερικά**. Το σημείο επαφής είναι σημείο της διακέντρου.
ε) Αν $d < R - \rho$ τότε οι κύκλοι δεν έχουν κοινά σημεία και **ο ένας είναι εσωτερικός του άλλου**.

Θεώρημα 16. Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.

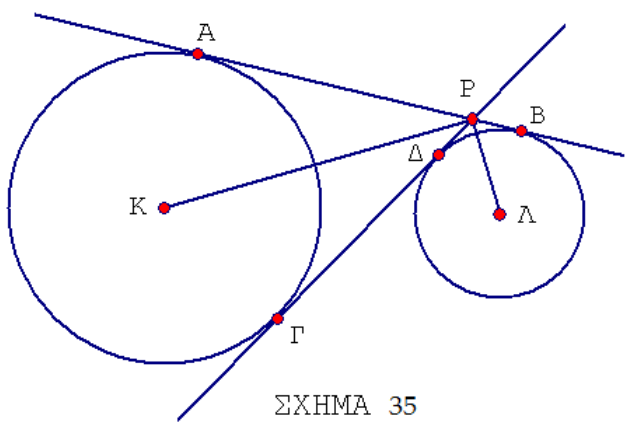
Απόδειξη. Έστω οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) και A, B τα σημεία τομής τους (Σχ. 34). Επειδή $KA = KB = R$, το σημείο K είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Όμοια επειδή $\Lambda A = \Lambda B = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του AB. Άρα η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής AB των κύκλων.



ΣΧΗΜΑ 34

Μία ευθεία μπορεί να εφάπτεται συγχρόνως σε δύο κύκλους. Αν τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη** ενώ αν έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη**.

Παράδειγμα 11. Ένας κύκλος κέντρου K είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι $K\widehat{P}\Lambda = 90°$.
Λύση. Από τα δεδομένα προκύπτει το σχήμα που ακολουθεί.



ΣΧΗΜΑ 35

Τα ΡΑ, ΡΓ είναι εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο κέντρου Κ οπότε $A\widehat{P}K = K\widehat{P}\Gamma$. Επίσης τα ΡΒ, ΡΔ είναι εφαπτόμενα τμήματα στον κύκλο κέντρου Λ οπότε $\Delta\widehat{P}\Lambda = \Lambda\widehat{P}B$. Συνεπώς οι ΡΚ, ΡΛ είναι κάθετες ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών.
Επιπλέον ερώτημα: Βρείτε τη σχέση μεταξύ των τμημάτων ΡΑ, ΡΒ, ΓΔ.

Ασκήσεις για λύση

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Μ το μέσο της ΑΓ. Στην προέκταση της ΒΜ παίρνουμε τμήμα ΜΚ = ΒΜ. Αποδείξτε ότι
α) ΑΚ = ΒΓ β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΚΓ είναι ίσα.

39. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του και προς τα μέρη των Β, Γ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Αν ΑΚ είναι η διχοτόμος του ΑΒΓ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΚΔΕ είναι ισοσκελές.

40. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, παίρνουμε σημεία Δ, Ε, Ζ αντιστοίχως, ώστε ΑΔ = ΒΕ = ΓΖ. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

41. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο Ο που δεν ανήκει στο φορέα του ΑΒ. Αν Α′, Β′ τα συμμετρικά των Α, Β αντίστοιχα ως προς το Ο, να δείξετε ότι Α′Β′ = ΑΒ.

42. Δίνεται ευθεία ε και σημεία Α, Β στο ίδιο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ε. Θεωρούμε τα συμμετρικά Α′, Β′ των Α, Β αντίστοιχα ως προς την ευθεία ε. Να δείξετε ότι Α′Β′ = ΑΒ.

43. Τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $Α'Β'Γ'$ έχουν $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ και $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$. Να δείξετε ότι είναι ίσα.

44. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του και προς τα μέρη των Β, Γ παίρνουμε τμήματα ΒΔ = ΓΕ. Αποδείξτε ότι
α) ΓΔ = ΒΕ β) $\Delta\widehat{\Gamma}E = E\widehat{B}\Delta$.

45. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ προς το μέρος του Α, παίρνουμε τμήματα $AB' = AB$ και $A\Gamma' = A\Gamma$ αντιστοίχως. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ και η διάμεσος ΑΜ, προεκτεινόμενη προς το μέρος του Α, τέμνει το τμήμα $B'\Gamma'$ στο M', να δείξετε ότι
α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AB'\Gamma'$ είναι ίσα β) $B'M' = M'\Gamma'$.

46. Θεωρούμε γωνία $x\widehat{O}y$. Στην Ox παίρνουμε τα σημεία A, A' και στην Oy τα σημεία B, B' έτσι ώστε $OA = OB$ και $OA' = OB'$. Αν Μ είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας $x\widehat{O}y$, να δείξετε ότι
α) $OAM = OBM$ β) $OA'M = OB'M$ γ)$A\widehat{M}A' = B\widehat{M}B'$.

47. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ, προς τα μέρη των Β, Γ κατά τμήματα ΒΔ = ΑΒ και ΓΕ = ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Δ, Ε φέρνουμε κάθετες στην ΒΓ που την τέμνουν στα Κ, Λ αντίστοιχα. Δείξτε ότι ΔΚ = ΕΛ.
Υπόδειξη. Να φέρετε το ύψος ΑΗ.

48. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ και διχοτόμο ΑΔ. Φέρνουμε από το Β κάθετη στην ΑΔ που την τέμνει στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αποδείξτε ότι
α) ΑΒ = ΑΖ β) ΓΖ = $\beta - \gamma$ γ) ΒΔ = ΔΖ.

49. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Στις προεκτάσεις της ΒΓ προς τα Β, Γ παίρνουμε τα ίσα τμήματα ΒΔ, ΓΕ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

50. Αποδείξτε ότι τα μέσα των πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ορίζουν ισοσκελές τρίγωνο.

51. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

52. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, η διχοτόμος ΑΔ και Μ εσωτερικό σημείο του τμήματος ΔΓ. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $BE + \Gamma Z = AB + A\Gamma$.

53. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = x$, $B\Gamma = x + 1$ και $A\Gamma = x + 2$. Αν η διχοτόμος ΑΔ είναι κάθετη στη διάμεσο ΒΜ, να βρείτε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

54. Θεωρούμε αμβλεία γωνία $x\widehat{O}y$ και τα σημεία Α, Β στις πλευρές της Ox, Oy αντίστοιχα, ώστε ΟΑ = ΟΒ. Στα σημεία Α, Β φέρνουμε κάθετες στις Ox, Oy οι οποίες τέμνονται στο Γ. Αποδείξτε ότι
α) η ΟΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{O}B$.
β) η ΟΓ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

55. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΒΓ και ΓΔ = ΔΑ. Να δείξετε ότι:
α) Η διαγώνιος ΒΔ διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{B}$ και $\widehat{\Delta}$ του ΑΒΓΔ.
β) Η ΒΔ είναι μεσοκάθετος του ΑΓ.

56. Θεωρούμε ευθεία ε και δύο σημεία Α, Β που δεν ανήκουν στην ε. Να προσδιορίσετε σημείο Ρ της ε που να ισαπέχει από τα Α, Β.

57. Θεωρούμε γωνία $x\widehat{O}y$ και ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές της στα σημεία Α, Β. Να προσδιορίσετε σημείο Ρ του τμήματος ΑΒ που να ισαπέχει από τις Ox και Oy.

58. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους με άνισες ακτίνες και ευθεία ε που τους τέμνει κατά σειρά στα σημεία Γ, Α, Β, Δ. Αποδείξτε ότι ΑΓ = ΒΔ.

59. Έστω κύκλος κέντρου Ο και τόξο του $\widehat{\text{ΑΒ}}$ μικρότερο του ημικυκλίου. Ονομάζουμε Λ το μέσο του $\widehat{\text{ΑΒ}}$ και ΟΗ, ΟΘ τα αποστήματα των χορδών ΑΛ, ΛΒ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι
α) το τρίγωνο ΟΗΘ είναι ισοσκελές
β) η ΟΛ είναι μεσοκάθετος του ΗΘ.

60. Θεωρούμε κύκλο, τα σημεία του Α, Β, Γ και ονομάζουμε Δ το μέσο του τμήματος ΑΓ. Δίνεται ότι $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{B}\Gamma = 35°$. Αποδείξτε ότι $\widehat{\text{ΑΒ}} = \widehat{\text{ΒΓ}}$.

61. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Κ και από σημείο Ρ εκτός του κύκλου φέρνουμε δύο ευθείες ε_1, ε_2 οι οποίες τέμνουν τον κύκλο στα Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα έτσι ώστε να ισχύουν $PA < PB$, $P\Gamma < P\Delta$ και $PB = P\Delta$. Φέρνουμε και τα αποστήματα ΚΕ, ΚΖ των χορδών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΚΒΡ και ΚΔΡ είναι ίσα. β) ΑΒ = ΓΔ.

62. Αν οι πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 4, 9, x να υπολογίσετε την περίμετρό του.

63. Για ποιες τιμές του x υπάρχει τρίγωνο με πλευρές x, $x+1$, $x+2$;

64. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αποδείξτε ότι $A\Gamma + B\Delta > AB + \Gamma\Delta$.

65. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και τη μεσοκάθετο αυτού ε. Στο ημιεπίπεδο (ε, B) παίρνουμε σημείο Μ (το Μ δεν ανήκει στην ε). Αποδείξτε ότι $MA > MB$.

66. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αποδείξτε ότι $A\Delta < \tau$.

67. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε ένα εσωτερικό σημείο του Μ. Να δείξετε ότι

$$\tau < MA + MB + M\Gamma\,.$$

68. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ με μεγαλύτερη πλευρά την ΑΒ και μικρότερη την ΓΔ. Αποδείξτε ότι η γωνία $\widehat{A}$ είναι μικρότερη της γωνίας $\widehat{\Gamma}$.

69. Θεωρούμε ισοσκελές ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και Η εσωτερικό σημείο της πλευράς ΑΓ. Να δείξετε ότι $B\Gamma > BH > A\Gamma$.

70. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο και ένα σημείο Γ μιας χορδής του ΑΒ. Αποδείξτε ότι

$$O\widehat{A}\Gamma < O\widehat{\Gamma}A\,.$$

71. Αποδείξτε ότι σε κάθε αμβλυγώνιο τρίγωνο, το ύψος προς την μεγαλύτερη πλευρά είναι μικρότερο της μεγαλύτερης πλευράς.

72. Θεωρούμε σημείο Α εκτός ευθείας ε και σημείο Δ στην ε τέτοιο ώστε $A\Delta \perp \varepsilon$. Πάνω στην ε και εκατέρωθεν του Δ παίρνουμε τα σημεία Β και Γ έτσι ώστε $B\Delta > \Delta\Gamma$. Να δείξετε ότι

$$A\Delta < A\Gamma < AB\,.$$

73. Αν Δ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ να δείξετε ότι ισχύουν οι ανισότητες

$$\widehat{\Delta} > \widehat{A} \quad \text{και} \quad \Delta B + \Delta\Gamma < AB + A\Gamma\,.$$

74. Από σημείο Α εκτός κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ, ΑΓ. Με δεδομένο ότι $AB = 7x + 16$ και $A\Gamma = 5x + 24$, να βρείτε τα μήκη των ΑΒ, ΑΓ.

75. Από σημείο Ρ εκτός κύκλου κέντρου Κ, φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ, ΡΒ. Αποδείξτε ότι η ΡΚ είναι μεσοκάθετος της χορδής ΑΒ.

76. Από εξωτερικό σημείο Α κύκλου (O, R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΑΖ και ΑΕ. Μία τρίτη εφαπτόμενη στο σημείο Δ του κύκλου τέμνει τα τμήματα ΑΖ και ΑΕ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα. Συμβολίζουμε με τ την ημιπερίμετρο του τριγώνου ΑΒΓ. Αποδείξτε ότι

$$AE + AZ = 2\tau \quad \text{και} \quad AE = AZ = \tau.$$

77. Προεκτείνουμε τη διάμετρο ΑΒ ενός κύκλου (O, R) προς το μέρος του Α κατά τμήμα ΑΜ και από το Μ φέρνουμε τέμνουσα ΜΓΔ του κύκλου ώστε $M\Gamma = R$. Αποδείξτε ότι $\Delta\widehat{O}B = 3\Gamma\widehat{O}M$.

78. Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (O, R) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Έστω Μ εσωτερικό σημείο του τμήματος ΟΡ. Να δείξετε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΜΑΡ και ΜΒΡ είναι ίσα.
β) Οι γωνίες $O\widehat{A}M$ και $O\widehat{B}M$ είναι ίσες.

79. Θεωρούμε τους ομόκεντρους κύκλους (O, R) και (O, ρ) με $\rho < R$. Οι χορδές ΓΔ και ΕΖ του (O, R) εφάπτονται του (O, ρ) στα Α, Β αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των χορδών ΓΔ και ΕΖ τέμνονται εκτός του (O, R) στο σημείο Η έτσι ώστε ΓΔ $<$ ΓΗ και ΕΖ $<$ ΕΗ. Να δείξετε ότι ΓΔ $=$ ΕΖ και ΗΔ $=$ ΗΖ.

80. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ. Να αποδειχθεί ότι:
α) Η εφαπτόμενη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτόμενη του άλλου.
β) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.

81. Αποδείξτε ότι αν δύο τεμνόμενοι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

82. Αποδείξτε ότι αν τρεις ίσοι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο, τότε τα σημεία επαφής είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.

83. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Μια ευθεία εφάπτεται των κύκλων στα σημεία Β, Γ. Αποδείξτε ότι $BA \perp A\Gamma$.

84. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και κύκλο εντός του τετραπλεύρου ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ στα σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα.
α) Αποδείξτε ότι $AB + \Gamma\Delta = B\Gamma + A\Delta$.
β) Με δεδομένο ότι $AB = 50$, $B\Gamma = 40$, $\Delta A = 24$, μετρήθηκε η διαγώνιος ΑΓ και βρέθηκε ίση με 39. Ήταν σωστή η μέτρηση;

85. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και κύκλο κέντρου Κ εντός του τετραπλεύρου ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές του. Να δείξετε ότι

$$A\widehat{K}B + \Delta\widehat{K}\Gamma = 180^\circ.$$

86. ★ Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ και η μεσοκάθετος της ΒΓ τέμνονται σε σημείο Ρ εκτός του τριγώνου ΑΒΓ με $A\widehat{B}P > 90^\circ$. Να δείξετε ότι

$$A\widehat{B}P + A\widehat{\Gamma}P = 180^\circ.$$

87. ★ Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, σημείο Β στο εσωτερικό του και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ προς το ίδιο μέρος του τμήματος ΑΓ. Οι ΑΕ, ΓΔ τέμνονται στο Η.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΒΓΔ είναι ίσα.
β) Να δείξετε ότι $A\widehat{H}\Delta = 60^\circ$.

88. ★ Δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους και μία κάθετη πλευρά του ενός ίση με μία κάθετη πλευρά του άλλου. Αποδείξτε ότι είναι ίσα.

89. ★ α) Θεωρούμε δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ με $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$. Να δείξετε ότι

$$\widehat{B} = \widehat{B'} \quad \text{ή} \quad \widehat{B} + \widehat{B'} = 180^\circ.$$

β) Δύο οξυγώνια τρίγωνα έχουν δύο πλευρές και μία μη περιεχόμενη γωνία του ενός αντίστοιχα ίσες με δύο πλευρές και μία μη περιεχόμενη γωνία του άλλου. Να εξετάσετε αν είναι ίσα.

90. ★ Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{B} = 120^\circ$ και τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ των γωνιών του.
α) Να δείξετε ότι το Ζ ισαπέχει από τις ευθείες ΕΑ και ΕΒ ενώ το Δ ισαπέχει από τις ευθείες ΕΒ και ΕΓ.
β) Να δείξετε ότι η γωνία $\Delta\widehat{E}Z$ είναι ορθή.

91. ★ Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε $A\widehat{\Delta}B = 20^\circ$, $B\widehat{\Delta}\Gamma = 60^\circ$, $B\widehat{\Gamma}A = 30^\circ$, $A\widehat{\Gamma}\Delta = 50^\circ$. Υπολογίστε τη γωνία $A\widehat{B}\Gamma$.

92. ★ Σε κάποιο δίκτυο κεραιών κινητής τηλεφωνίας κάθε κεραία συνδέεται ασύρματα μόνο με την πιο κοντινή κεραία. Αποδείξτε ότι κάθε κεραία του δικτύου αυτού συνδέεται ασύρματα το πολύ με έξι άλλες κεραίες.

Κεφάλαιο 4

Παραλληλόγραμμα και τραπέζια

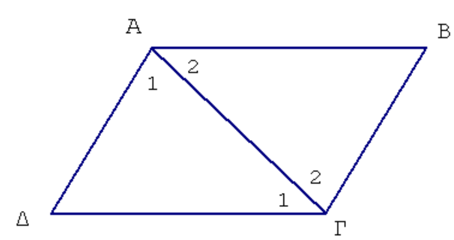
4.1 Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Θεώρημα 17. Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:
α) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
β) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
γ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη. α,β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ (Σχ. 36). Αυτά έχουν

- $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, ως εντός εναλλάξ.
- $\widehat{A}_2 = \widehat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ.
- $A\Gamma = A\Gamma$, κοινή πλευρά.

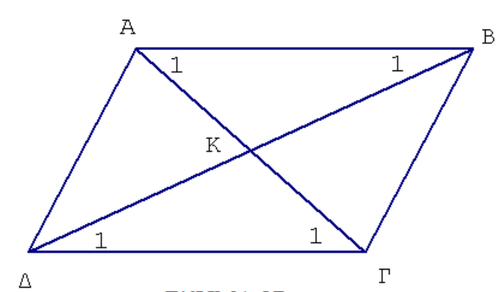


ΣΧΗΜΑ 36

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και συνεπώς $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$, $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$ αλλά και $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ ως αθροίσματα ίσων γωνιών.

γ) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΚΒ, ΔΚΓ (Σχ. 37). Αυτά έχουν

- $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}_1$, ως εντός εναλλάξ.
- $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, ως εντός εναλλάξ.
- $AB = \Gamma\Delta$, από το (α).

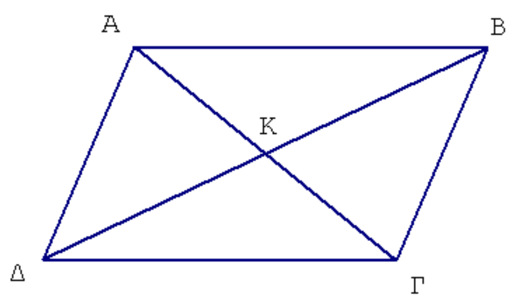


ΣΧΗΜΑ 37

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και συνεπώς $AK = K\Gamma$ και $BK = K\Delta$, δηλαδή οι διαγώνιοι διχοτομούνται.

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του και για το λόγο αυτό λέγεται **κέντρο** του παραλληλογράμμου. **Απόσταση** δύο παράλληλων ευθειών ονομάζουμε το μήκος οποιουδήποτε τμήματος ΑΒ, με το Α στη μία ευθεία και το Β στην άλλη, που είναι κάθετο στις ευθείες αυτές. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται **βάσεις** ως προς αυτό το ύψος.

Θεώρημα 18. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
β) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
γ) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
δ) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο Κ. Σε κάθε περίπτωση θα δείξουμε ότι οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.



ΣΧΗΜΑ 38

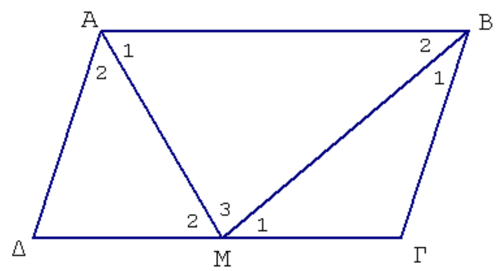
α) Έστω $AB = \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα διότι $AB = \Gamma\Delta$, $A\Delta = B\Gamma$ και ΒΔ κοινή πλευρά. Επομένως $A\widehat{B}\Delta = B\widehat{\Delta}\Gamma$, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$, άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.
β) Έστω $AB \parallel= \Gamma\Delta$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα διότι έχουν $AB = \Gamma\Delta$ (από την υπόθεση), $A\widehat{B}\Delta = B\widehat{\Delta}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ) και $B\Delta = B\Delta$ (κοινή πλευρά). Επομένως $A\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$, άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.
γ) Έστω $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ και $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$. Έχουμε

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 360^\circ \Leftrightarrow 2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 360^\circ \Leftrightarrow \widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ.$$

Επομένως $A\Delta \parallel B\Gamma$. Ακόμη από τις σχέσεις $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$, $\widehat{A} + \widehat{B} = 180^\circ$ έπεται ότι $\widehat{\Gamma} + \widehat{B} = 180^\circ$, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$.
δ) Έστω ότι $AK = K\Gamma$, $BK = K\Delta$. Τα τρίγωνα ΑΚΒ, ΔΚΓ είναι ίσα διότι έχουν $AK = K\Gamma$, $BK = K\Delta$ και $A\widehat{K}B = \Delta\widehat{K}\Gamma$ (ως κατακορυφήν). Επομένως $A\widehat{B}\Delta = B\widehat{\Delta}\Gamma$, άρα $AB \parallel \Gamma\Delta$. Ακόμη τα τρίγωνα ΑΚΔ, ΒΚΓ είναι ίσα διότι έχουν $AK = K\Gamma$, $BK = K\Delta$ και $A\widehat{K}\Delta = B\widehat{K}\Gamma$ (ως κατακορυφήν). Επομένως $A\widehat{\Delta}B = \Delta\widehat{B}\Gamma$, άρα $A\Delta \parallel B\Gamma$.

Παράδειγμα 12. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2A\Delta$ και Μ το μέσο της ΓΔ. Αποδείξτε ότι $AM \perp MB$.

Λύση. Επειδή οι απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου είναι ίσες η δοθείσα σχέση $AB = 2A\Delta$ μας δίνει $A\Delta = \Delta M$, $M\Gamma = \Gamma B$. Έτσι τα τρίγωνα ΑΔΜ, ΜΓΒ είναι ισοσκελή, οπότε $\widehat{A}_2 = \widehat{M}_2$, $\widehat{B}_1 = \widehat{M}_1$.



ΣΧΗΜΑ 39

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με $180°$ οπότε

$$\widehat{A}_2 + \widehat{M}_2 + \widehat{\Delta} = 180° \Rightarrow 2\widehat{M}_2 + \widehat{\Delta} = 180° \Rightarrow \widehat{M}_2 = \frac{180° - \widehat{\Delta}}{2}$$

και

$$\widehat{B}_1 + \widehat{M}_1 + \widehat{\Gamma} = 180° \Rightarrow 2\widehat{M}_1 + \widehat{\Gamma} = 180° \Rightarrow \widehat{M}_1 = \frac{180° - \widehat{\Gamma}}{2}.$$

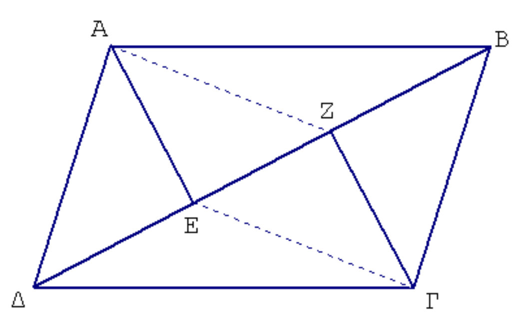
Όμως $A\Delta \parallel B\Gamma$, άρα $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 180°$, επομένως

$$\widehat{M}_1 + \widehat{M}_2 = \frac{180° - \widehat{\Gamma}}{2} + \frac{180° - \widehat{\Delta}}{2} = \frac{360° - (\widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta})}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\widehat{M}_3 = 180° - 90° = 90°$, δηλαδή $AM \perp MB$.

Παράδειγμα 13. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τις προβολές Ε, Ζ των κορυφών Α, Γ αντίστοιχα, στη διαγώνιο ΒΔ. Αν το Ε δεν ταυτίζεται με το Ζ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Λύση. Αρκεί να δείξουμε ότι ΑΕ, ΓΖ είναι ίσες και παράλληλες.

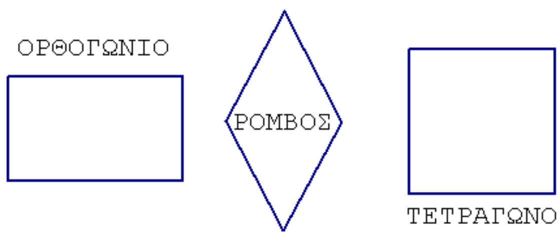


ΣΧΗΜΑ 40

Οι ΑΕ, ΓΖ είναι κάθετες στην ίδια ευθεία άρα είναι παράλληλες μεταξύ τους. Ακόμη τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΒΓΖ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια, $A\Delta = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) και $A\widehat{\Delta}E = Z\widehat{B}\Gamma$ ως εντός εναλλάξ ($A\Delta \parallel B\Gamma$ ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου). Επομένως $AE = \Gamma Z$. Συνεπώς το ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

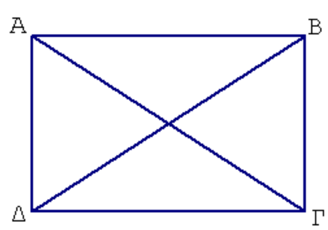
4.2 Είδη παραλληλογράμμων

Ένα παραλληλόγραμμο με μια γωνία ορθή ονομάζεται **ορθογώνιο**. Προφανώς όλες οι γωνίες ενός ορθογωνίου είναι ορθές (δικαιολογήστε το).
Ένα παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες ονομάζεται **ρόμβος**. Προφανώς όλες οι πλευρές ενός ρόμβου είναι ίσες (δικαιολογήστε το).
Ένα παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος ονομάζεται **τετράγωνο**. Επομένως κάθε τετράγωνο έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες.



ΣΧΗΜΑ 41

Θεώρημα 19. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.
α) Αν το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο τότε οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες.
β) Αν οι διαγώνιοι ΑΓ, ΒΔ είναι ίσες τότε το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
Απόδειξη. α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΒΔΓ είναι ίσα (Σχ. 42) αφού $A\Delta = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου),$A\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta = 90°$ (αφού το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο) και ΔΓ κοινή. Άρα $A\Gamma = B\Delta$.



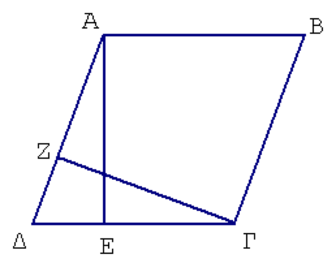
ΣΧΗΜΑ 42

β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ, ΒΔΓ είναι ίσα (Σχ. 42) αφού $A\Delta = B\Gamma$ (ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου), $A\Gamma = B\Delta$ και ΔΓ κοινή. Άρα $A\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta$. Επειδή $A\Delta \parallel B\Gamma$ θα είναι $A\widehat{\Delta}\Gamma + B\widehat{\Gamma}\Delta = 180°$. Επομένως $A\widehat{\Delta}\Gamma = B\widehat{\Gamma}\Delta = 90°$, δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

Θεώρημα 20. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου τέμνονται κάθετα και διχοτομούν τις γωνίες του.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Θεώρημα 21. Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Είναι παραλληλόγραμμο και οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.
β) Είναι παραλληλόγραμμο και μία διαγώνιός του διχοτομεί μια γωνία του.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

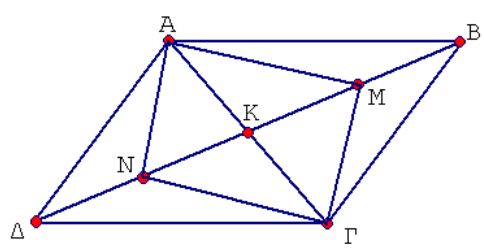
Παράδειγμα 14. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο με όλα τα ύψη του ίσα. Αποδείξτε ότι είναι ρόμβος.
Απόδειξη. Έστω το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τα ύψη του ΑΕ, ΓΖ (Σχ. 43).



ΣΧΗΜΑ 43

Τα τρίγωνα ΑΔΕ, ΓΔΖ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια, έχουν τη γωνία $\widehat{\Delta}$ κοινή και $AE = \Gamma Z$. Άρα $A\Delta = \Gamma\Delta$. Το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, άρα είναι ρόμβος.

Παράδειγμα 15. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $B\Delta = 2A\Gamma$ και κέντρο Κ. Έστω Μ, Ν τα μέσα των ΒΚ, ΔΚ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι το ΑΜΓΝ είναι ορθογώνιο.
Απόδειξη. Το Κ είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ οπότε οι διαγώνιοί του ΑΓ, ΒΔ διχοτομούνται (Σχ. 44).



ΣΧΗΜΑ 44

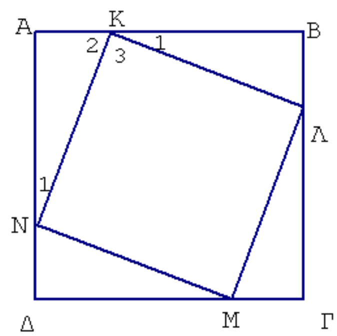
Επομένως οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΜΓΝ διχοτομούνται αφού $AK = K\Gamma$ και $MK = KN$ ως μισά ίσων τμημάτων. Επειδή $B\Delta = 2A\Gamma$ έχουμε

$$MN = MK + KN = \frac{BK}{2} + \frac{K\Delta}{2} = \frac{BK + K\Delta}{2} = \frac{B\Delta}{2} = A\Gamma.$$

Συνεπώς το ΑΜΓΝ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους, δηλαδή ορθογώνιο.

Παράδειγμα 16. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ, Ν αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Αποδείξτε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

Απόδειξη. Τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΚΒΛ, ΛΓΜ, ΜΔΝ (Σχ. 45) είναι ίσα (ΠΓΠ).



ΣΧΗΜΑ 45

Άρα οι πλευρές του ΚΛΜΝ είναι ίσες μεταξύ τους και ακόμη $\widehat{K}_1 = \widehat{N}_1$. Το ΚΛΜΝ έχει τις απέναντι πλευρές ίσες άρα είναι παραλληλόγραμμο και επειδή έχει και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι και ρόμβος. Ακόμη

$$\widehat{K}_3 = 180^\circ - \left(\widehat{K}_1 + \widehat{K}_2\right) = 180^\circ - \left(\widehat{N}_1 + \widehat{K}_2\right) = 180^\circ - \left(180^\circ - \widehat{A}\right) = \widehat{A} = 90^\circ.$$

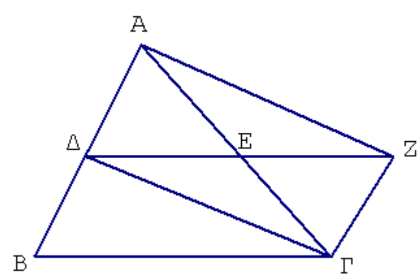
Έτσι το ΚΛΜΝ έχει και μια γωνία ορθή, οπότε είναι τετράγωνο.

4.3 Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

Θεώρημα 22. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου, είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι $\Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την ΔΕ κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Επομένως $\Gamma Z =\parallel A\Delta \Rightarrow \Gamma Z =\parallel B\Delta$. Άρα το ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο και προκύπτει $\Delta Z \parallel B\Gamma \Rightarrow \Delta E \parallel B\Gamma$ και $\Delta Z = B\Gamma \Rightarrow 2\Delta E = B\Gamma \Rightarrow \Delta E = \dfrac{B\Gamma}{2}$.



ΣΧΗΜΑ 46

Θεώρημα 23. Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του τριγώνου.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

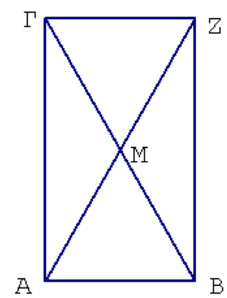
Ακόμη αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2. Ονομάζουμε **μεσοπαράλληλη** των ϵ_1, ϵ_2 το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τις ϵ_1, ϵ_2. Η μεσοπαράλληλη των ϵ_1, ϵ_2 είναι μια ευθεία ϵ παράλληλη στις ϵ_1, ϵ_2 η οποία διέρχεται από το μέσο κάθε τμήματος που έχει τα άκρα του πάνω στις ϵ_1, ϵ_2.

Θεώρημα 24. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
Απόδειξη. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και διάμεσο ΑΜ. Θα δείξουμε ότι $AM = B\Gamma/2$ (Σχ. 47).

Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $MZ = AM$. Τότε το τετράπλευρο ΑΒΖΓ είναι ορθογώνιο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και έχει και μια γωνία ορθή. Αρα οι διαγώνιοι ΑΖ, ΒΓ είναι ίσες, οπότε προκύπτει $2AM = B\Gamma$ ή

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$



ΣΧΗΜΑ 47

Θεώρημα 25. Αν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.
Απόδειξη. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ με $AM = B\Gamma/2$ (Σχ. 47). Θα δείξουμε ότι $\widehat{A} = 90°$.
Προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $MZ = AM$. Τότε $AZ = 2AM = B\Gamma$. Συνεπώς το τετράπλευρο ΑΒΖΓ είναι ορθογώνιο αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και είναι ίσες. Άρα $\widehat{A} = 90°$.

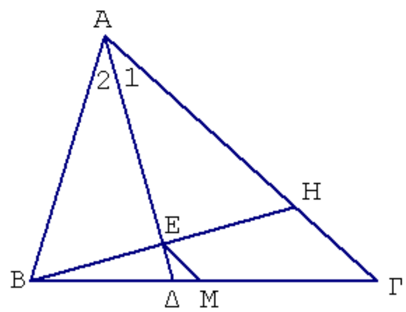
Θεώρημα 26. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με $30°$, τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντιστρόφως.
Απόδειξη. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Θα δείξουμε ότι

$$\widehat{\Gamma} = 30° \Leftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Επειδή για οξείες γωνίες ω, φ ισχύει $\omega = \varphi \Leftrightarrow \eta\mu\omega = \eta\mu\varphi$ έχουμε:

$$\widehat{\Gamma} = 30° \Leftrightarrow \eta\mu\widehat{\Gamma} = \eta\mu 30° \Leftrightarrow \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Παράδειγμα 17. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, τη διχοτόμο ΑΔ και το μέσο Μ της ΒΓ. Η κάθετη από το Β στην ΑΔ την τέμνει στο Ε.
α) Αποδείξτε ότι $EM \parallel A\Gamma$.
β) Αποδείξτε ότι $EM = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.
γ) Αν $\widehat{A} = 80°$ να υπολογίσετε τη γωνία $B\widehat{E}M$.
Λύση. Έστω Η το σημείο τομής της ευθείας ΒΕ και της πλευράς ΑΓ (Σχ. 48).



ΣΧΗΜΑ 48

Επειδή η ΑΕ είναι διχοτόμος και ύψος διάμεσος στο τρίγωνο ΑΒΗ, έπεται ότι θα είναι και διάμεσος και ακόμη $AB = AH$. Επειδή Ε, Μ είναι τα μέσα των ΒΗ, ΒΓ προκύπτει

$$EM \parallel H\Gamma \Rightarrow EM \parallel A\Gamma$$

και

$$EM = \frac{H\Gamma}{2} = \frac{A\Gamma - AH}{2} = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

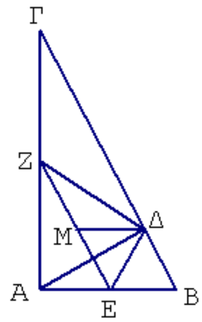
Για το (γ) ερώτημα παρατηρούμε ότι $\Delta\widehat{E}M = \Delta\widehat{A}\Gamma$ (εντός εκτός και επί τα αυτά), άρα $\Delta\widehat{E}M = \dfrac{80°}{2} = 40°$ και $B\widehat{E}M = 90° + 40° = 130°$.

Παράδειγμα 18. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και ύψος ΑΔ. Έστω Ε,Ζ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΕΖ αντίστοιχα.
α) Αποδείξτε ότι η γωνία $E\widehat{\Delta}Z$ είναι ορθή.
β) Αποδείξτε ότι $\Delta M = \dfrac{B\Gamma}{4}$.
γ) Αν $\widehat{\Gamma} = 30°$ να συγκρίνετε τα τμήματα ΔB, ΔM.
Λύση. α) Οι ΔΖ, ΔΕ είναι διάμεσοι στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ, ΑΔΒ αντίστοιχα άρα

$$\Delta Z = \frac{A\Gamma}{2} = ZA \Rightarrow Z\widehat{A}\Delta = Z\widehat{\Delta}A$$

και

$$\Delta E = \frac{AB}{2} = EA \Rightarrow E\widehat{A}\Delta = E\widehat{\Delta}A.$$



ΣΧΗΜΑ 49

Επομένως
$$E\widehat{\Delta}Z = Z\widehat{\Delta}A + E\widehat{\Delta}A = Z\widehat{A}\Delta + E\widehat{A}\Delta = 90^\circ.$$

β) Επειδή η ΔΜ είναι διάμεσος στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΔΕ προκύπτει
$$\Delta M = \frac{ZE}{2}.$$

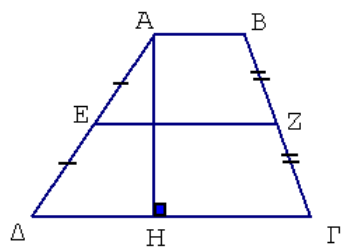
Αφού Ζ, Ε είναι τα μέσα των ΑΓ, ΑΒ θα έχουμε
$$ZE = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται ότι
$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}.$$

γ) Παρατηρούμε ότι $B\widehat{A}\Delta = \widehat{\Gamma}$ διότι είναι οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία. Έχουμε
$$\widehat{\Gamma} = 30^\circ \Rightarrow AB = \frac{B\Gamma}{2}$$
και
$$B\widehat{A}\Delta = 30^\circ \Rightarrow \Delta B = \frac{AB}{2}.$$
Επομένως
$$\Delta B = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} B\Gamma = \frac{1}{4} B\Gamma.$$
Λόγω του ερωτήματος (β) έχουμε $\Delta B = \Delta M$.

4.4 Τραπέζια

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες. Οι παράλληλες πλευρές λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του πάνω στους φορείς των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου. Το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του τραπεζίου λέγεται **διάμεσος** αυτού. Στο σχήμα 50 οι ΑΒ, ΓΔ είναι οι βάσεις του τραπεζίου, το ΑΗ είναι ύψος του και το ΕΖ διάμεσός του.

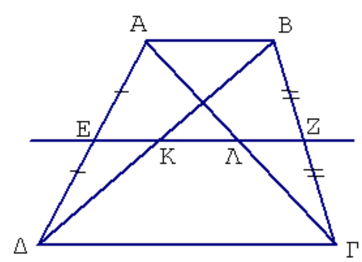


ΣΧΗΜΑ 50

Θεώρημα 27. Σε κάθε τραπέζιο:
α) Τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών και τα μέσα των διαγωνίων είναι συνευθειακά σημεία και η ευθεία που διέρχεται από αυτά είναι παράλληλη στις βάσεις του τραπεζίου.
β) Η διάμεσος του τραπεζίου είναι ίση με το ημιάθροισμα των βάσεών του.
γ) Το τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του τραπεζίου είναι ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Συνεπώς για ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB < \Gamma\Delta$, διάμεσο ΕΖ και μέσα διαγωνίων Κ, Λ (Σχ. 51) ισχύουν οι σχέσεις:

- $EZ \parallel AB, \Gamma\Delta$
- $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$
- $K\Lambda = \dfrac{\Gamma\Delta - AB}{2}$



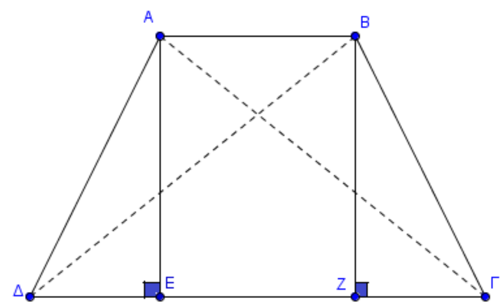
ΣΧΗΜΑ 51

Ένα τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες ονομάζεται **ισοσκελές**.

Θεώρημα 28. Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές τότε ισχύουν οι παρακάτω προτάσεις:
α) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε καθεμία βάση είναι ίσες.
β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
Απόδειξη. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και $A\Delta = B\Gamma$ (Σχ. 52) και φέρνουμε τα ύψη του ΑΕ, ΒΖ.

α) Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα αφού είναι ορθογώνια, ΑΔ = ΒΓ (υπόθεση) και ΑΕ = ΒΖ (ύψη του τραπεζίου). Άρα $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$. Ακόμη επειδή ΑΒ ∥ ΓΔ, έπεται ότι

$$\widehat{A} = 180^\circ - \widehat{\Delta} = 180^\circ - \widehat{\Gamma} = \widehat{B}\,.$$



ΣΧΗΜΑ 52

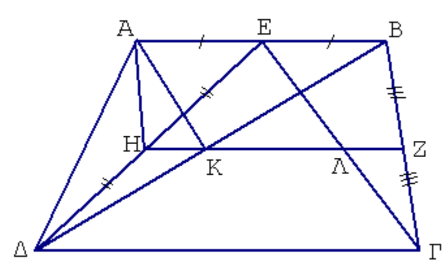
β) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ είναι ίσα αφού έχουν τη ΔΓ κοινή πλευρά, ΑΔ = ΒΓ (υπόθεση) και $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$ (από το (α)). Άρα ΑΓ = ΒΔ.

Θεώρημα 29. Αν για ένα τραπέζιο αληθεύει μία από τις παρακάτω προτάσεις (α), (β) τότε αυτό είναι ισοσκελές.
α) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
β) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.
Απόδειξη. Βλέπε [6].

Παράδειγμα 19. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$. Τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΔΕ είναι τα Ε, Ζ, Η αντίστοιχα και η ΗΖ τέμνει τις ΔΒ, ΓΕ στα Κ, Λ αντίστοιχα.
α) Αποδείξτε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Αποδείξτε ότι το ΑΕΛΚ είναι παραλληλόγραμμο.
Απόδειξη. α) Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ το ΗΖ είναι διάμεσος άρα

$$HZ \parallel EB \Rightarrow HZ \parallel AB \quad \text{και} \quad HZ = \frac{EB + \Gamma\Delta}{2} = \frac{\frac{1}{2}AB + \frac{3}{2}AB}{2} = AB$$

οπότε αφού το ΑΒΖΗ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.



ΣΧΗΜΑ 53

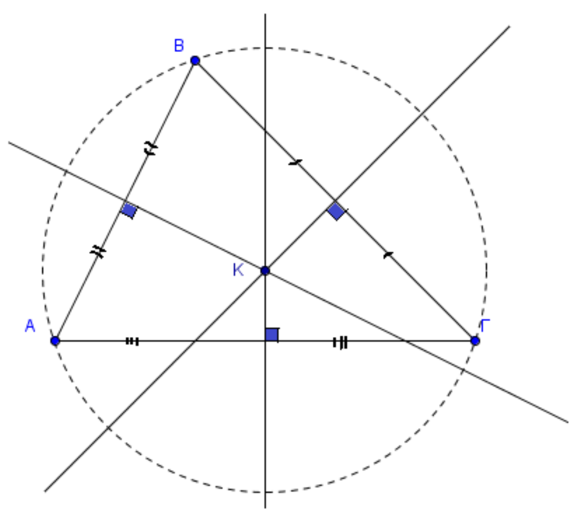
β) Στο τραπέζιο ΕΒΓΔ το ΗΖ είναι διάμεσος άρα τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΔΒ, ΕΓ. Επομένως

$$K\Lambda \parallel EB \Rightarrow K\Lambda \parallel AE \quad \text{και} \quad K\Lambda = \frac{\Delta\Gamma - EB}{2} = \frac{\frac{3}{2}AB - \frac{1}{2}AB}{2} = \frac{1}{2}AB = AE.$$

Συνεπώς αφού το ΑΕΛΚ έχει δύο απέναντι πλευρές ίσες και παράλληλες, είναι παραλληλόγραμμο.

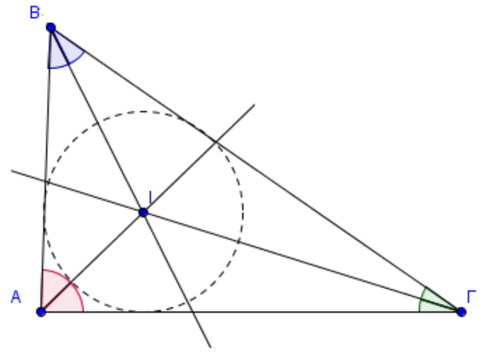
4.5 Αξιοσημείωτα σημεία τριγώνου

Αποδεικνύεται ότι για κάθε τρίγωνο (Βλέπε [3]):
α) Υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και έχει κέντρο το σημείο τομής των μεσοκαθέτων των πλευρών του τριγώνου, το οποίο ονομάζεται **περίκεντρο**. Στο σχήμα 54 το Κ είναι το περίκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



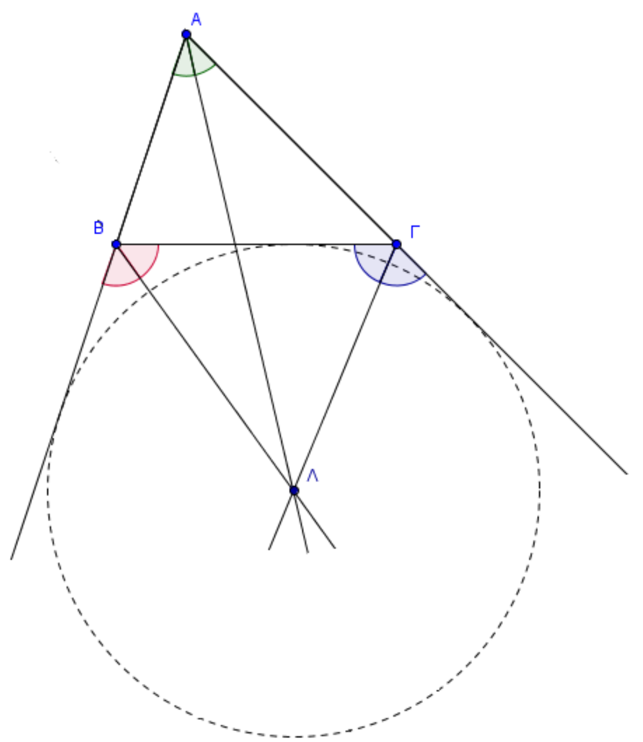
ΣΧΗΜΑ 54

β) Υπάρχει κύκλος που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου και εφάπτεται των πλευρών του. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **εγγεγραμμένος** κύκλος του τριγώνου και έχει κέντρο το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου, το οποίο ονομάζεται **έγκεντρο**. Στο σχήμα 55 το Ι είναι το έγκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



ΣΧΗΜΑ 55

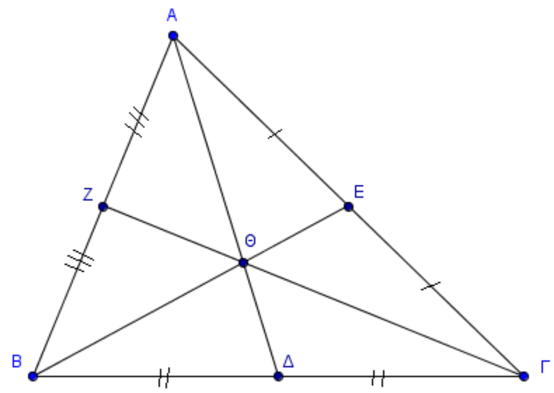
γ) Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των άλλων δύο πλευρών. Ο κύκλος αυτός ονομάζεται **παρεγγεγραμμένος** και το κέντρο του **παράκεντρο**. Είναι φανερό ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρεις παραγγεγραμμένοι κύκλοι. Στο σχήμα 56 το Λ είναι το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην εσωτερική διχοτόμο της γωνίας $\widehat{A}$.



ΣΧΗΜΑ 56

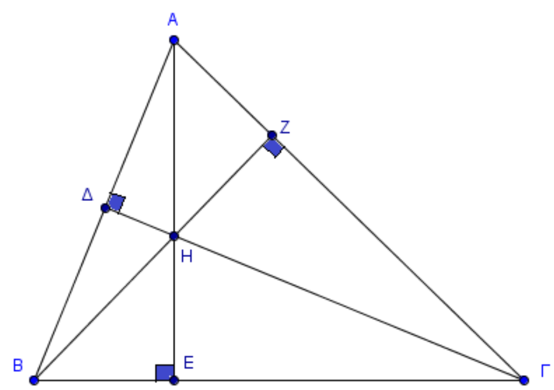
Ακόμη αποδεικνύεται ότι (Βλέπε [3]):
i) Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Θ, του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή ισούται με τα 2/3 του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου. Το σημείο Θ ονομάζεται **βαρύκεντρο** ή **κέντρο βάρους** του τριγώνου. Στο σχήμα 57 το Θ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta\,, \qquad \Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta\,, \qquad A\Theta = 2\cdot\Theta\Delta\,.$$



ΣΧΗΜΑ 57

ii) Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο Η. Το Η ονομάζεται **ορθόκεντρο** του τριγώνου. Στο σχήμα 58 το Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ.



ΣΧΗΜΑ 58

Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου δεν είναι πάντα εσωτερικό σημείο του. Για παράδειγμα σχεδιάστε ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο και διαπιστώστε ότι το ορθόκεντρο του βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

Ασκήσεις για λύση

93. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αν ισχύει $\widehat{A} = 3\widehat{\varDelta}$.

94. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2y + 8$, $B\varGamma = 4x - 1$, $\varGamma\varDelta = 4y$, $\varDelta A = 3x$, όπου x, y θετικοί ακέραιοι. Να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

95. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{\varDelta} = 110°$. Από το Β φέρνουμε κάθετη στην ΑΔ που την τέμνει στο Μ. Υπολογίστε τη γωνία $A\widehat{B}M$.

96. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ε και την προέκταση της ΒΓ στο Ζ. Βρείτε στο σχήμα τρία ισοσκελή τρίγωνα δικαιολογώντας την απάντησή σας.

97. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\widehat{\varDelta} = 60°$ και σημεία Ε, Ζ, Η στις πλευρές ΑΒ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AE = AH$, $HE = EZ$ και $H\widehat{Z}\varDelta = 30°$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΗΕΖ είναι ισόπλευρο. Υπολογίστε τη γωνία $H\widehat{E}Z$.

98. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Εξωτερικά του ΑΒΓΔ σχεδιάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΔΕΖ είναι ισόπλευρο.

99. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη διαγώνιο ΑΓ προς τα μέρη των Α, Γ κατά τμήματα ΑΕ, ΓΖ αντίστοιχα, με $AE = \varGamma Z$. Να δείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

100. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = 180° - \widehat{\varDelta}$ και $AB = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$, $\varGamma\varDelta = \sqrt{6} + \sqrt{5}$. Αποδείξτε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

101. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ (προς το μέρος του Β) κατά τμήμα ΒΕ και την πλευρά ΓΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα ΔΖ έτσι ώστε $BE = \varDelta Z$. Αποδείξτε ότι:
α) Το ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Η ΖΕ διέρχεται από το Κ.
γ) Η ΑΚ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΖΕ.

102. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Φέρνουμε ευθεία κάθετη στην ΕΒ στο σημείο Ε, η οποία τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ζ και την προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος του Α) στο Η. Αποδείξτε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΕΔΖ και ΕΑΗ είναι ίσα.
β) $BZ = \varDelta Z + \varDelta\varGamma$.

103. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 2ΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Ονομάζουμε Η το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΓ. Να δείξετε ότι:
α) Η ΒΕ διχοτομεί τη γωνία $A\widehat{B}\varGamma$.
β) Η ΓΗ είναι διάμεσος του τριγώνου ΒΓΕ.

104. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 2ΑΒ και ονομάζουμε Μ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ του τριγώνου ΑΒΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Να δείξετε ότι:
α) Το ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τρίγωνο ΜΓΕ είναι ισοσκελές.

105. Χαρακτηρίστε ως σωστή ή λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα.
β) Αν ένα τετράπλευρο έχει κάθετες διαγωνίους τότε είναι ρόμβος.
γ) Δύο διαδοχικές γωνίες ενός ρόμβου είναι ίσες.
δ) Αν ένα τετράπλευρο έχει ίσες διαγωνίους τότε είναι ορθογώνιο.
ε) Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.
ϛ) Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου διχοτομούν τις γωνίες του.
ζ) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
η) Αν σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ισχύει $\widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{\Gamma}=270^\circ$ τότε είναι ορθογώνιο.
θ) Αν ένας ρόμβος έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές τότε είναι τετράγωνο.

106. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της πλευράς ΓΔ. Σχεδιάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓΔ το ορθογώνιο ΓΗΘΕ. Αν $AB = 3$, $BH = 5$ να υπολογίσετε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΒΗΘΕΔ.

107. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ η γωνία $A\widehat{K}B$ είναι ίση με 130°. Αν $\Delta H \perp A\Gamma$ και η διχοτόμος της γωνίας $H\widehat{\Delta}K$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Μ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΜ είναι ισοσκελές.

108. Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AE = \Gamma Z = \Gamma H = \Theta A$. Αποδείξτε ότι το ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.

109. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Αν B', Γ' είναι τα συμμετρικά των Β, Γ αντίστοιχα ως προς το Α, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma B'\Gamma'$ είναι ορθογώνιο.

110. Σε ρόμβο ΑΒΓΔ έχουμε $AB = 2x - 5$, $B\Gamma = x + 1$, όπου x θετικός ακέραιος. Να βρείτε την περίμετρο του ρόμβου.

111. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και το ύψος του ΑΔ. Αν Ζ είναι σημείο του τμήματος ΔΓ τέτοιο ώστε ΒΔ = ΔΖ και Ε το συμμετρικό του Α ως προς Δ, να δείξετε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΖ είναι ρόμβος.
β) Το τρίγωνο ΒΕΖ είναι ισοσκελές.

112. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα ΟΑ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο του τμήματος ΟΑ που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β, Γ.
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΟΒΑΓ είναι ρόμβος.
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του ρόμβου ΟΒΑΓ.

113. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ των πλευρών ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα. Τα τμήματα ΑΖ, ΔΕ τέμνονται στο Η και τα τμήματα ΓΕ, ΒΖ τέμνονται στο Θ.
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.
β) Βρείτε μια επιπλέον συνθήκη ώστε το ΕΘΖΗ να είναι τετράγωνο.

114. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΓΕ, ΔΓΖ εκτός αυτού. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΑΖΕ είναι ισόπλευρο.

115. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΒ (προς τα μέρη των Α, Β) παίρνουμε τμήματα ΑΕ, ΒΖ αντίστοιχα, με $AE = BZ$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ΑΖ, ΔΕ είναι κάθετες.

116. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Εκτός αυτού σχεδιάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΖΗ. Αποδείξτε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των Δ, Ζ από την ευθεία ΒΓ είναι ίσο με την υποτείνουσα ΒΓ.

117. Έστω τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σχεδιάζουμε εντός αυτού το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΕ και εκτός αυτού το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΖ. Αποδείξτε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ είναι συνευθειακά.

118. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Σχεδιάζουμε εκτός αυτού τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι τετράγωνο.

119. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με περίμετρο 22 και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών του. Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΚΛΜ.

120. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ίσες και κάθετες διαγωνίους. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

121. Σε ένα χάρτη μιας περιοχής τρεις τοποθεσίες παριστάνονται με τα μη συνευθειακά σημεία Α, Μ, Τ και οι δρόμοι που τις συνδέουν με τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΜ, ΜΤ, ΑΤ. Στα μέσα Β, Δ, Γ των τριών δρόμων ΑΜ, ΜΤ, ΑΤ αντίστοιχα, υπάρχουν υπάρχουν διασταυρώσεις που έχουν ως αποτέλεσμα τους δρόμους ΒΓ, ΓΔ στον χάρτη. Δύο δρομείς, ο Αλέξανδρος και ο Βαγγέλης είναι το ίδιο γρήγοροι και έχουν την ίδια φυσική κατάσταση. Ο Βαγγέλης ακολουθεί την διαδρομή $A \to B \to \Gamma \to \Delta \to T$, ενώ ο Αλέξανδρος τη διαδρομή $A \to M \to T$. Αν ξεκινήσουν ταυτόχρονα από το Α ποιος θα φτάσει πιο γρήγορα στο τέρμα Τ;

122. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, Ε το μέσο της διαμέσου ΒΚ και σημείο Δ της ΒΓ τέτοιο ώστε $B\Gamma = 4B\Delta$. Αποδείξτε ότι $AB \parallel \Delta E$ και $AB = 4\Delta E$.

123. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, Μ το μέσο της ΑΓ και σημείο Κ της πλευράς ΒΓ έτσι ώστε $K\widehat{M}\Gamma = \widehat{A}$. Αποδείξτε ότι το Κ είναι το μέσο της ΒΓ.

124. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Σχεδιάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ με βάση ΑΓ. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη ευθεία ε προς την ΑΒ. Αποδείξτε ότι η ε διέρχεται από το μέσο της ΒΓ.

125. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ. Η διάμεσος ΒΔ του τριγώνου ΑΒΜ προεκτεινόμενη τέμνει την ΑΓ στο Ε. Από το Μ φέρνουμε παράλληλη προς την ΒΕ που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Αποδείξτε ότι:
α) $AE = EZ = Z\Gamma$.
β) $BE = 4\Delta E$.

126. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ. Ονομάζουμε Δ, Ε, Ζ τα μέσα των τμημάτων ΒΜ, ΑΜ, ΑΓ αντίστοιχα.
α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΔΕΖ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Αν ΒΓ = 2·ΑΒ, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΔΕΖ είναι ρόμβος.
γ) Αν $\widehat{B} = 90°$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΔΕΖ είναι ορθογώνιο.

127. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Φέρνουμε κάθετες από το Δ προς τις ΑΓ, ΑΒ που τις τέμνουν στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν Η, Θ είναι τα μέσα των ΒΔ, ΓΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι

$$ZH + E\Theta = \frac{1}{2}B\Gamma.$$

128. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\widehat{B} = \widehat{\Delta} = 90°$ και το μέσο Μ της ΑΓ. Αν τα σημεία Β, Μ, Δ δεν είναι συνευθειακά, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΜΒΔ είναι ισοσκελές.

129. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ. Ονομάζουμε Δ, Ε τα συμμετρικά του Β ως προς τα Α, Γ αντίστοιχα. Αν ΑΓ = 5 και ΒΓ = 6, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΒΔΕ.

130. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και $\widehat{B} = 30°$, φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αποδείξτε ότι $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$.

131. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και $\widehat{\Gamma} = 30°$. Εκτός αυτού σχεδιάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ. Η προέκταση της ΔΒ τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Αποδείξτε ότι:

α) $AB \parallel \Gamma\Delta$ β) $AE = A\Gamma$ γ) $B\Gamma + BE = 4AB$

132. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = 10, ΓΔ = 20. Αν $\widehat{\Gamma} = 45°$, να υπολογίσετε το ύψος του τραπεζίου.

133. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ και ΓΔ και ονομάζουμε Μ, Ν τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Φέρνουμε το ύψος ΑΕ. Αν ΕΜ = 4 και ΜΝ = 10, να υπολογίσετε την περίμετρο του ΑΒΓΔ.

134. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και $AB = 3\Gamma\Delta$. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι ΚΛΓΔ είναι ορθογώνιο.

135. Έστω παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Θεωρούμε σημεία Ε, Ζ στις πλευρές ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα έτσι ώστε $EM \perp MZ$. Αποδείξτε ότι $EZ = AE + BZ$.

136. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ και το προεκτείνουμε κατά τμήμα $H\Delta = AH$. Φέρνουμε και τη διάμεσο ΑΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $MN = AM$. Αποδείξτε ότι το ΒΓΝΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

137. Θεωρούμε τραπέζιο του οποίου τα μέσα των πλευρών του είναι κορυφές ρόμβου. Αποδείξτε ότι το τραπέζιο είναι ισοσκελές.

138. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα ΒΓ και σημείο Δ στο εσωτερικό του τμήματος ΑΒ. Ονομάζουμε Κ, Λ, Μ τα μέσα των ΓΔ, ΔΒ, ΒΓ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι:
α) Το τετράπλευρο ΚΜΛΑ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
β) Για τη διάμεσο ΗΘ του τραπεζίου ΚΜΛΑ ισχύει $H\Theta = AB/2$.

139. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και μια ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή Γ και έχει προς το ίδιο μέρος της τις κορυφές Α, Β, Δ. Αποδείξτε ότι η απόσταση της κορυφής Α από την ε είναι ίση με το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών Β και Δ από την ε. (*Υπόδειξη: Να φέρετε την κάθετη από το κέντρο Κ του παραλληλογράμμου προς την ε.*)

140. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ (προς τα μέρη των Β, Γ αντίστοιχα) κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E = B\Gamma$. Οι μεσοκάθετοι των τμημάτων ΓΔ, ΒΕ τέμνονται στο Ι. Αποδείξτε ότι η ΑΙ διχοτομεί τη γωνία $\widehat{A}$.

141. Τρεις κύκλοι με κέντρα Κ, Λ, Μ εφάπτονται εξωτερικά στα Α, Β, Γ. Να δείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο ΚΛΜ.

142. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, Μ το μέσο της ΓΔ, Λ το μέσο της ΒΔ. Η ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο Κ. Αποδείξτε ότι $B\Delta = 6\Lambda K$.

143. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ. Αν Κ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΕ να προσδιορίσετε το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΚΒ.

144. ★ Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ. Σε σημείο Κ του τμήματος ΜΓ φέρνουμε κάθετη σ' αυτό που τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ζ και την προέκταση της ΒΑ (προς το μέρος του Α) στο Ε. Ακόμη φέρνουμε κάθετη στην ΑΜ στο Α που τέμνει το τμήμα ΕΖ στο Ν. Να δείξετε ότι $EN = NZ$.

145. ★ Αποδείξτε ότι οι προβολές της κορυφής Α του τριγώνου ΑΒΓ, στις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\widehat{B}$, $\widehat{\Gamma}$ είναι συνευθειακά σημεία.

146. ★ Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με κέντρο βάρους Κ και ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο. Αν A', B', Γ', K' είναι οι προβολές των Α, Β, Γ, Κ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να δείξετε ότι
$$AA' + BB' + \Gamma\Gamma' = 3KK'.$$

147. ★ Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Οι ευθείες που διέρχονται από τα μέσα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου τέμνονται στο Κ. Αν A', B', K' είναι οι προβολές των Α, Β, Κ στην ευθεία ΓΔ, να δείξετε ότι
$$AA' + BB' = 4KK'.$$

Κεφάλαιο 5

Εγγεγραμμένα σχήματα

5.1 Κύκλος και γωνίες

Μία γωνία της οποίας η κορυφή είναι σημείο ενός κύκλου και οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο λέγεται **εγγεγραμμένη** γωνία του κύκλου. Το τόξο που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της ή αλλιώς λέμε ότι η γωνία **βαίνει** στο τόξο αυτό.

Μία γωνία της οποίας η κορυφή είναι σημείο ενός κύκλου, η μία της πλευρά τέμνει τον κύκλο και η άλλη είναι εφαπτόμενη του κύκλου, λέγεται **γωνία χορδής και εφαπτομένης**.

Θεώρημα 30. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

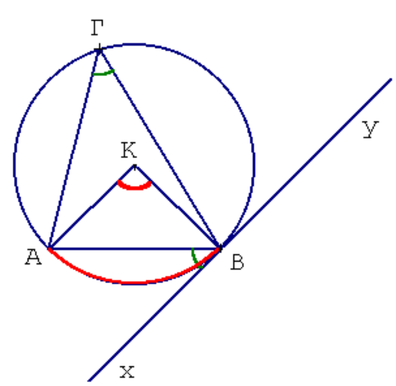
Θεώρημα 31. Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Έτσι για το σχήμα 59 θα έχουμε

$$\widehat{\Gamma} = A\widehat{B}x \qquad \text{και} \qquad \widehat{\Gamma} = \frac{\widehat{K}}{2}.$$

Αν λοιπόν $\widehat{\Gamma} = A\widehat{B}x = a$, τότε

$$\widehat{AB} = \widehat{K} = 2a\,.$$



ΣΧΗΜΑ 59

Ακόμη έχουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

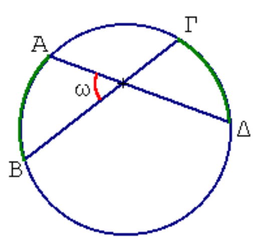
- Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα, του ίδιου κύκλου ή ίσων κύκλων, είναι ίσες.
- Τα τόξα που περιέχονται μεταξύ δύο παράλληλων χορδών ενός κύκλου είναι ίσα. Αντίστροφα, αν δύο τόξα κύκλου που περιέχονται μεταξύ δύο μη τεμνόμενων χορδών είναι ίσα, τότε οι χορδές είναι παράλληλες. (*Αποδείξτε τα παραπάνω.*)

Για την περίπτωση που δύο χορδές ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται έχουμε τις παρακάτω σχέσεις:

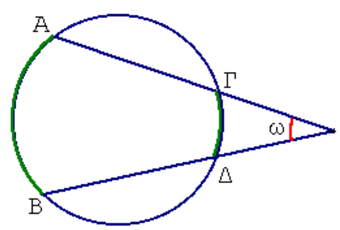
$$\hat{\omega} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{\Gamma\Delta}}{2} \qquad \text{(Σχ. 60α)}$$

και

$$\hat{\omega} = \frac{\widehat{AB} - \widehat{\Gamma\Delta}}{2} \qquad \text{(Σχ. 60β)}$$

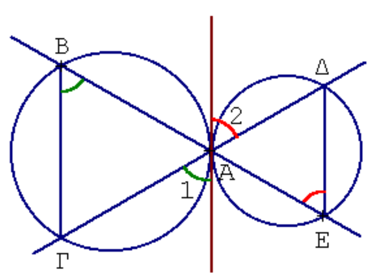


ΣΧΗΜΑ 60α



ΣΧΗΜΑ 60β

Παράδειγμα 20. Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Δύο ευθείες που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα Β, Γ και τον άλλο στα Δ, Ε. Αποδείξτε ότι $B\Gamma \parallel \Delta E$.
Απόδειξη. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Α (Σχ. 61).



ΣΧΗΜΑ 61

Επειδή η $\widehat{A}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{B}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής, προκύπτει

$$\widehat{B} = \widehat{A}_1.$$

Επειδή η $\widehat{A}_2$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{E}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής, προκύπτει

$$\widehat{E} = \widehat{A}_2.$$

Ακόμη $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ ως κατακορυφήν, συνεπώς

$$\widehat{B} = \widehat{E} \Rightarrow B\Gamma \parallel \Delta E.$$

5.2 Εγγράψιμα τετράπλευρα

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγεγραμμένο** σε κύκλο αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου. Ο κύκλος αυτός, ονομάζεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του τετραπλεύρου.
Ερώτημα: *Ποιο είναι το κέντρο αυτού του κύκλου*;

Θεώρημα 32. Ένα τετράπλευρο που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:
α) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
β) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
γ) Κάθε εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία.
Απόδειξη. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Σχ. 62).
α) Η γωνία $B\widehat{A}\Delta$ βαίνει στο τόξο $\widehat{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $B\widehat{\Gamma}\Delta$ βαίνει στο τόξο $\widehat{BA\Delta}$. Επομένως

$$B\widehat{A}\Delta + B\widehat{\Gamma}\Delta = \frac{\widehat{B\Gamma\Delta}}{2} + \frac{\widehat{BA\Delta}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ.$$

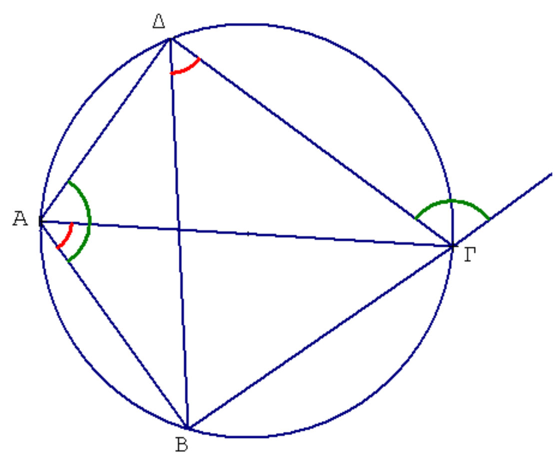
β) Η πλευρά ΓΔ έχει απέναντι κορυφές τις Α, Β. Οι γωνίες $\Delta\widehat{A}\Gamma$, $\Delta\widehat{B}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένες που βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα είναι ίσες.
γ) Έχουμε

$$\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 180^\circ - B\widehat{\Gamma}\Delta\,.$$

Λόγω του (α)

$$B\widehat{A}\Delta = 180^\circ - B\widehat{\Gamma}\Delta$$

επομένως $\widehat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = B\widehat{A}\Delta$.



ΣΧΗΜΑ 62

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

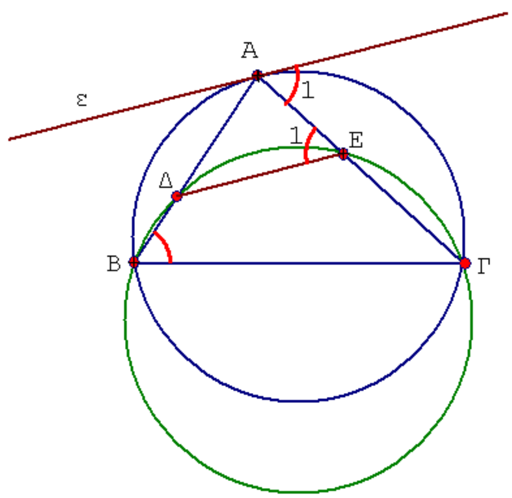
Θεώρημα 33. Ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:
α) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
β) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.
γ) Μία εξωτερική γωνία του ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.
Απόδειξη. Βλέπε [3].

Παράδειγμα 21. Ένας κύκλος C_1 διέρχεται από τις κορυφές Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου C_2 του ΑΒΓ, στο σημείο του Α. Να δείξετε ότι $\varDelta E \parallel \varepsilon$.
Απόδειξη. Η $\widehat{A}_1$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\widehat{B}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής αυτής, οπότε

$$\widehat{A}_1 = \widehat{B}.$$

Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο C_1, η $\widehat{E}_1$ εξωτερική του τετραπλεύρου αυτού και η $\widehat{B}$ απέναντι εσωτερική της $\widehat{E}_1$, άρα

$$\widehat{E}_1 = \widehat{B}.$$



ΣΧΗΜΑ 63

Συνεπώς $\widehat{A}_1 = \widehat{E}_1 \Rightarrow \varDelta E \parallel \varepsilon$.

Ασκήσεις για λύση

148. Σε κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ τέτοια ώστε η οξεία γωνία της χορδής ΑΒ με την εφαπτομένη του κύκλου στο Β να είναι $60°$ και $\widehat{\varGamma\varDelta} = 60°$, $\widehat{\varDelta A} = 100°$. Υπολογίστε τη γωνία $\varGamma\widehat{A}B$.

149. Σε κύκλο θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ, Δ τέτοια ώστε $\widehat{AB} = 120°$, $\widehat{\varGamma\varDelta} = 60°$.
α) Αποδείξτε ότι οι ευθείες ΑΓ, ΒΔ τέμνονται κάθετα.
β) Αν Κ είναι σημείο του κύκλου και Ρ είναι το σημείο τομής των ευθειών ΑΔ, ΒΓ να δείξετε ότι $\varDelta\widehat{K}\varGamma = A\widehat{P}B$.

150. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Κ, το μέσο Μ του κυρτογώνιου τόξου του $\widehat{B\varGamma}$ και Α σημείο του μη κυρτογώνιου τόξου με άκρα τα Β, Γ. Αν $\varGamma\widehat{A}B = 50°$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΚΒΓ και ΜΒΓ.

151. Τα διαδοχικά σημεία Α, Γ, Β, Δ ενός κύκλου είναι τέτοια ώστε $AB \perp \varGamma\varDelta$ και $\widehat{A\varGamma} = 85°$, $\varGamma\widehat{\varDelta}B = 40°$. Υπολογίστε τα μέτρα των τόξων $\widehat{B\varGamma}$, $\widehat{B\varDelta}$, $\widehat{A\varDelta}$.

152. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 70°$ και τα σημεία επαφής Δ, Ε, Ζ του εγγεγραμμένου κύκλου με τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα. Υπολογίστε τη γωνία $Z\widehat{\varDelta}E$.

153. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και τον κύκλο με διάμετρο ΑΓ, ο οποίος τέμνει την υποτείνουσα στο Δ. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Δ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Μ.
α) Υπολογίστε τη γωνία $A\widehat{\varDelta}\varGamma$.
β) Αποδείξτε ότι $\widehat{B} = M\widehat{\varDelta}B$.
γ) Αποδείξτε ότι το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ.

154. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Αν το ΑΒΛΚ είναι εγγράψιμο, να δείξετε ότι και το ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

155. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και φέρνουμε τα ύψη του ΑΚ, ΒΛ που τέμνονται στο Η. Αν στην ΑΓ πάρουμε τμήμα ΛΜ έτσι ώστε το Λ να είναι το μέσο του ΑΜ, να δείξετε ότι:
α) Η ΗΛ είναι διχοτόμος στο τρίγωνο ΗΑΜ.
β) Το ΒΗΜΓ είναι εγγράψιμο.

156. Από τυχαίο σημείο Θ στο ύψος ΑΔ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε $\varTheta E \perp AB$ και $\varTheta Z \perp A\varGamma$. Να δείξετε ότι:
α) Οι γωνίες $A\widehat{Z}E$ και $A\widehat{\varTheta}E$ είναι ίσες.
β) Το τετράπλευρο ΒΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

157. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και δύο χορδές του ΑΓ και ΒΔ που τέμνονται στο Ε. Από το Ε φέρνουμε το τμήμα ΕΖ κάθετο στην ΑΒ (το Ζ σημείο της ΑΒ). Αποδείξτε ότι:
α) Τα τετράπλευρα ΔΕΖΑ και ΒΖΕΓ είναι εγγράψιμα.
β) Η ΖΕ διχοτομεί τη γωνία $\varGamma\widehat{Z}\varDelta$.

158. Θεωρούμε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΕΓ. Έστω Ζ το σημείο τομής των ΒΕ και ΓΔ. Αποδείξτε ότι:
α) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΕ είναι ίσα.
β) Τα τετράπλευρα ΑΖΒΔ και ΑΖΓΕ είναι εγγράψιμα.

159. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και $\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$. Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΔ και την κάθετη ευθεία ε στην ΑΔ, η οποία διέρχεται από το Β. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής της ε με την ΑΔ και θεωρούμε σημείο Ζ στην ε, με την ιδιότητα το Ε να είναι το μέσο του ΒΖ.
α) Αποδείξτε ότι $\Gamma Z \perp ZB$.
β) Αποδείξτε ότι το ΓΖΑΒ είναι εγγράψιμο.
γ) Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΖΔΑ είναι ισοσκελές.
δ) Να προσδιορίσετε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του ΓΖΑΒ.

160. ★ Στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Δ και γράφουμε τους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ. Οι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία Β, Γ τέμνονται στο Ε. Αποδείξτε ότι το ΑΒΕΓ είναι εγγράψιμο.

161. ★ Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Μ, Ν, Ρ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΜΡ, ΒΜΝ, ΓΝΡ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

162. ★ Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού, τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΡ, ΑΓΝ, ΒΓΜ. Αποδείξτε ότι οι ευθείες ΑΜ, ΒΝ και ΓΡ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

163. ★ Αποδείξτε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου ενός τριγώνου, πάνω στις πλευρές του, είναι συνευθειακά σημεία. (*Ευθεία Simson*)

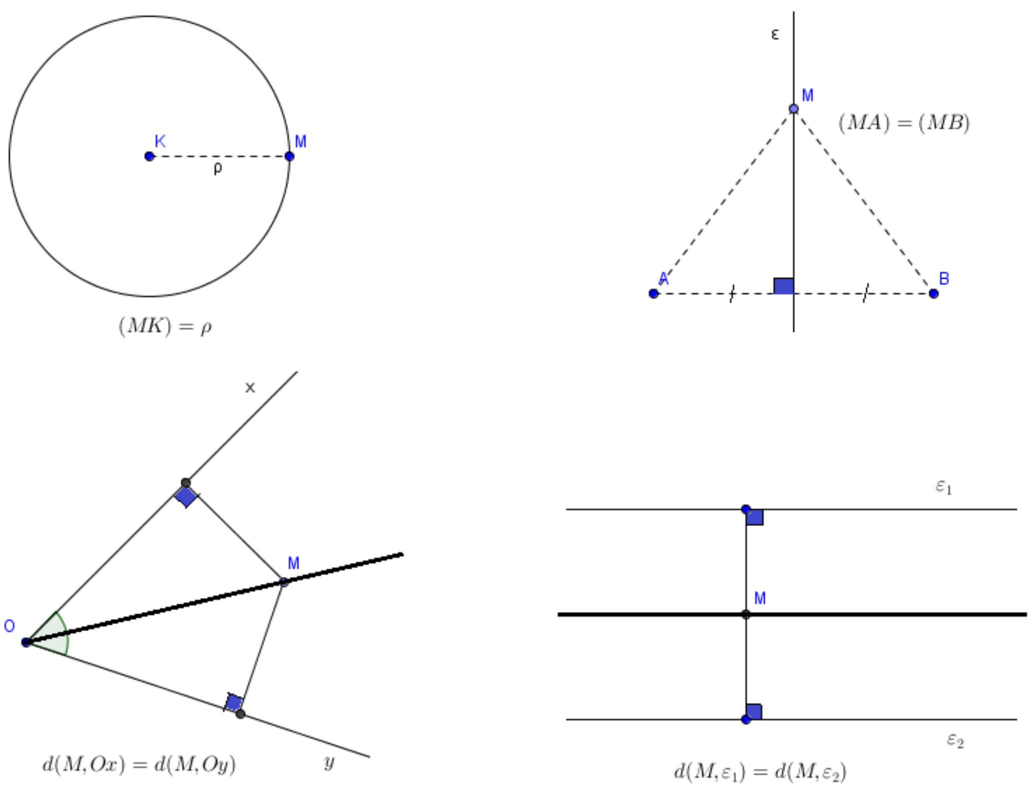
164. ★ Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο τα μέσα των πλευρών του, τα ίχνη των υψών του και τα μέσα των τμημάτων που ορίζονται από το ορθόκεντρο και τις κορυφές του, βρίσκονται στον ίδιο κύκλο. (*Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler*)

Κεφάλαιο 6

Γεωμετρικοί τόποι

6.1 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Ονομάζουμε **γεωμετρικό τόπο** το σύνολο όλων των σημείων που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα. Με βάση αυτόν τον ορισμό (Σχ. 64):



ΣΧΗΜΑ 64

α) Ο **κύκλος** είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο.

β) Η **μεσοκάθετος** ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.
γ) Η **διχοτόμος** μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων της γωνίας που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.
δ) Η **μεσοπαράλληλη** δύο παράλληλων ευθειών ε_1, ε_2 είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις ε_1, ε_2.

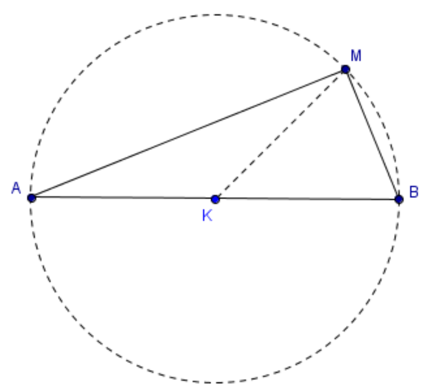
6.2 Εύρεση γεωμετρικών τόπων

Για την εύρεση ενός γεωμετρικού τόπου σημείων με χαρακτηριστική ιδιότητα Ι ακολουθούμε την εξής πορεία:

- Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ με την ιδιότητα Ι και δείχνουμε ότι βρίσκεται σε κάποιο σχήμα Σ.
- Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ του σχήματος Σ και δείχνουμε ότι αυτό έχει την ιδιότητα Ι.

Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το σχήμα Σ.

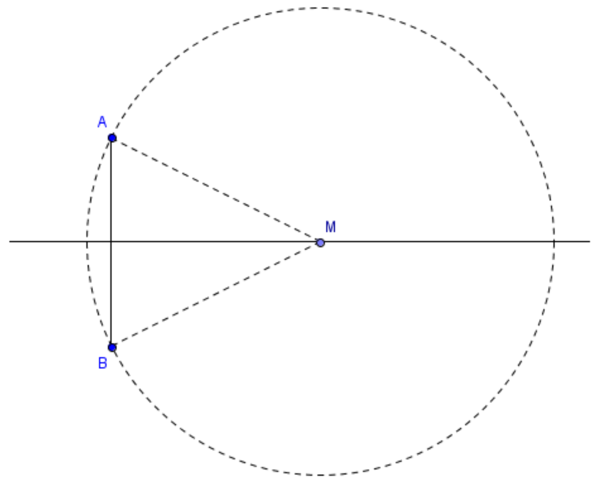
Παράδειγμα 22. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ.
Λύση. (Σχ. 65)



ΣΧΗΜΑ 65

Έστω Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε αφού το ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ θα ισχύει $MK = \frac{AB}{2} = AK = KB$. Συνεπώς το Μ ανήκει στον κύκλο με διάμετρο ΑΒ, χωρίς τα Α, Β αφού τότε δεν ορίζεται το τρίγωνο ΑΒΜ.
Έστω τυχαίο σημείο Μ του κύκλου διαμέτρου ΑΒ που δεν ταυτίζεται με το Α ή το Β. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο στο Μ διότι η γωνία $\widehat{AMB}$ είναι εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο.
Έπεται ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος διαμέτρου ΑΒ χωρίς τα Α, Β.

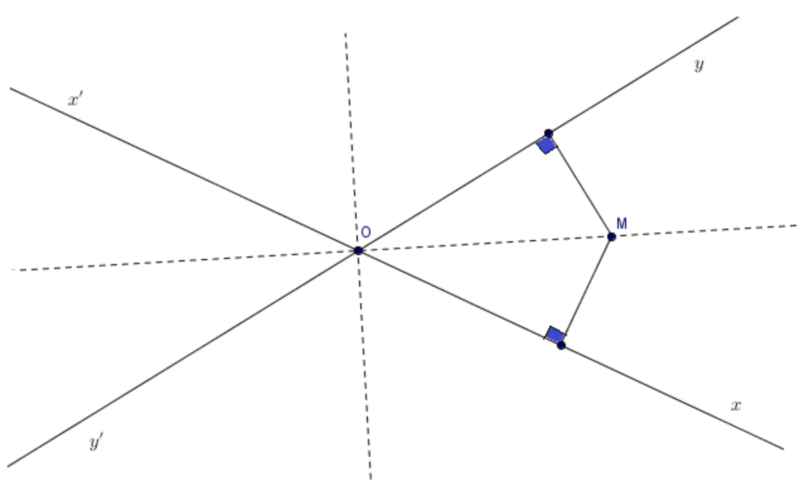
Παράδειγμα 23. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία είναι κέντρα κύκλων που έχουν χορδή την ΑΒ.
Λύση. (Σχ. 66)



ΣΧΗΜΑ 66

Θεωρούμε σημείο Μ το οποίο είναι κέντρο κύκλου που έχει χορδή την ΑΒ. Τότε θα ισχύει $MA = MB$, οπότε το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΒ.
Έστω τώρα τυχαίο σημείο Μ της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Τότε το Μ ισαπέχει από τα Α, Β δηλαδή το Μ είναι κέντρο του κύκλου (M, MA) οποίος έχει χορδή την ΑΒ.
Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

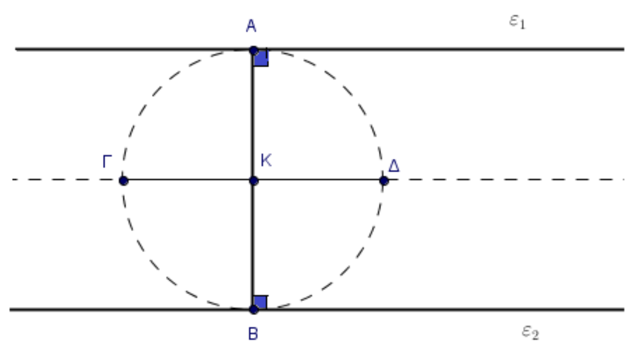
Παράδειγμα 24. Θεωρούμε δύο ευθείες $x'x$, $y'y$ οι οποίες τέμνονται στο Ο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις δύο ευθείες.
Λύση. (Σχ. 67)



ΣΧΗΜΑ 67

Θεωρούμε σημείο Μ του επιπέδου το οποίο ισαπέχει από τις ευθείες $x'x$, $y'y$. Τότε το Μ θα ανήκει σε μία από τις γωνίες $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}x'$, $x'\widehat{O}y'$ και $y'\widehat{O}x$, συνεπώς θα ανήκει στη διχοτόμο της αντίστοιχης γωνίας. Οι διχοτόμοι των τεσσάρων διαδοχικών γωνιών $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}x'$, $x'\widehat{O}y'$ και $y'\widehat{O}x$, σχηματίζουν ένα ζεύγος κάθετων ευθειών, όπου ανήκει τελικά το Μ.
Έστω τυχαίο σημείο Μ που ανήκει στο ζεύγος των ευθειών που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}x'$, $x'\widehat{O}y'$ και $y'\widehat{O}x$. Τότε το Μ, αφού ανήκει στη διχοτόμο κάποιας γωνίας θα ισαπέχει από τις πλευρές της, επομένως θα ισαπέχει από τις ευθείες $x'x$, $y'y$. Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι οι φορείς των διχοτόμων των γωνιών $x\widehat{O}y$, $y\widehat{O}x'$, $x'\widehat{O}y'$ και $y'\widehat{O}x$.

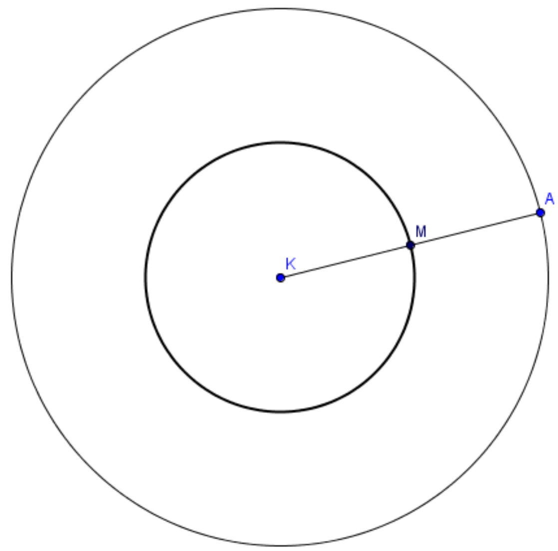
Παράδειγμα 25. Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 των οποίων η απόσταση είναι d. Έστω ακόμη ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ κάθετο στις παραπάνω ευθείες με το Α να ανήκει στην ε_1 και το Β στην ε_2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις ε_1 και ε_2 απέχουν από το μέσο Κ του ΑΒ απόσταση μικρότερη ή ίση του $d/2$.
Λύση. (Σχ. 68)



ΣΧΗΜΑ 68

Θεωρούμε σημείο Μ που ισαπέχει από τις ε_1, ε_2 και απέχει από το Κ απόσταση μικρότερη ή ίση του $d/2$. Τότε το Μ θα ανήκει ταυτόχρονα στη μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2 και στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Κ και ακτίνα $KA = d/2$. Άρα το Μ θα ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, όπου Γ, Δ τα σημεία τομής της μεσοπαράλληλης με τον κύκλο $(K, d/2)$.
Έστω τυχαίο σημείο Μ του τμήματος ΓΔ. Τότε το Μ αφού ανήκει στη μεσοπαράλληλη των ε_1, ε_2 θα ισαπέχει απ' αυτές και αφού ανήκει στον κυκλικό δίσκο με κέντρο Κ και ακτίνα $d/2$ θα απέχει από το Κ απόσταση μικρότερη ή ίση του $d/2$.
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ.

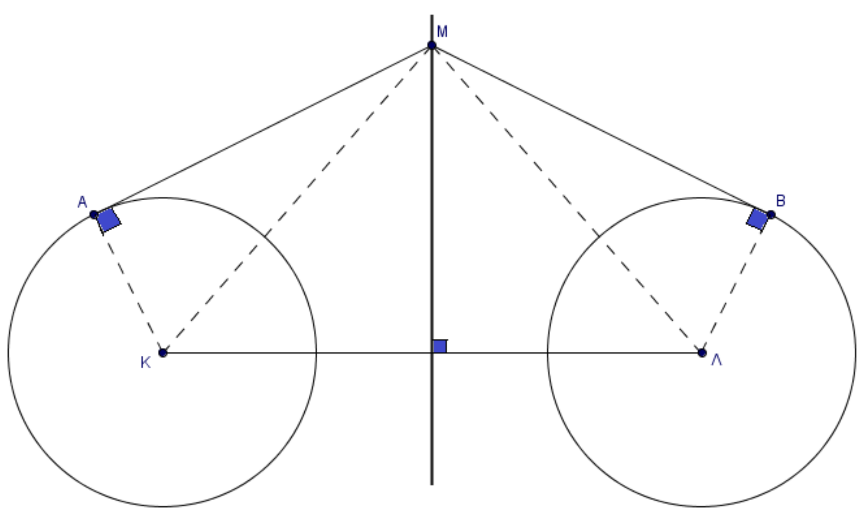
Παράδειγμα 26. Έστω κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ρ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία είναι μέσα των ακτίνων του παραπάνω κύκλου.
Λύση. (Σχ. 69)



ΣΧΗΜΑ 69

Θεωρούμε σημείο Μ το οποίο είναι μέσο ακτίνας ΚΑ του κύκλου (O, ρ). Τότε $KM = \rho/2$, οπότε το Μ ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα $\rho/2$.
Έστω τώρα τυχαίο σημείο Μ του κύκλου $(K, \rho/2)$. Τότε το Μ είναι μέσο ακτίνας $KA = \rho$ του κύκλου (K, ρ).
Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος $(K, \rho/2)$.

Παράδειγμα 27. Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους (καθένας εξωτερικός του άλλου) με κέντρα Κ, Λ και ακτίνες ίσες με ρ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία τα εφαπτόμενα τμήματα από το Μ προς τους κύκλους είναι ίσα.
Λύση. (Σχ. 70)



ΣΧΗΜΑ 70

Έστω σημείο Μ του επιπέδου τέτοιο ώστε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ προς τους κύκλους να είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΒΛ είναι ίσα αφού έχουν:

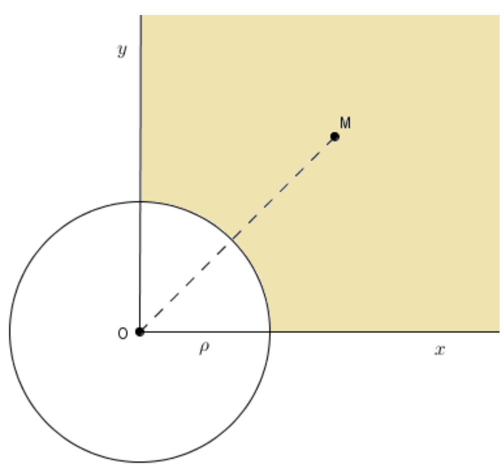
- $MA = MB$ από την υπόθεση.
- $KA = KB$ αφού οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες.
- $M\widehat{A}K = M\widehat{B}\Lambda = 90°$ αφού η εφαπτόμενη κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής.

Συνεπώς $MK = M\Lambda$, οπότε το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος ΚΛ.
Έστω τώρα τυχαίο σημείο Μ της μεσοκαθέτου του ΚΛ. Φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ προς τους κύκλους. Τότε τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΒΛ είναι ίσα αφού έχουν:

- $MK = M\Lambda$ αφού το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΚΛ.
- $KA = KB$ αφού οι κύκλοι έχουν ίσες ακτίνες.
- $M\widehat{A}K = M\widehat{B}\Lambda = 90°$ αφού η εφαπτόμενη κύκλου είναι κάθετη στην ακτίνα στο σημείο επαφής.

Συνεπώς $MA = MB$, δηλαδή τα εφαπτόμενα τμήματα είναι ίσα.
Έπεται ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΚΛ.

Παράδειγμα 28. Θεωρούμε κύκλο (O, ρ) και την ορθή γωνία $x\widehat{O}y$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό της γωνίας $x\widehat{O}y$ και απέχουν από το Ο απόσταση μεγαλύτερη του ρ.
Λύση. (Σχ. 71)



ΣΧΗΜΑ 71

Έστω σημείο Μ εσωτερικό της γωνίας $x\widehat{O}y$ που απέχει από το Ο απόσταση μεγαλύτερη του ρ. Τότε θα βρίσκεται εκτός του κύκλου (O, ρ) και ταυτόχρονα εντός της γωνίας $x\widehat{O}y$ δηλαδή στο γραμμοσκιασμένο χωρίο $\mathcal{X}$.
Έστω τυχαίο σημείο Μ του $\mathcal{X}$. Τότε προφανώς το Μ βρίσκεται εντός της γωνίας $x\widehat{O}y$ και απέχει από το Ο απόσταση μεγαλύτερη του ρ.
Συμπεραίνουμε ότι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το χωρίο $\mathcal{X}$.

Ασκήσεις για λύση

165. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία είναι μέσα ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν το Α με τα σημεία της πλευράς ΒΓ.

166. Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους $a > 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία το τρίγωνο ΜΑΒ έχει διάμεσο $MK = \beta > 0$.

167. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Ο και σημείο Σ εντός του κύκλου διαφορετικό από το Ο. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου που είναι μέσα χορδών του κύκλου που διέρχονται από το Σ.

168. Δίνεται ευθεία ε. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία απέχουν από την ε απόσταση $d > 0$.

169. Δίνεται γωνία $x\widehat{O}y$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία βρίσκονται εντός της γωνίας $x\widehat{O}y$ και ισχύει $d(M, Ox) \geq d(M, Oy)$.

170. Μία σκάλα ΑΒ είναι τοποθετημένη κατακόρυφα σ' ένα τοίχο. Το κάτω άκρο της σκάλας Α γλιστράει και τελικά η σκάλα πέφτει στο έδαφος. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ της σκάλας.

171. Θεωρούμε κύκλο (K, ρ) και σημείο Α εκτός αυτού. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία είναι μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων που συνδέουν το Α με τα σημεία του κύκλου.

172. Θεωρούμε κύκλο (K, ρ). Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου που είναι κέντρα κύκλων οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά του (K, ρ) και έχουν ακτίνα μήκους $a > 0$.

173. Θεωρούμε κύκλο (K, ρ) και την εφαπτομένη του σ' ένα συγκεκριμένο σημείο του Α. Από τυχαίο σημείο Β της εφαπτομένης φέρνουμε άλλη εφαπτομένη ΒΓ του κύκλου. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου που αποτελούν τα περίκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ.

174. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους $a > 0$. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύουν $(MA) \geq (MB)$ και $(MB) \leq (AB)$.

Βιβλιογραφία

[**1**] Αλιμπινίσης Α. κ.α., *Θεωρητική Γεωμετρία* A' *Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1993.

[**2**] Αλιμπινίσης Α. κ.α., *Θεωρητική Γεωμετρία* B' *Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1994.

[**3**] Αργυρόπουλος Η. κ.α., *Ευκλείδεια Γεωμετρία* A' *και* B' *Ενιαίου Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 2001.

[**4**] Βαρουχάκης Ν. κ.α., *Θεωρητική Γεωμετρία* B' *Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1988.

[**5**] Θωμαΐδης Γ. κ.α.,*Ευκλείδεια Γεωμετρία* A' *και* B' *Ενιαίου Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1999.

[**6**] Παπαμιχαήλ Δ., Σκιαδά Α., *Θεωρητική Γεωμετρία* A' *Λυκείου*, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα, 1987.