ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β$'$ ΛΥΚΕΙΟΥ

(Τελευταία ενημέρωση: Νοέμβριος 2016)

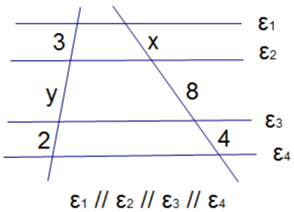
Ανέστης Τσομίδης
Κατερίνη

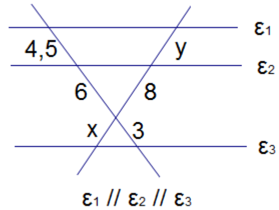
Περιεχόμενα

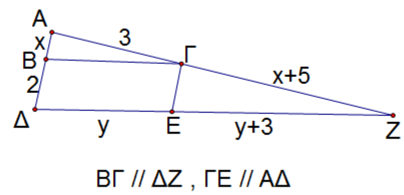
1 Αναλογίες

1.1 Το θεώρημα του Θαλή

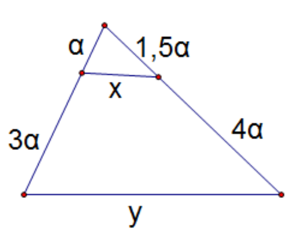
1.1. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων x, y.

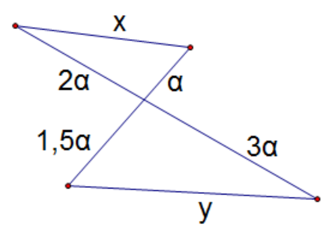


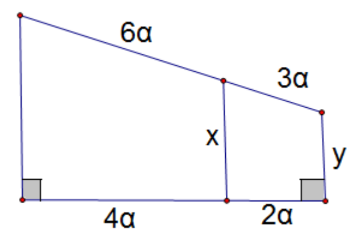




1.2. Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να εξετάσετε αν τα τμήματα x, y είναι παράλληλα.







1.3. Από τυχαίο σημείο Ν της διαμέσου ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ, φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ που τέμνουν την ΒΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\text{α) } \frac{M\Delta}{\Delta B} = \frac{ME}{E\Gamma} \qquad \text{β) } \Delta M = ME.$$

1.4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Γ φέρνουμε ευθεία εκτός αυτού, η οποία τέμνει τις ευθείες ΑΒ, ΑΔ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{AB}{AE} + \frac{A\Delta}{AZ} = 1.$$

1.5. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία η οποία τέμνει τις ΒΔ, ΒΓ, ΓΔ στα σημεία Ε, Ζ, Θ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{AE} = \frac{1}{AZ} + \frac{1}{A\Theta}.$$

1.6. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ. Οι ευθείες ΔΑ, ΓΒ τέμνονται στο Κ. Η παράλληλη από το Β προς την ΑΓ τέμνει την ΑΔ στο Ε. Να δείξετε ότι

$$KA^2 = K\Delta \cdot KE.$$

1.7. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και ένα σημείο Κ της διαγωνίου ΑΓ τέτοιο ώστε $K\Gamma = 5KA$. Αν η ΒΚ τέμνει την ΑΔ στο Ε, να δείξετε ότι $BE = 6KE$.

1.8. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν Ε, Ζ είναι τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΔΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $EZ \parallel B\Delta$.

1.9. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Ρ της πλευράς ΑΒ. Φέρνουμε $P\Sigma \parallel A\Delta$ με $\Sigma \in B\Delta$, $\Sigma T \parallel B\Gamma$ με $T \in \Gamma\Delta$ και $TN \parallel A\Delta$ με $N \in A\Gamma$. Να δείξετε ότι $PN \parallel B\Gamma$.

1.2 Τα θεωρήματα των διχοτόμων

1.10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 4$, $A\Gamma = 5$ και $B\Gamma = 6$. Φέρνουμε την εξωτερική διχοτόμο ΑΖ και παίρνουμε σημείο Ε στην ΒΓ τέτοιο ώστε $Z\widehat{A}E = 90°$.
α) Να δείξετε ότι η ΑΕ είναι εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ.
β) Να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΖΒ, ΒΕ και ΕΓ.

1.11. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma$ και σημεία Δ, Ε στις προεκτάσεις της ΒΓ προς τα μέρη των Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Αν ΒΖ, ΓΗ είναι διχοτόμοι των τριγώνων ΑΒΔ, ΑΓΕ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $ZH \parallel B\Gamma$.

1.12. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ τέμνουν τις διαγωνίους του στα Ε και Ζ. Αποδείξτε ότι $EZ \parallel AB$.

1.13. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Αν Μ είναι σημείο της χορδής ΓΔ και οι ευθείες ΜΑ, ΜΒ τέμνουν τον κύκλο στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να δείξετε ότι
$$\frac{E\Gamma}{E\Delta} = \frac{Z\Gamma}{Z\Delta}.$$

1.14. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ κάθετη στην ΑΒ. Από ένα σημείο Σ του κύκλου φέρνουμε τις ευθείες ΣΓ και ΣΔ που τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να δείξετε ότι
$$\frac{AM}{AN} = \frac{BM}{BN}.$$

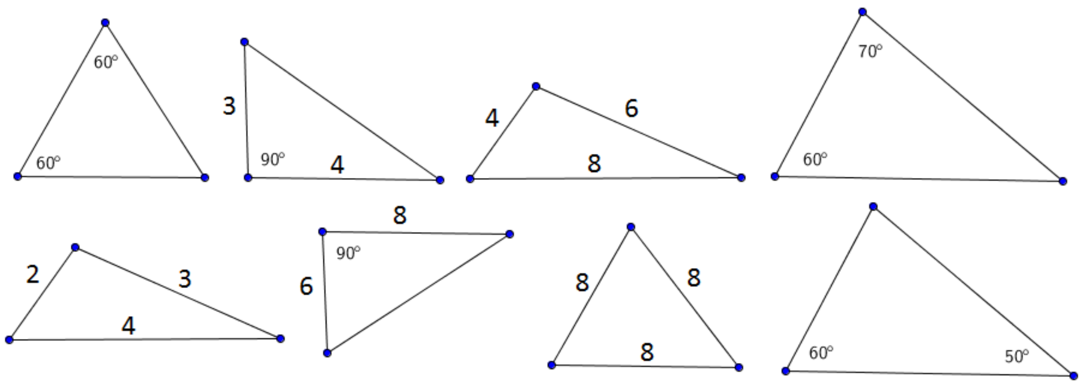
1.15. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ και η διάμεσος ΑΜ τριχοτομούν τη γωνία $\widehat{A}$. Να δείξετε ότι
$$\widehat{A} = 90°, \quad \widehat{B} = 60°, \quad \widehat{\Gamma} = 30°.$$

1.16. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$, τη διχοτόμο του ΑΔ και το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ. Η παράλληλη από το Μ προς την ΑΔ τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι
$$BE = \Gamma Z = \frac{1}{2}(\beta + \gamma).$$

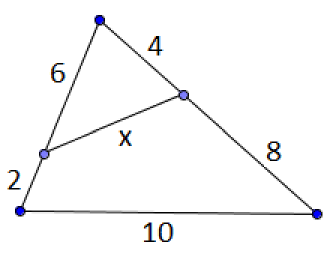
2 Ομοιότητα

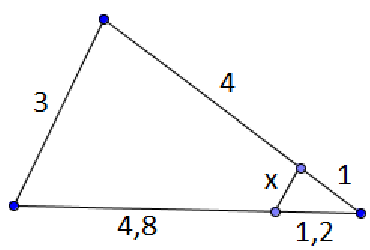
2.1 Όμοια τρίγωνα

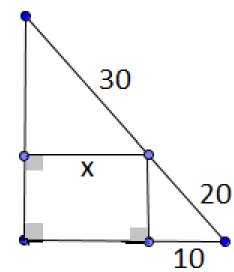
2.1. Να αντιστοιχίσετε κάθε τρίγωνο της πρώτης γραμμής με το όμοιό του στη δεύτερη γραμμή.



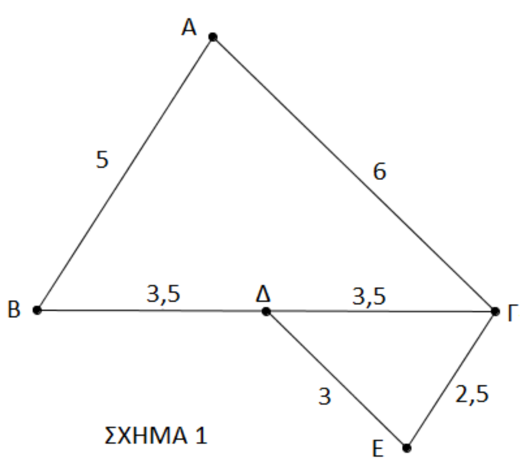
2.2. Να βρείτε το x σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα.



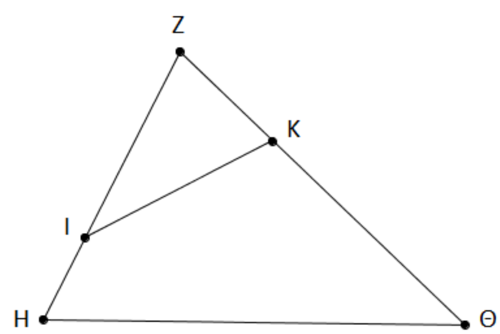




2.3. Για το σχήμα 1, να δείξετε ότι ΓΕ $\parallel$ ΑΒ. Στο σχήμα 2 τα τρίγωνα ΖΗΘ και ΖΚΙ είναι όμοια και ακόμη ΙΚ $\nparallel$ ΗΘ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΙΚΘΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.



ΣΧΗΜΑ 1



ΣΧΗΜΑ 2

2.4. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90°$ και ΑΓ $\perp$ ΒΔ. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι όμοια και στη συνέχεια να δείξετε ότι $A\Delta^2 = AB \cdot \Gamma\Delta$.

2.5. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρνουμε ευθεία που τέμνει τις ΒΓ, ΔΓ στα σημεία Ε, Ζ αντίστοιχα.
α) Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΖ είναι όμοια.
β) Να δείξετε ότι $BE \cdot \Delta Z = AB \cdot A\Delta$.

2.6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ.
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΕΓ είναι όμοια.
β) Αποδείξτε ότι $B\Gamma^2 = 2A\Gamma \cdot E\Gamma$.

2.7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Θεωρούμε σημείο Ε της ΑΒ τέτοιο ώστε $\Delta E \perp AB$. Να δείξετε ότι $A\Delta^2 = A\Gamma \cdot \Delta E$.

2.8. Θεωρούμε κύκλο με διάμετρο ΑΒ και τις εφαπτόμενες αυτού ε_1, ε_2 στα Α, Β αντίστοιχα. Παίρνουμε τυχαίο σημείο του κύκλου Ε και οναμάζουμε Μ, Ν τα σημεία τομής των ΒΕ, ΑΕ με τις ε_1, ε_2 αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $AB^2 = AM \cdot BN$.

2.9. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ζ της πλευράς ΒΓ. Από τις κορυφές Β, Γ φέρνουμε παράλληλες προς την ΑΖ οι οποίες τέμνουν τις ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Η, Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι
$$\frac{1}{AZ} = \frac{1}{BE} + \frac{1}{H\Gamma}.$$

2.10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Ονομάζουμε Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.

2.11. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν Δ σημείο της πλευράς ΑΒ και Ε σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοια ώστε $\Delta B \cdot E\Gamma = MB^2$, να δείξετε ότι

α) $M\overset{\triangle}{\Delta} B \approx M\overset{\triangle}{\Gamma} E$ β) $\Delta\widehat{M}E = \widehat{B}$.

2.12. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΒΓ φέρνουμε παράλληλη στη διάμεσο ΑΜ, η οποία τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Κ, Λ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το άθροισμα ΜΚ + ΜΛ είναι σταθερό.

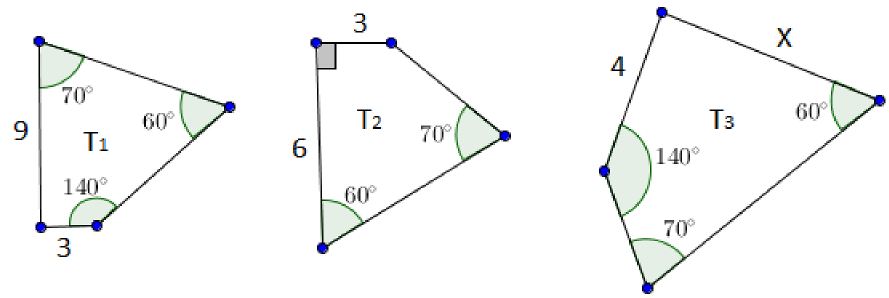
2.13. Θεωρούμε δύο κύκλους με ακτίνες R_1, R_2 οι οποίοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι ένα κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα να δείξετε ότι η απόσταση d του Α από τη ΒΓ δίνεται από τον τύπο
$$d = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

2.14. Θεωρούμε κύκλο με ακτίνα R και την εφαπτομένη σε σημείο Α αυτού. Αν Μ είναι σημείο του κύκλου και d η απόσταση του Μ από την εφαπτομένη, να δείξετε ότι $MA^2 = 2dR$.

2.15. Τετράγωνο ΚΛΜΝ πλευράς x έχει τις κορυφές Κ, Λ στην πλευρά ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ και τις Μ, Ν στις πλευρές ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα.
α) Αποδείξτε ότι $x(a + \upsilon_a) = a + \upsilon_a$.
β) Αν $x/\upsilon_a = 2/3$, να βρείτε το λόγο των περιμέτρων των τριγώνων ΑΝΜ και ΑΒΓ.

2.2 Όμοια πολύγωνα

2.16. Δύο από τα παρακάτω τετράπλευρα T_1, T_2, T_3 είναι όμοια. Βρείτε τα όμοια τετράπλευρα και το x.



2.17. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Αν Κ, Μ, Μ, Ν είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι ένα παραλληλόγραμμο όμοιο με το ΑΒΓΔ.

2.18. Θεωρούμε τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$\widehat{A} = \widehat{E} \quad \text{και} \quad \frac{AB}{EZ} = \frac{A\Delta}{E\Theta}.$$

Αποδείξτε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια.

2.19. Για τους ρόμβους ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ ισχύει $\widehat{A} = \widehat{E}$. Αποδείξτε ότι οι ρόμβοι ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοιοι.

2.20. Οι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι 3, 4, 5, 6 και είναι όμοιο με ένα τετράπλευρο που η διαφορά της μικρότερης από τη μεγαλύτερη πλευρά του είναι 2. Να βρείτε τις πλευρές του δεύτερου τετραπλεύρου.

2.21. Θεωρούμε τα κυρτά τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ. Τα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, ΑΓ είναι ανάλογα προς τα τμήματα ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ, ΕΗ. Να δείξετε ότι τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι όμοια.

2.22. Δύο ορθογώνια έχουν ίσες τις γωνίες των διαγωνίων τους. Αποδείξτε ότι είναι όμοια.

3 Μετρικές σχέσεις

3.1 Μετρικές σχέσεις σε ορθογώνιο τρίγωνο

3.1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και ύψος ΑΔ. Αν $AB = 6$ και $B\Gamma = 10$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΑΓ, ΒΔ, ΔΓ, ΑΔ.

3.2. Ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρά α και ύψος $\upsilon = 4\sqrt{3}$. Να βρείτε το μήκος της πλευράς α.

3.3. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και ύψος ΑΔ. Αν $A\Delta = 2/\sqrt{5}$ και $B\Gamma = \sqrt{5}$, να υπολογίσετε τα μήκη των τμημάτων ΒΔ, ΓΔ.

3.4. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Κ και μια ακτίνα του $K\Gamma = R$. Φέρνουμε χορδή ΑΒ κάθετη στην ακτίνα ΚΓ, που την τέμνει στο Δ. Αν $K\Delta = a$ να δείξετε ότι:

α) $AB^2 = 4(R-a)(R+a)$ και β) $A\Gamma^2 = 2R(R-a)$.

3.5. Δύο κύκλοι (K, a) και $(\Lambda, 2a)$ εφάπτονται εξωτερικά στο Δ. Αν ΑΒ είναι ένα κοινό εφαπτόμενο τμήμα τους, να δείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές Α, Β, Κ, Λ είναι τραπέζιο και να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ ως συνάρτηση του a.

3.6. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο Κ και μια ακτίνα του $KA = R$. Φέρνουμε χορδή ΒΓ του κύκλου παράλληλη προς την ΚΑ. Να δείξετε ότι $AB^2 + A\Gamma^2 = 4R^2$.

3.7. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και διχοτόμο ΓΔ. Αν $AB = 3$ και $A\Gamma = 4$, να υπολογίσετε το μήκος της διχοτόμου ΓΔ.

3.8. Δίνεται κύκλος κέντρου Κ και μια διάμετρός του ΑΒ. Σχεδιάζουμε ακόμη ένα κύκλο με διάμετρο ΚΑ. Σε τυχαίο σημείο Γ της ΚΑ φέρνουμε κάθετη ευθεία, που τέμνει τον κύκλο διαμέτρου ΚΑ στο Δ και τον κύκλο διαμέτρου ΑΒ στο Ε. Αποδείξτε ότι $AE^2 = 2A\Delta^2$.

3.9. Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα. Αποδείξτε ότι

$$AB^2 + \Gamma\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2.$$

3.10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < A\Gamma$ και ονομάζουμε Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Αποδείξτε ότι $H\Gamma^2 - HB^2 = A\Gamma^2 - AB^2$.

3.11. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ και ύψος ΑΔ. Αν $4AB = 3A\Gamma$, να δείξετε ότι $16\Delta B = 9\Delta\Gamma$.

3.12. Θεωρούμε κύκλο κέντρου Κ, διαμέτρου $AB = 2R$ και δύο κάθετες ακτίνες ΚΓ, ΚΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές των Γ, Δ αντίστοιχα πάνω στην ΑΒ , να δείξετε ότι

α) $K\overset{\triangle}{E}\Gamma = K\overset{\triangle}{Z}\Delta$ και β) $KE^2 + KZ^2 = R^2$.

3.13. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της διαγωνίου του ΒΔ. Να δείξετε ότι $AB^2 - AE^2 = EB \cdot E\Delta$.

3.2 Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο

3.14. Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι $AB = 3$, $B\Gamma = 5$, $A\Gamma = 7$.
α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο και να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{B}$.
β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΒΓ.
γ) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ.

3.15. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $\widehat{A} = 120°$ και $\gamma = 1$.
α) Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ πάνω στην ΑΓ.
β) Να δείξετε ότι $a^2 = \beta^2 + \beta + 1$.

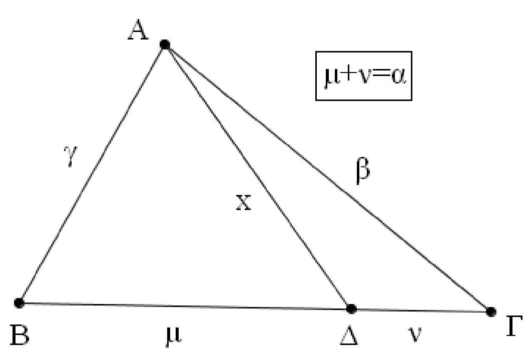
3.16. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ τέτοιες ώστε $\Gamma\Delta = 2AB$. Να δείξετε ότι

$$A\Gamma^2 + B\Delta^2 = B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2.$$

3.17. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους C_1, C_2 με ακτίνες R, r αντίστοιχα και $R > r$. Αν ΑΒ είναι μια διάμετρος του C_2 και Μ ένα σημείο του C_1, να δείξετε ότι

$$MA^2 + MB^2 = 2(R^2 + r^2).$$

3.18. *(Θεώρημα Stewart)* Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ, όπως στο σχήμα που ακολουθεί.



α) Εφαρμόστε το νόμο συνημιτόνων στα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΒΔ για να υπολογίσετε τα β^2 και γ^2 αντίστοιχα.
β) Με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων του (α) να δείξετε ότι:

$$x^2 = \frac{\mu \cdot \beta^2 + \nu \cdot \gamma^2}{a} - \mu \cdot \nu.$$

4 Εμβαδά

4.1 Εμβαδά βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

4.1. Ένα ορθογώνιο με διαστάσεις x, $x+2$ και ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη καθέτων πλευρών x, $6x$ είναι ισεμβαδικά. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου και μήκη των πλευρών του τριγώνου.

4.2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ και ΓΕ. Αν $AB = 5$, $B\Gamma = 8$ και $A\Delta = 4$ να βρείτε το μήκος του ύψους ΓE.

4.3. Ένα τετράγωνο και ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $4cm$ έχουν την ίδια περίμετρο. Να βρείτε το εμβαδό του τετραγώνου.

4.4. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου έχουν μήκη $16cm$ και $12cm$. Να βρείτε το εμβαδό του ρόμβου και μήκος του ύψους από μια κορυφή του.

4.5. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A\Delta = 6$, $\Gamma\Delta = 8$. Φέρνουμε τα ύψη ΑΚ και ΓΛ. Να δείξετε ότι

$$\frac{AK}{\Lambda\Gamma} = \frac{3}{4}.$$

4.6. Ένα παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 48 και το ένα του ύψος είναι διπλάσιο του άλλου. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου.

4.7. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $A\Delta = 3$, $AB = 6$ και σημεία Ε, Ζ στις πλευρές ΑΒ, ΔΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε $\Delta E \parallel BZ$ και $BE = 2$. Να βρείτε την απόσταση των ευθειών ΔΕ, ΒΖ.

4.8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και κύκλος (K, R) που έχει το κέντρο του στην πλευρά ΒΓ και εφάπτεται των πλευρών ΑΒ, ΑΓ. Να δείξετε ότι

$$R(\beta + \gamma) = 2(AB\Gamma).$$

4.9. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ περιγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Κ. Αποδείξτε ότι

$$(KAB) + (K\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

4.10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.
α) Πόσα παραλληλόγραμμα μπορείτε να βρείτε στο σχήμα;
β) Αν $(AB\Gamma) = 20$, να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΔΕΖ.

4.11. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ε της διαγωνίου ΑΓ. Από το Ε φέρνουμε παράλληλες ευθείες προς τις πλευρές του. Αποδείξτε ότι τα παραλληλόγραμμα που βρίσκονται εκατέρωθεν της διαγωνίου ΑΓ είναι ισεμβαδικά.

4.12. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διάμεσό του ΑΔ και τα μέσα Ε, Ζ των τμημάτων ΑΒ, ΑΔ αντίστοιχα. Από το Α φέρνουμε ευθεία ε παράλληλη στην ΒΓ. Αν Η είναι τυχαίο σημείο της ε, να δείξετε ότι

$$(\Delta EZ) = \frac{1}{4}(H\Delta\Gamma).$$

4.13. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ της πλευράς ΑΒ. Να δείξετε ότι

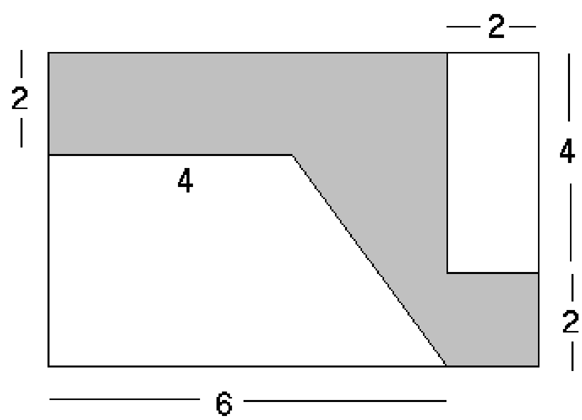
$$(MA\Delta) + (MB\Gamma) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta).$$

4.14. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Μ της διαγωνίου ΑΓ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΜΔΓ είναι ισεμβαδικά.

4.15. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το μέσο Μ της διαγωνίου ΒΔ. Από το Μ φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΓΔ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z)$.

4.16. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και Μ το μέσο της διαμέσου του. Από το Μ φέρνουμε ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΓΔ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $(AEZ\Delta) = (EB\Gamma Z)$.

4.17. Να υπολογίσετε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου μέρους του παρακάτω σχήματος.



4.18. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ. Οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Ε. Αποδείξτε ότι τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΕΑΓ είναι ισεμβαδικά.

4.19. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ, $AB = 4$ και $\widehat{\Gamma} = 30°$. Φέρνουμε τη μεσοκάθετη της ΒΓ η οποία τέμνει την ΒΓ στο Μ και την ΑΓ στο Ν. Υπολογίστε το εμβαδό του τετραπλεύρου ΑΒΜΝ.

4.20. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $\Gamma\Delta = a$, $AB = \beta$ με $a > \beta$. Αν υ είναι το ύψος του τραπεζίου και Κ το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ να δείξετε ότι

$$(K\Delta\Gamma) - (KAB) = \frac{(a-\beta)\upsilon}{2}.$$

4.21. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ, Ε στην πλευρά του ΒΓ τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E < B\Gamma/2$. Η παράλληλη της ΑΒ από το Δ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και οι ΒΖ, ΑΕ τέμνονται στο Η. Να δείξετε ότι $(HAB) = (HE\Gamma Z)$.

4.22. Θεωρούμε τρίγωνο ΜΑΒ και φέρνουμε από το Μ ευθεία ε η οποία δεν τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Παίρνουμε στην ε σημεία Γ, Δ τέτοια ώστε το Μ να είναι το μέσο του ΓΔ. Να δείξετε ότι $(AB\Delta) + (AB\Gamma) = 2(MAB)$.

4.2 Άλλοι τύποι και συμπεράσματα

4.23. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $a = 3$, $\beta = 12$, $\widehat{\Gamma} = 60°$ και είναι ισεμβαδικό με ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ. Να βρείτε το μήκος της πλευράς του ισοπλεύρου τριγώνου.

4.24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 10$ και $B\Gamma = 12$. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ και στη συνέχεια να βρείτε τα μήκη των ακτίνων R, ρ του περιγεγραμμένου και του εγγεγραμμένου κύκλου του ΑΒΓ αντίστοιχα.

4.25. α) Ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει διαγωνίους με μήκη δ_1, δ_2 των οποίων η γωνία είναι ω. Να δείξετε ότι

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\delta_1\delta_2\eta\mu\omega.$$

β) Ένα κυρτό τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχει ίσες διαγωνίους και είναι ισεμβαδικό με τετράγωνο ΙΚΛΜ. Το μήκος της πλευράς του ΙΚΛΜ είναι ίσο με το μισό του μήκους μιας διαγωνίου του ΕΖΗΘ. Να βρείτε την οξεία γωνία των διαγωνίων του ΕΖΗΘ.

4.26. α) Για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β να δείξετε ότι

$$a\beta \leq \left(\frac{a+\beta}{2}\right)^2$$

και να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα.
β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού τριγώνου ΑΒΓ με $AB = 3$, $A\Gamma = 4$.
γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού τριγώνου ΑΒΓ με $AB + A\Gamma = 7$.

4.27. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΔ προς την υποτείνουσα ΒΓ. Αν Ε είναι σημείο της πλευράς ΑΓ και $\Delta E \perp A\Gamma$ να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΑΔΕ είναι όμοια και ακόμη

$$\frac{(A\Delta E)}{(A\Delta\Gamma)} = \frac{\gamma^2}{a^2}.$$

4.28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta = 2\gamma$ και Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ. Παίρνουμε σημείο Δ στην πλευρά ΒΓ τέτοιο ώστε $B\Gamma = 3B\Delta$. Αποδείξτε ότι

$$\text{α) } \frac{(BM\Delta)}{(\Delta M\Gamma)} = \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad \text{β) } \frac{(M\Delta\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{1}{3}.$$

4.29. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = 3$, $B\Gamma = 5$, $A\Gamma = 4$. Κατασκευάζουμε εκτός του τριγώνου τα τετράγωνα ΒΕΔΓ, ΑΓΙΘ και ΒΑΛΚ.
α) Να υπολογίσετε τα εμβαδά των τριγώνων ΒΚΕ, ΓΔΙ και ΑΘΛ.
β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του πολυγώνου ΔΙΘΛΚΕ.

4.30. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ προς το μέρος του Β κατά τμήμα $B\Delta = AB$, την πλευρά ΒΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma E = B\Gamma$ και την πλευρά ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήμα $AZ = \Gamma A$. Να δείξετε ότι

$$(\Delta EZ) = 7(AB\Gamma).$$

5 Κανονικά πολύγωνα και μέτρηση κύκλου

5.1 Κανονικά πολύγωνα

5.1. Αποδείξτε ότι τα μέσα των πλευρών κανονικού εξαγώνου είναι κορυφές κανονικού εξαγώνου.

5.2. Αποδείξτε ότι τα σημεία τομής των διαγωνίων κανονικού πενταγώνου είναι κορυφές κανονικού πενταγώνου.

5.3. Θεωρούμε κανονικό πολύγωνο με ακτίνα $R = 8$ και απόστημα $a_\nu = 4\sqrt{3}$. Να βρείτε την πλευρά του, το πλήθος των κορυφών του και την κεντρική του γωνία.

5.4. Να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με κεντρική γωνία ίση με $80°$.

5.5. Ο λόγος των αποστημάτων δύο κανονικών δεκαγώνων είναι $3/4$. Να βρείτε το λόγο των περιμέτρων και το λόγο των εμβαδών τους.

5.6. Σε κύκλο ακτίνας $R = 3$ είναι εγγεγραμμένο το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και περιγεγραμμένο το ισόπλευρο τρίγωνο ΔΕΖ. Να βρείτε τα μήκη των πλευρών αυτών των τριγώνων.

5.7. Θεωρούμε κύκλο ακτίνας $R = 4$ και τις χορδές του $AB = \lambda_5$, $B\Gamma = \lambda_{20}$. Αποδείξτε ότι $A\Gamma = 4\sqrt{2}$ και $(AB\Gamma) = \frac{\sqrt{2}}{4}\lambda_5\lambda_{20}$.

5.8. Αν a_ν είναι το απόστημα ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R και R' είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο κανονικού ν-γώνου, να δείξετε ότι

$$R' = \frac{R^2}{a_\nu}.$$

5.9. Το κανονικό ν-γωνο Π είναι εγγεγραμμένο, ενώ το κανονικό ν-γωνο Π' περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο ακτίνας R. Αν $(\Pi') = 2(\Pi)$, να δείξετε ότι $\nu = 4$.

5.10. Θεωρούμε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Οι προεκτάσεις των ΑΒ, ΓΔ τέμνονται στο Η. Να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδό του τριγώνου ΗΑΔ.

5.11. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Στην προέκταση της ΑΒ προς το Β παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $B\Delta = 2AB$. Από το Δ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔΕ του κύκλου. Να δείξετε ότι $\Delta E = 3\lambda_4$.

5.12. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Στις προεκτάσεις των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ παίρνουμε τμήματα $BK = \Gamma\Lambda = \Delta M = AN = R\sqrt{3}$. Να δείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο και να βρείτε ως συνάρτηση του R την ακτίνα του περιγεγραμμένου του κύκλου.

5.13. Θεωρούμε κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ του οποίου οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΕ τέμνονται στο Σ.
α) Αποδείξτε ότι $AB \parallel \Gamma E$ και ότι τα τρίγωνα ΑΒΣ και ΣΓΕ είναι όμοια.
β) Αποδείξτε ότι

$$\frac{B\Sigma}{AB} = \frac{E\Sigma}{BE} \qquad \text{και} \qquad \frac{1}{AB} + \frac{1}{BE} = \frac{1}{B\Sigma}.$$

5.2 Μέτρηση κύκλου

5.14. Το μήκος ενός κύκλου είναι ίσο με την περίμετρο ενός τετραγώνου. Αποδείξτε ότι ο κύκλος έχει το μεγαλύτερο εμβαδό.

5.15. Θεωρούμε δύο ομόκεντρους κύκλους C_1, C_2 με ακτίνες R_1, R_2 όπου $R_1 > R_2$. Φέρνουμε χορδή ΑΒ του C_1 η οποία εφάπτεται του C_2 στο Μ. Αποδείξτε ότι το εμβαδό του κυκλικού δακτυλίου που ορίζεται από τους C_1, C_2 είναι ίσο με το εμβαδό κύκλου που έχει ακτίνα το τμήμα ΑΜ.

5.16. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Σχεδιάζουμε με διαμέτρους τις πλευρές του τριγώνου ημικύκλια εκτός αυτού.
α) Αποδείξτε ότι το εμβαδό του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των ημικυκλίων με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ.
β) Εξετάστε αν το μήκος του ημικυκλίου διαμέτρου ΒΓ είναι ίσο με το άθροισμα των μηκών των ημικυκλίων με διαμέτρους ΑΒ, ΑΓ.

5.17. Δίνεται κύκλος (O, R) και μια ακτίνα του ΟΑ. Φέρνουμε τη χορδή ΒΓ κάθετη στην ΟΑ στο μέσο της Μ. Αποδείξτε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$ και να βρείτε το εμβαδό του κυκλικού τμήματος ΒΑΓ.

5.18. Δίνεται κύκλος (O, R) και τα σημεία του Α, Β τέτοια ώστε $A\widehat{O}B = 60°$. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο Α και από το Β κάθετη στην εφαπτομένη που την τέμνει στο Γ. Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ και το εμβαδό του.

5.19. Θεωρούμε κύκλο (O, R) και δύο κάθετες ακτίνες του ΟΑ, ΟΒ. Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε εκτός του κύκλου ημικύκλιο. Να βρείτε το εμβαδό και την περίμετρο του σχηματιζόμενου μηνίσκου.

5.20. Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς a. Με διάμετρο την ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα Δ, Ε αντίστοιχα.
α) Να βρείτε την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΕ.
β) Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται εκτός του τριγώνου.

5.21. Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και σχεδιάζουμε εντός αυτού δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΑΔ, ΓΔ τα οποία τέμνονται στο Ε. Να δείξετε ότι το εμβαδό του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΕΔ είναι ίσο με το $1/4$ του εμβαδού του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

5.22. Θεωρούμε ημικύκλιο με κέντρο Ο και διαμέτρου $AB = 2R$. Στο εσωτερικό του ημικυκλίου γράφουμε τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΟ και ΟΒ και τον κύκλο κέντρου Κ που εφάπτεται στα τρία ημικύκλια.
α) Αποδείξτε ότι η ακτίνα του κύκλου κέντρου Κ είναι $R/3$.
β) Να βρείτε το εμβαδό της επιφάνειας που βρίσκεται εντός του ημικυκλίου διαμέτρου ΑΒ και εκτός των άλλων δύο ημικυκλίων και του κύκλου.