ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Ανέστης Τσομίδης

Αναδρομές μιγαδικών πολυωνυμικών συναρτήσεων - Σύνολα Julia

Διπλωματική Εργασία
για Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στην κατεύθυνση
Θεωρητικά Μαθηματικά

Επιβλέπων: Α. Συσκάκης, Καθηγητής Α.Π.Θ.

Θεσσαλονίκη, 2007

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **2**

2 Παραδείγματα συμπεριφοράς αναδρομών **5**

3 Προκαταρκτικά **20**

4 Γενική θεωρία για τα σύνολα Julia μιγαδικών πολυωνυμικών συναρτήσεων **27**

5 Το σύνολο Mandelbrot **43**

6 Σύνολα Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ και κατάταξή τους με βάση το σύνολο Mandelbrot **55**

7 Μέτρο και διάσταση Hausdorff **67**

8 Χαρακτηρισμός των ψευδόκυκλων από την διάσταση Hausdorff **78**

9 Επιπλέον στοιχεία και συμπεράσματα **82**

10 Βιβλιογραφία **91**

1 Εισαγωγή

Η μελέτη των αναδρομών μιγαδικών συναρτήσεων έχει τις ρίζες της στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα. Στο διάστημα αυτό μαθηματικοί όπως για παράδειγμα οι Schröder και Koenigs ασχολήθηκαν με τη συμπεριφορά μιγαδικών συναρτήσεων κάτω από αναδρομές κοντά σε ένα σταθερό σημείο.

Κατά την διάρκεια της περιόδου 1918-1920 , δύο Γάλλοι μαθηματικοί οι Gaston Julia και Pierre Fatou είδαν τα πράγματα πιο γενικά. Μακριά από τα σταθερά σημεία βρήκαν μια πολύ διαφορετική συμπεριφορά. Μερικές φορές τα αποτελέσματα των αναδρομών ήταν σχετικά σταθερά ενώ άλλες φορές απρόβλεπτα διαφορετικά (ότι ονομάζουμε σήμερα χαοτική συμπεριφορά). Προς τιμήν αυτών των δύο μαθηματικών ονομάζουμε σήμερα το σύνολο των σημείων που μια μιγαδική συνάρτηση συμπεριφέρεται όπως στην πρώτη περίπτωση σύνολο *Fatou* και στην δεύτερη σύνολο *Julia*. Με μια σειρά εργασιών οι Julia και Fatou στην περίοδο αυτή πέτυχαν να περιγράψουν πολλές από τις ιδιότητες αυτών των συνόλων για ρητές συναρτήσεις.

Το κύριο μέρος των εργασιών που εμφανίζεται στις μελέτες των Julia και Fatou πάνω στις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων έχει τις ρίζες του σε δύο λεπτομερείς εργασίες των E. Schröder και A. Cayley πάνω στη μέθοδο του Newton η οποία χρησιμοποιείται για την εύρεση μιγαδικών λύσεων της εξίσωσης $f(z) = 0$ προσεγγιστικά. Η μέθοδος αυτή παράγει προσεγγίσεις μιας ρίζας ρ ως εξής : Ξεκινάμε από μια αρχική τιμή z_0 κοντά στη ρ. Συνεχίζουμε εφαρμόζοντας διαδοχικά τον τύπο

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Έτσι δημιουργούμε μια ακολουθία προσεγγίσεων $\{z_n\}$ της ρ, η οποία μπορεί να συγλίνει ή όχι στη ρ.

Αν θεωρήσουμε ένα πολυώνυμο $p(z)$ βαθμού $n \geq 3$ με ρίζες

$z_1, z_2, ..., z_n$ και θέσουμε

$$A(z_i) = \{z \in \mathbb{C} \quad : \quad f^{\kappa}(z) \to z_i\}$$

όπου

$$f(z) = z - \frac{p(z)}{p'(z)}$$

είναι η συνάρτηση της μεθόδου του Newton τότε μπορεί κάποιος να παρατηρήσει ότι τα σύνολα $A(z_i)$ είναι αρκετά "πεπλεγμένα" στο μιγαδικό επίπεδο και μάλιστα έχουν κοινό σύνορο

$$\partial A(z_1) = \partial A(z_2) = ... = \partial A(z_n) = J(f)$$

με $J(f)$ το σύνολο Julia της f.

Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι πολύ γειτονικά σημεία που χρησιμοποιούνται ως αρχικές τιμές της μεθόδου μπορούν να οδηγήσουν σε διαφορετικές ρίζες της $p(z)$.

Η παρούσα εργασία διαπραγματεύεται κυρίως τα σύνολα Julia τα οποία εμφανίζονται σε σχέση με τις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής. Αποτελούν δε χαρακτηριστικό παράδειγμα για το πώς μια απλή διαδικασία όπως για παράδειγμα οι αναδρομές της $f(z) = z^2 + i$ μπορεί να οδηγήσει σε σύνολα, η αναπαράσταση των οποίων είναι εξαιρετικά περίπλοκη.

Πολλές φορές λοιπόν τέτοιες διαδικασίες οδηγούν σε σχήματα που ονομάζονται fractals. Τα σχήματα αυτά διέπονται από άπειρη λεπτομέρεια σε οσοδήποτε μικρό κομμάτι τους, συνήθως έχουν αυτοομοιότητα (τουλάχιστον κατά προσέγγιση) και η κλασική γεωμετρική γλώσσα δεν είναι σε θέση να τα περιγράψει αποτελεσματικά.

Δεν υπάρχει αυτή τη στιγμή ένας καθολικά αποδεκτός ορισμός για το πότε ένα σχήμα είναι fractal και αυτό διότι όλοι οι ορισμοί που προτάθηκαν απέκλειαν ορισμένα σχήματα που με βάση τα παραπάνω χαρακτηριστικά θα έπρεπε να θεωρηθούν ως fractals. Αυτός που έχει επικρατήσει είναι αυτός που είχε δώσει ο Mandelbrot στον οποίο χρησιμοποιείται η έννοια του μέτρου και της διάστασης Hausdorff. Σύμφωνα λοιπόν με τον Mandelbrot:
Fractal είναι ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου η διάσταση Hausdorff είναι γνήσια μεγαλύτερη της τοπολογικής του διάστασης.

Στην παρούσα εργασία αρχικά δίνονται μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα αναδρομών τα οποία μας προετοιμάζουν για τα παρακάτω. Στη συνέχεια εξετάζονται πολυωνυμικές συναρτήσεις οι οποίες λόγω της ολομορφίας τους στο μιγαδικό επίπεδο μας δίνουν το δικαίωμα να χρησιμοποιήσουμε πολύ ισχυρά θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης όπως τα θεωρήματα του Montel και Weierstrass και έτσι να πάρουμε αρκετές πληροφορίες για τα σύνολα Julia.

Μια κατάταξη των συνόλων Julia μπορεί να επιτευχθεί με το λεγόμενο σύνολο Mandelbrot το οποίο στην εργασία αυτή θα μελετηθεί για δευτεροβάθμιες πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται αναλυτικά οι έννοιες του μέτρου και της διάστασης Hausdorff οι οποίες αποτελούν σημαντικά εργαλεία για τη μελέτη θεμάτων που σχετίζονται με τα σύνολα Julia και γενικότερα με τη γεωμετρία των fractals. Ακολουθεί ως εφαρμογή ένα ειδικό θέμα που αναφέρεται στο χαρακτηρισμό από τη διάσταση Hausdorff ορισμένων συνόλων που ονομάζονται ψευδόκυκλοι (αρκετές φορές τα σύνολα Julia είναι ψευδόκυκλοι).

Στο τέλος της εργασίας αυτής παρουσιάζονται συνοπτικά επιπλέον στοιχεία και συμπεράσματα, τα οποία είναι χρήσιμα για οποιονδήποτε θα ήθελε να εμβαθύνει περισσότερο σε θέματα σχετικά με τις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων.

2 Παραδείγματα συμπεριφοράς αναδρομών

Στην παρούσα ενότητα δίνονται παραδείγματα αναδρομών και της συμπεριφοράς τους, που έχουν ως στόχο την εξοικείωση του αναγνώστη με την έννοια της αναδρομής, των φαινομένων καθώς και ερωτημάτων που προκύπτουν από αυτήν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3}{2}x(1-x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}x^2 \quad \text{με} \quad x \in [0,1].$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ακριβώς τιμές του x τέτοιες ώστε $f(x) = x$ (σταθερά σημεία) οι οποίες είναι οι 0 και $\frac{1}{3}$. Επίσης η f έχει μέγιστο το $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{8}$ και είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.
Θα εξετάσουμε τη συμπεριφορά της ακολουθίας $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ των αναδρομών της f για διάφορες αρχικές τιμές στο [0,1], όπου

$$f^{\varkappa} = f \circ f \circ \cdots \circ f \qquad (\varkappa \text{ φορές})$$

για $\kappa \geq 2$, $f^1 = f$ και $f^0 = I$ όπου I η ταυτοτική συνάρτηση.
Για $x_0 = 0$ είναι $f(x_0) = 0$ και $f^n(x_0) = 0$ για κάθε φυσικό n, δηλαδή η τροχιά του 0 μέσω της f

$$\mathcal{O}_f(0) = \{0, f(0), f^2(0), ...\} = \{0, 0, 0, ...\}$$

είναι σταθερή.
Για $x_0 = 1$ είναι $f(x_0) = 0$ και $f^n(x_0) = 0$ για κάθε θετικό ακέραιο n, δηλαδή η τροχιά του 1 μέσω της f είναι

$$\mathcal{O}_f(1) = \{1, f(1), f^2(1), ...\} = \{1, 0, 0, ...\}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι για κάθε $x_0 \in (0,1)$ η τροχιά

$$\mathcal{O}_f(x_0) = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), ...\}$$

σταθεροποιείται στην τιμή $\frac{1}{3}$ δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} f^n(x) = \frac{1}{3}.$$

Για τυχόν $x_0 \in (0, \frac{1}{3})$ θεωρούμε την ακολουθία $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ των αναδρομών της f. Η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι φραγμένη άνω από το $\frac{1}{3}$.

Πράγματι είναι $x_0 < \frac{1}{3}$. Έστω $f^n(x_0) < \frac{1}{3}$. Θα δείξουμε ότι $f^{n+1}(x_0) < \frac{1}{3}$. Είναι

$$f^{n+1}(x_0) < \frac{1}{3} \Leftrightarrow f(f^n(x_0)) < \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}(f^n(x_0))^2 - \frac{3}{2}f^n(x_0) + \frac{1}{3} > 0$$

το οποίο αληθεύει αφού $f^n(x_0) < \frac{1}{3}$.
Επίσης η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι γνησίως αύξουσα αφού

$$f^{n+1}(x_0) > f^n(x_0) \Leftrightarrow \frac{3}{2}f^n(x_0) - \frac{3}{2}(f^n(x_0))^2 > f^n(x_0) \Leftrightarrow f^n(x_0) < \frac{1}{3}$$

το οποίο αληθεύει. Συνεπώς η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ ως γνησίως αύξουσα και φραγμένη άνω συγκλίνει σε αριθμό

$$\ell = \lim f^{n+1}(x_0) = \lim f^n(x_0).$$

Επειδή

$$f^{n+1}(x_0) = \frac{3}{2}f^n(x_0) - \frac{3}{2}(f^n(x_0))^2$$

παίρνοντας όρια προκύπτει

$$\ell = \frac{3}{2}\ell - \frac{3}{2}\ell^2 \Leftrightarrow \ell = \frac{1}{3}$$

το οποίο είναι σταθερό σημείο της f.

Αν $x_0 \in (\frac{2}{3}, 1)$ τότε $f(x_0) \in (0, \frac{1}{3})$ οπότε αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση και είναι $f^n(x_0) \to \frac{1}{3}$ με $n \to \infty$.

Έστω τώρα $x_0 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Αν $f^n(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ θα δείξουμε ότι $f^{n+1}(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

Πράγματι αφού $f^n(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ είναι

$$f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) \in (\frac{1}{3}, \frac{3}{8}) \subset (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}).$$

Δηλαδή για κάθε φυσικό n είναι $f^n(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.
Η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ είναι και γνησίως φθίνουσα αφού

$$f^{n+1}(x_0) < f^n(x_0) \Leftrightarrow \frac{3}{2}f^n(x_0) - \frac{3}{2}(f^n(x_0))^2 < f^n(x_0) \Leftrightarrow f^n(x_0) > \frac{1}{3}$$

το οποίο αληθεύει. Έτσι η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ ως γνησίως φθίνουσα και φραγμένη κάτω θα συγκλίνει σε αριθμό

$$\ell' = \lim f^{n+1}(x_0) = \lim f^n(x_0).$$

Επειδή

$$f^{n+1}(x_0) = \frac{3}{2}f^n(x_0) - \frac{3}{2}(f^n(x_0))^2$$

παίρνοντας όρια προκύπτει

$$\ell' = \frac{3}{2}\ell' - \frac{3}{2}\ell'^{\,2} \Leftrightarrow \ell' = \frac{1}{3}.$$

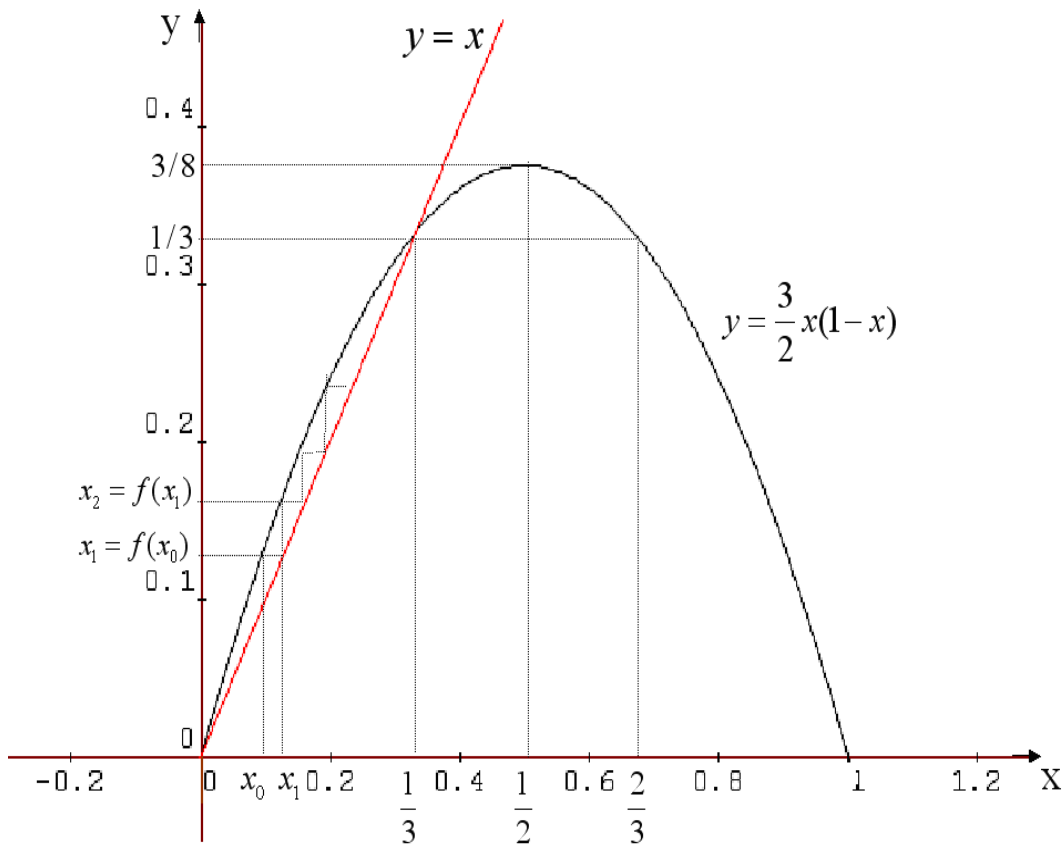
Στην περίπτωση που είναι $x_0 = \frac{1}{3}$ τότε για κάθε φυσικό n είναι

$$f^n(x_0) = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3}$$

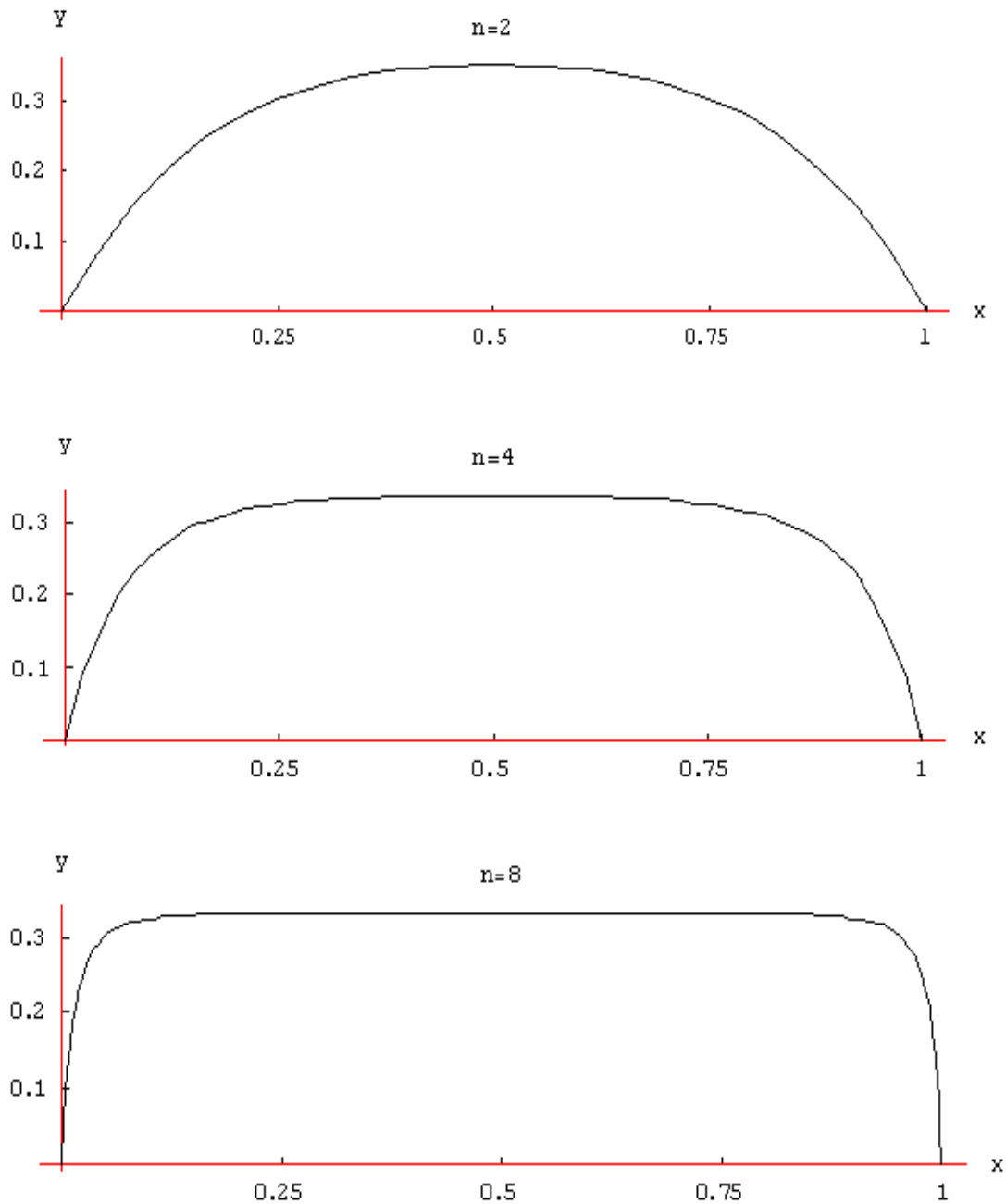
ενώ αν $x_0 = \frac{2}{3}$ είναι $f(x_0) = \frac{1}{3}$ οπότε όπως πριν

$$f^n(x_0) \to \frac{1}{3}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι για τυχόν $x_0 \in (0,1)$ η ακολουθία των αναδρομών $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{3}$ που είναι σταθερό σημείο της f.



ΣΧΗΜΑ 1. Γραφική επαλήθευση της σύγκλισης της ακολουθίας των αναδρομών της f για $x_0 \in (0, \frac{1}{3})$. Ξεκινώντας από το x_0 και ακολουθώντας την πολυγωνική γραμμή που είναι εγλωβισμένη μεταξύ της παραβολής και της διχοτόμου της πρώτης γωνίας των αξόνων, πλησιάζουμε τελικά οσοδήποτε κοντά στο $\xi = \frac{1}{3}$.



ΣΧΗΜΑ 2. Οι γραφικές παραστάσεις των f^2, f^4, f^8, όπου μπορεί κάποιος να διαπιστώσει την παραπάνω σύγκλιση της ακολουθίας των αναδρομών της f για κάθε αρχική τιμή στο $(0, 1)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$f(x) = cx(1-x)\ ,\ \text{όπου}\ c = 1+\sqrt{5}\ ,\ \text{με}\ x \in [0,1].$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει ως ρίζες τους αριθμούς 0 και $1 - \frac{1}{c}$. Θα αναζητήσουμε αριθμούς που να είναι ρίζες της $f(f(x)) = x$, αλλά όχι και της $f(x) = x$ (2-περιοδικά σημεία). Η εξίσωση $f(f(x)) = x$ έχει ως προφανείς ρίζες τις ρίζες της $f(x) = x$, οπότε γράφεται

$$x(x-1+\frac{1}{c})(-c^3x^2 + (c^3+c^2)x - (c^2+c)) = 0$$

η οποία έχει ως ρίζες τους αριθμούς

$$0\ ,\ 1-\frac{1}{c}\ ,\ \frac{c+1+\sqrt{c^2-2c-3}}{2c}\ ,\ \frac{c+1-\sqrt{c^2-2c-3}}{2c}$$

ή επειδή $c = 1+\sqrt{5}$

$$0\ ,\ \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} \simeq 0,809.$$

Ως λοιπόν 2-περιοδικά σημεία της f λαμβάνουμε τους αριθμούς

$$\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1+\sqrt{5}}{4} \simeq 0,809.$$

Η συμπεριφορά τώρα των αναδρομών της f για διάφορα σημεία του [0,1] διαφέρει από αυτήν του παραδείγματος 1. Παρατηρούμε ότι $f(\frac{1}{2}) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ και $f(\frac{1+\sqrt{5}}{4}) = \frac{1}{2}$. Γενικότερα τώρα η $\{f^n(x)\}$ έχει 2 σημεία συσσώρευσης για κάθε αρχική τιμή x στο $[0,1]$ εκτός από αριθμήσιμο πλήθος σημείων του $[0,1]$. Τα εξαιρέσιμα αυτά σημεία είναι τα σταθερά σημεία της f καθώς και οι προεικόνες τους, δηλαδή τιμές $x_0 \in [0,1]$ για τις οποίες υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $f^n(x_0) = \sigma$, όπου σ σταθερό σημείο της f.

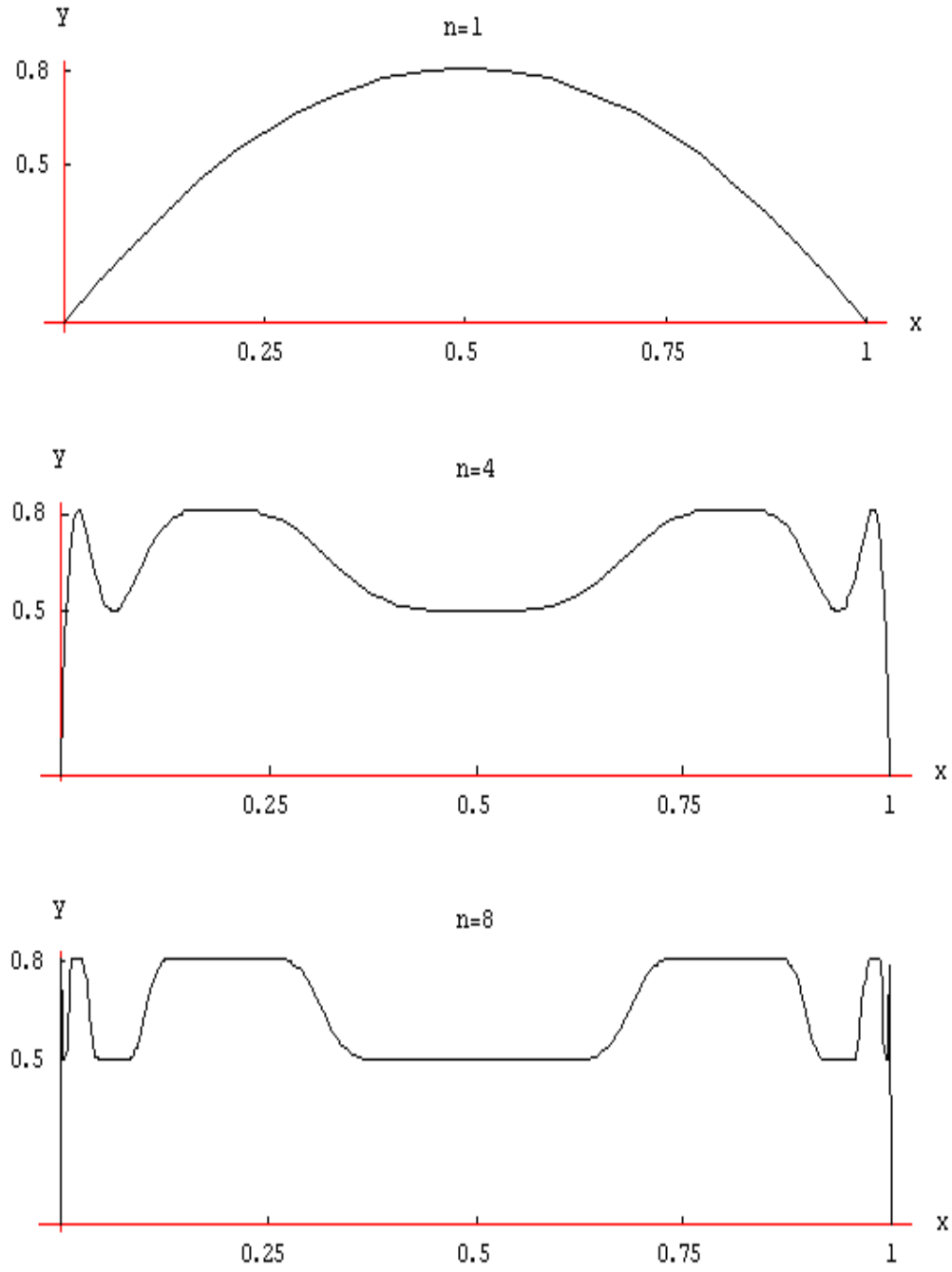
Στον πίνακα που ακολουθεί βλέπουμε τη συμπεριφορά αυτή για διάφορες τιμές του [0,1].

x_0	0	0,2	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$f(x_0)$	0	0,517771	0,776656	0,809017	0,776656	0,517771	0
$f^2(x_0)$	0	0,807995	0,561333	0,5	0,561333	0,807995	0
$f^3(x_0)$	0	0,502041	0,796844	0,809017	0,796844	0,502041	0
$f^4(x_0)$	0	0,809004	0,523867	0,5	0,523867	0,809004	0
$f^5(x_0)$	0	0,500027	0,807174	0,809017	0,807174	0,500027	0
$f^6(x_0)$	0	0,809017	0,503676	0,5	0,503676	0,809017	0
$f^7(x_0)$	0	0,5	0,808973	0,809017	0,808973	0,5	0
$f^8(x_0)$	0	0,809017	0,500087	0,5	0,500087	0,809017	0

Παρατηρούμε ότι αν η αρχική τιμή είναι το 0, τότε η τροχιά είναι σταθερή.
Αν η αρχική τιμή είναι το 1, τότε η πρώτη αναδρομή είναι ίση με 0, όπως και όλες οι επόμενες.
Στις περιπτώσεις που έχουμε αρχική τιμή κάποιον από τους αριθμούς

$$0,2 \quad , \quad 0,4 \quad , \quad 0,5 \quad , \quad 0,6 \quad , \quad 0,8$$

βλέπουμε ότι η ακολουθία των αναδρομών της f δεν έχει κάποιο όριο αλλά έχει δύο σημεία συσσωρεύσεως, τα 2-περιοδικά σημεία της f.



ΣΧΗΜΑ 3. Οι γραφικές παραστάσεις των f, f^4, f^8.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3. Το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ είναι υποσύνολο του διαστήματος [0,1] και κατασκευάζεται ως εξής:
Κόβουμε το [0,1] σε 3 ίσα κομμάτια και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο δηλαδή το $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Στη συνέχεια κόβουμε τα εναπομείναντα διαστήματα $[0, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{3}, 1]$ πάλι σε 3 ίσα κομμάτια και αφαιρούμε το μεσαίο τρίτο δηλαδή τα $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ και $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. Κάνουμε το ίδιο στα εναπομείναντα διαστήματα και συνεχίζουμε τη διαδικασία αυτή μέχρι το άπειρο. Το $\mathcal{C}$ είναι το σύνολο που απομένει μετά τις άπειρες αυτές επαναλήψεις. Αν $\mathcal{C}_0 = [0,1]$, $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \bigcup [\frac{2}{3}, 1]$ κ.τ.λ. τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_n.$$

Στο παράδειγμα αυτό θα δούμε πως μπορεί να οριστεί το $\mathcal{C}$ μέσω των αναδρομών μιας συγκεκριμένης συνάρτησης. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|) = \begin{cases} 3(1-x) & , x \geq \frac{1}{2} \\ 3x & , x < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = \frac{1}{2}$ και παρουσιάζει μέγιστο το $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$.
Αν $x_0 < 0$ τότε

$$f^n(x_0) = 3^n x_0 \to -\infty.$$

Αν $x_0 > 1$ τότε $f(x_0) < 0$ οπότε πάλι $f^n(x_0) \to -\infty$ αφού αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.
Αν $x_0 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ τότε $f(x_0) > 1 \Rightarrow f(f(x_0)) < 0$, οπότε πάλι $f^n(x_0) \to -\infty$,

δηλαδή για το μεσαίο τρίτο $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ του [0,1] η $\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$ έχει όριο το $-\infty$.

Το ίδιο συμβαίνει και για τα μεσαία τρίτα των διαστημάτων $[0, \frac{1}{3}]$,$[\frac{2}{3}, 1]$ που απέμειναν, δηλαδή για τα

$$(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \quad \text{και} \quad (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}).$$

Αν $x_0 \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ τότε $f(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, επομένως $f^n(x_0) \to -\infty$.

Αν $x_0 \in (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ τότε επειδή το διάστημα αυτό είναι το συμμετρικό του $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$ ως προς το $\frac{1}{2}$ και η γραφική παράσταση της f είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $x = \frac{1}{2}$ είναι πάλι $f(x_0) \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, επομένως $f^n(x_0) \to -\infty$.

Γενικότερα τώρα συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή, θα διαπιστώσουμε ότι η εικόνα κάθε μεσαίου τρίτου μέσω της f είναι ένα άλλο μεσαίο τρίτο της προηγούμενης γενιάς, οπότε οι αντίστοιχες αναδρομές της f θα έχουν όριο το $-\infty$. Για τη γενική περίπτωση θέτουμε

$$A_1 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = A_{11}$$
$$A_2 = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \bigcup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9}) = A_{21} \bigcup A_{22}$$

και για την m γενιά

$$A_m = A_{m1} \bigcup A_{m2} \bigcup ... \bigcup A_{m2^{m-1}}.$$

όπου A_{mj} με $j = 1, 2, ..., 2^{m-1}$ είναι τα μεσαία τρίτα που αφαιρούνται στο στάδιο m.

Παρατηρούμε ότι είναι $f(A_{21}) = f(A_{22}) = A_1$, η εικόνα καθενός από τα $A_{31}, A_{32}, A_{33}, A_{34}$ μέσω της f, είναι κάποιο από τα A_{21}, A_{22} και γενικότερα για κάθε $j = 1, 2, ..., 2^{m-1}$

$$f(A_{mj}) = A_{(m-1)\,\kappa} \quad \text{για κάποιο} \quad \kappa = 1, 2, ..., 2^{m-2}.$$

Έστω

$$f^{m-1}(A_{mj}) = A_1 \text{ για } j = 1, 2, ..., 2^{m-1}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$f^m(A_{(m+1)\,j}) = A_1 \text{ για } j = 1, 2, ..., 2^m.$$

Πράγματι έχουμε

$$f^m(A_{(m+1)\,j}) = f^m(f^{-1}(A_{mi})) = f^{m-1}(A_{mi}) = A_1$$

για κάποιο $i = 1, 2, ..., 2^{m-1}$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για τυχαίο θετικό ακέραιο n και τυχαίο $x \in \mathcal{C}$ ισχύει

$$f^n(x) \in [0,1].$$

Θα εργαστούμε με απαγωγή σε άτοπο. Έστω ότι $f^n(x) < 0$ ή $f^n(x) > 1$. Τότε

$$f^{n-1}(x) < 0 \text{ ή } f^{n-1}(x) > 1 \text{ ή } f^{n-1}(x) \in A_1$$

άρα

$$f^{n-2}(x) < 0 \text{ ή } f^{n-2}(x) > 1 \text{ ή } f^{n-2}(x) \in A_1 \text{ ή } f^{n-2}(x) \in A_{21} \bigcup A_{22} = A_2$$

και συνεχίζοντας ανάλογα προκύπτει τελικά ότι

$$x < 0 \text{ ή } x > 1 \text{ ή } x \in A_1 \text{ ή } x \in A_2 \text{ ή } .... \text{ ή } x \in A_n$$

δηλαδή

$$x \in (-\infty, 0) \bigcup (1, +\infty) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right).$$

Επειδή για $m \geq 1$ είναι $\mathcal{C}_m = [0,1] \setminus (A_1 \bigcup ... \bigcup A_m)$ και απ΄ όπου

$$\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,,$$

προκύπτει ότι το x δεν ανήκει στο $\mathcal{C}$, πράγμα άτοπο.

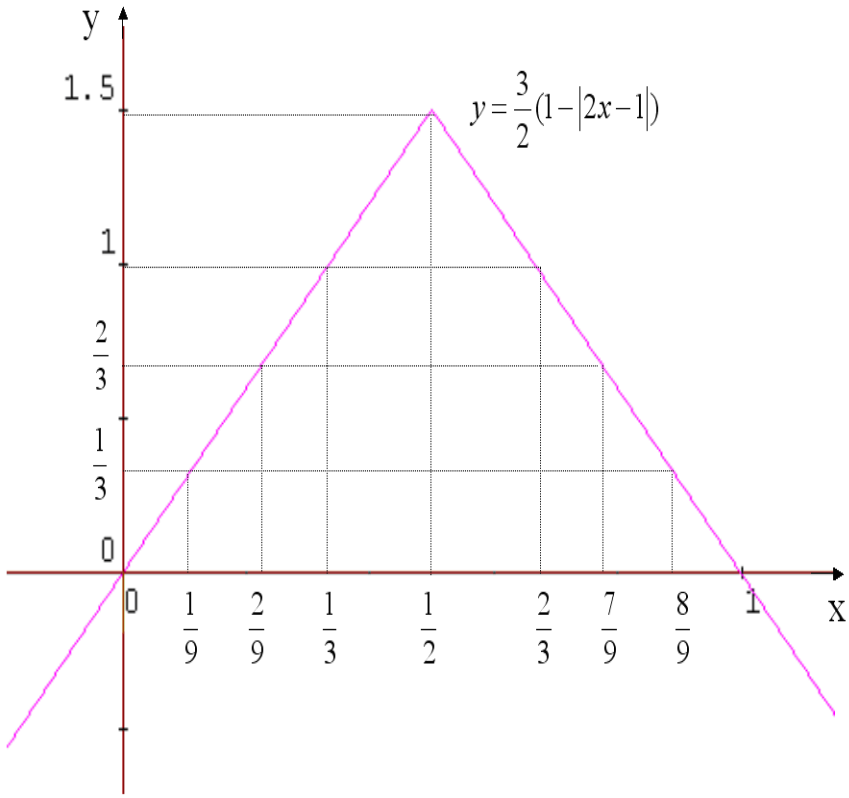
Για κάθε $x \in \mathcal{C}$ είναι $f(x) \in \mathcal{C}$, διότι αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν συμβαίνει, τότε το $f(x)$ θα ανήκει σε κάποιο μεσαίο τρίτο άρα οι αντίστοιχες αναδρομές θα έχουν όριο το $-\infty$, πράγμα άτοπο αφού για κάθε θετικό ακέραιο n και τυχαίο $x \in \mathcal{C}$ ισχύει $f^n(x) \in [0,1]$. Επομένως για κάθε $x \in \mathcal{C}$ ισχύει $\mathcal{O}_f(x) \subset \mathcal{C}$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ μπορεί να οριστεί και ως το συμπλήρωμα ως προς $\mathbb{R}$ του συνόλου

$$A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f^n(x) \to -\infty\}$$

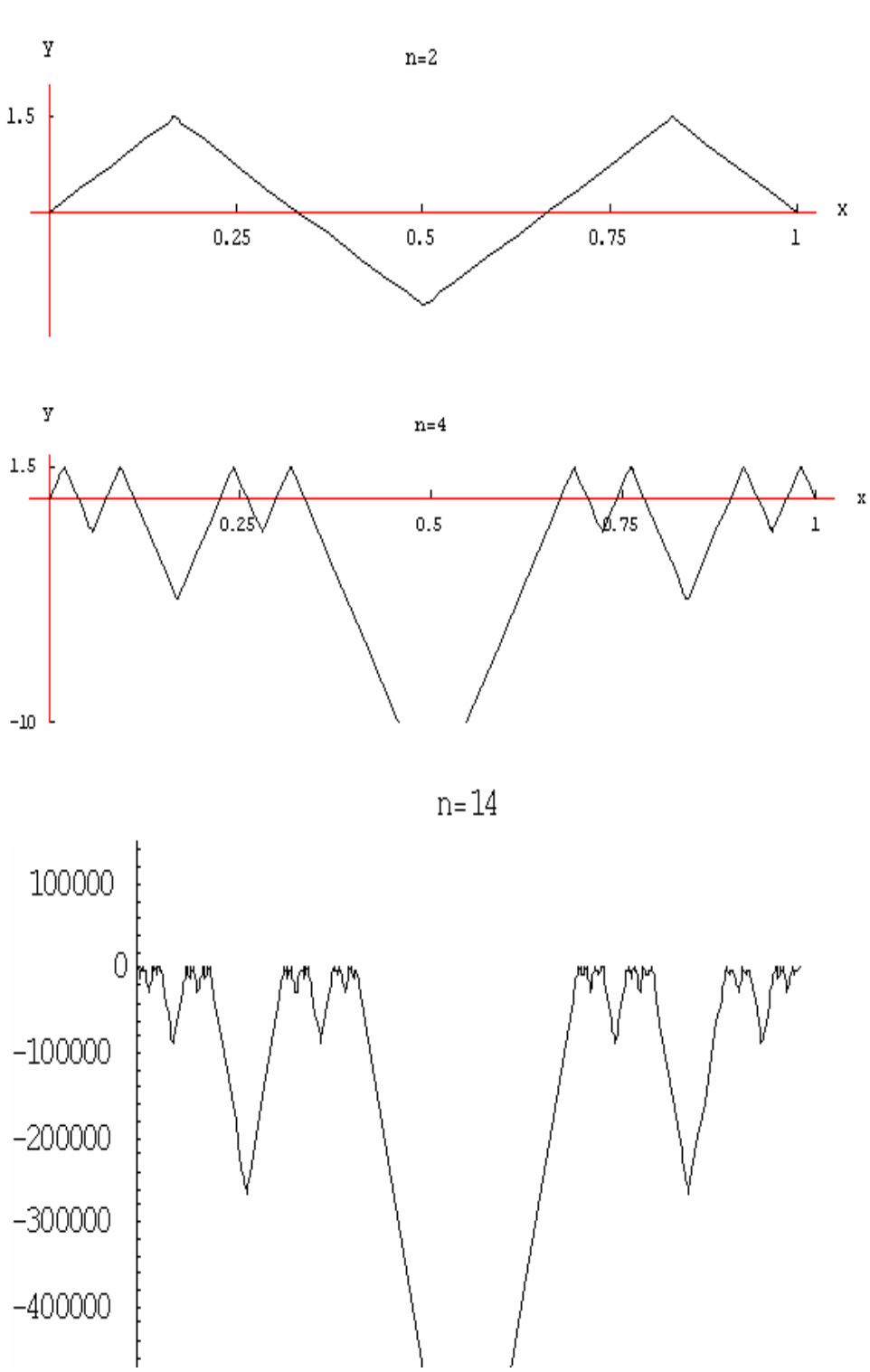
δηλαδή είναι

$$\mathcal{C} = \mathbb{R} \setminus A = \{x \in \mathbb{R} \ : \ f^n(x) \text{ φραγμένη}\}.$$



ΣΧΗΜΑ 4. Το σύνολο του Cantor μπορεί να οριστεί μέσω των αναδρομών της

$$f(x) = \frac{3}{2}(1 - |2x - 1|).$$



ΣΧΗΜΑ 5. Οι γραφικές παραστάσεις των f^2, f^4, f^{14}.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4. Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^2$ με πεδίο ορισμού τον μοναδιαίο κύκλο $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $z_0 \in D$ τέτοιο ώστε η τροχιά $\mathcal{O}_f(z_0)$ να είναι πυκνή στο D.

Επειδή $|f(z)| = |z|^2 = 1$ και $\arg f(z) = 2 \arg z \ (mod\, 2\pi)$ η μελέτη της $f(z) = z^2$ στο D ανάγεται στη μελέτη της συνάρτησης $g(\theta) = 2\theta \ (mod\, 2\pi)$ με $\theta \in [0, 2\pi)$. Αν θέσουμε $\frac{\theta}{2\pi} = a$, τελικά προκύπτει ότι η μελέτη της $f(z) = z^2$ στο D ανάγεται στη μελέτη της συνάρτησης

$$r(a) = 2a \ (mod\, 1) \ , \ a \in [0, 1).$$

Κάθε αριθμός $a \in [0, 1)$ έχει μια αναπαράσταση στο δυαδικό σύστημα της μορφής

$$a = a_1 2^{-1} + a_2 2^{-2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i}$$

με $a_i \in \{0, 1\}$. Η ακολουθία $(a_1, a_2, \cdots)$ καθορίζει πλήρως τον α και συμβολίζουμε τον a με $(a_1, a_2, \cdots)$.

Παρατηρούμε ότι αν $a_1 = 1$ τότε $a \geq \frac{1}{2}$ άρα $2a \geq 1$ οπότε

$$r(a) = 2a - 1 = (1 \cdot 2^0 + a_2 2^{-1} + \cdots) - 1 = (a_2, a_3, \cdots)$$

ενώ αν $a_1 = 0$ τότε $a < \frac{1}{2}$ άρα $2a < 1$ οπότε

$$r(a) = 2a = 0 \cdot 2^0 + a_2 2^{-1} + \cdots = (a_2, a_3, \cdots).$$

Έπεται λοιπόν ότι για κάθε $a = (a_1, a_2, \cdots) \in [0, 1)$ έχουμε

$$r(a_1, a_2, \cdots) = (a_2, a_3, \cdots).$$

Θεωρούμε τον αριθμό

$$\overline{a} = (\underbrace{0, 1,}_{\text{1-ομάδα}} \underbrace{0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 1,}_{\text{2-ομάδα}} \underbrace{0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 1, \cdots}_{\text{3-ομάδα}}, \cdots)$$

ο οποίος κατασκευάζεται γράφοντας μια ακολουθία από 0 και 1 με τον εξής τρόπο: γράφουμε πρώτα όλους τους δυνατούς συνδυασμούς

μονοψήφιων δυαδικών με αύξουσα τάξη (1-ομάδα), στη συνέχεια όλους τους δυνατούς συνδυασμούς διψήφιων δυαδικών με αύξουσα τάξη (2-ομάδα), έπειτα όλους τους δυνατούς συνδυασμούς τριψήφιων δυαδικών με αύξουσα τάξη (3-ομάδα), κ.τ.λ. Είναι φανερό ότι αν εφαρμόσουμε n φορές την r στο $\overline{a}$ απαλείφουμε τα n πρώτα ψηφία από 0 και 1 που εμφανίζονται στον ορισμό του $\overline{a}$. Θα δείξουμε ότι η τροχιά $\mathcal{O}_r(\overline{a})$ είναι πυκνή στο $[0,1)$.

Έστω τυχόν $\overline{b} = (b_1, b_2, \cdots) \in [0,1)$, όπου $b_i = 0$ ή $b_i = 1$ για κάθε θετικό ακέραιο i. Από την κατασκευή του $\overline{a}$ είναι φανερό ότι για κάθε θετικό ακέραιο κ, μπορούμε να βρούμε κ-άδα διαδοχικών ψηφίων στον ορισμό του $\overline{a}$ στην κ-ομάδα, η οποία να συμπίπτει με τα κ πρώτα ψηφία του $\overline{b}$. Αν m είναι το πλήθος των ψηφίων στον ορισμό του $\overline{a}$ που εμφανίζονται πριν την κ-άδα αυτή, η αναδρομή $r^m(\overline{a})$ θα συμπίπτει με τον $\overline{b}$ στα κ πρώτα ψηφία. Άρα η διαφορά $r^m(\overline{a}) - \overline{b}$ θα είναι σε απόλυτη τιμή

$$|r^m(\overline{a}) - \overline{b}| \leq \frac{1}{2^{\kappa+1}}.$$

Για τυχόν $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε θετικό ακέραιο κ τέτοιο ώστε $\frac{1}{2^{\kappa+1}} < \varepsilon$ οπότε

$$|r^m(\overline{a}) - \overline{b}| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει αναδρομή $r^m(\overline{a})$ τέτοια ώστε η απόλυτη τιμή της διαφοράς $r^m(\overline{a}) - \overline{b}$ να γίνεται οσοδήποτε μικρή και συνεπώς η τροχιά $\mathcal{O}_r(\overline{a})$ είναι πυκνή στο $[0,1)$.

3 Προκαταρκτικά

Συμβολίζουμε με $\mathbb{C}$ το μιγαδικό επίπεδο και με $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$ το επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο (σφαίρα του Riemann). Επίσης συμβολίζουμε με $B(\alpha, r)$ τον ανοιχτό δίσκο κέντρου α και ακτίνας r δηλαδή

$$B(\alpha, r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - \alpha| < r\}.$$

Αρχή του ταυτισμού για ολόμορφες συναρτήσεις:

ΘΕΩΡΗΜΑ 1. Έστω D τόπος στο $\mathbb{C}$ (ανοικτό και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{C}$) και f, g ολόμορφες συναρτήσεις στο D τέτοιες ώστε $f(z) = g(z)$ για κάθε $z \in S$, όπου $S \subset D$ και το S έχει σημείο συσσώρευσης μέσα στο D. Τότε

$$f(z) = g(z) \quad \forall z \in D.$$

Για μια απόδειξη βλέπε [1].

Τοπικά ομοιόμορφη σύγκλιση ολόμορφων συναρτήσεων:

ΟΡΙΣΜΟΣ 1. Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και μια ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων $f_n \ : \ U \to \mathbb{C}$. Έστω επίσης $f \ : \ U \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση. Λέμε ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f **τοπικά ομοιόμορφα** αν η $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του U.

Αυτό σημαίνει ότι για κάθε συμπαγές $K \subset U$ και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει δείκτης $n_0 = n_0(K, \varepsilon)$ ώστε

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \qquad \text{για} \quad n > n_0 \quad \text{και} \quad z \in K.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2. (σύγκλισης του Weierstrass) Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $f_n \ : \ U \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο U σε μια

συνάρτηση f. Τότε :
(α) η f είναι ολόμορφη στο U
(β) Για κάθε $\kappa = 1, 2, 3, ...$ η ακολουθία $\{f_n^{(\kappa)}\}_{n=1}^{\infty}$ των κ-τάξεως παραγώγων συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στην $f^{(\kappa)}$ στο U.
Για μια απόδειξη βλέπε [1].

ΘΕΩΡΗΜΑ 3. Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και μια ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων $f_n : U \to \mathbb{C}$ η οποία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο U είτε σε μια πεπερασμένη ολόμορφη συνάρτηση είτε στο ∞. Τότε το ίδιο συμβαίνει και για την ακολουθία $g_n = h \circ f_n$ για κάθε πολυώνυμο h.

Κανονικές οικογένειες:

ΟΡΙΣΜΟΣ 2. (Βλέπε [12]) Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Μια οικογένεια ολόμορφων συναρτήσεων

$$\mathcal{F} = \{g : U \to \mathbb{C}\}$$

λέγεται **κανονική** στο U εάν κάθε ακολουθία $\{g_n\}$ από την $\mathcal{F}$ έχει υπακολουθία $\{g_{n_\kappa}\}$ η οποία συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο U είτε σε μια πεπερασμένη αναλυτική συνάρτηση h είτε στο ∞.

Σημειώνεται ότι η συνάρτηση h είναι αναγκαστικά ολόμορφη αλλά δεν ανήκει υποχρεωτικά στην $\mathcal{F}$.

Λέμε ακόμη ότι η $\mathcal{F}$ είναι **κανονική** στο $z \in U$ εάν υπάρχει ανοιχτό υποσύνολο του U, έστω V, με $z \in V$ έτσι ώστε η $\mathcal{F}$ να είναι κανονική στο V.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4. (Montel, Μορφή 1η. Βλέπε [A].) Έστω U ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και $\mathcal{F} = \{g : U \to \mathbb{C}\}$ οικογένεια ολόμορφων συναρτήσεων. Τότε η $\mathcal{F}$ είναι κανονική οικογένεια αν και μόνο αν είναι τοπικά φραγμένη.

Σημειώνεται ότι τοπικά φραγμένη σημαίνει ότι για κάθε συμπαγές

$K \subset U$ υπάρχει $M = M(K)$ ώστε

$$|g(z)| \leq M \qquad \forall\, g \in \mathcal{F}\,,\ \forall\, z \in K.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5. (Montel, Μορφή 2η) Έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια ολόμορφων συναρτήσεων στο ανοιχτό σύνολο U. Εάν η $\mathcal{F}$ δεν είναι κανονική οικογένεια τότε κάθε $w \in \mathbb{C}$ εκτός ίσως από ένα, είναι τιμή κάποιας $g \in \mathcal{F}$ για κάποιο $z \in\ U$.

Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχουν δύο σημεία $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ τα οποία δεν είναι τιμές καμιάς $g \in \mathcal{F}$ τότε η $\mathcal{F}$ είναι κανονική οικογένεια. Για μια απόδειξη βλέπε [22].

Στην παρούσα εργασία θα χρησιμοποιηθεί η 2η μορφή του θεωρήματος του Montel.

Σταθερά και περιοδικά σημεία:

Έστω $f\ :\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Γράφουμε

$$f^{\varkappa} = f \circ f \circ \cdots \circ f \qquad (\varkappa \text{ φορές})$$

για $\kappa \geq 2$. Θέτουμε $f^1 = f$ και $f^0 = I$ όπου I η ταυτοτική συνάρτηση.
Η $f^{\varkappa}$ ονομάζεται **κ-οστή αναδρομή** της f όπου $\kappa = 0, 1, 2, ...$ Για $z \in \mathbb{C}$ η **τροχιά** του z μέσω της f ορίζεται να είναι το σύνολο

$$\mathcal{O}_f(z) = \{z, f(z), f^2(z), ..., f^{\kappa}(z), ...\}$$

Ορίζουμε επίσης για $z \in \mathbb{C}$

$$f^{-1}(z) = \{\zeta \in \mathbb{C}\ :\ f(\zeta) = z\}$$

και επαγωγικά

$$\begin{aligned} f^{-\kappa}(z) &= \{\zeta \in \mathbb{C}\ :\ f(\zeta) \in f^{-(\kappa-1)}(z)\} \\ &= \{\zeta \in \mathbb{C}\ :\ f^{\kappa}(\zeta) = z\} \end{aligned}$$

Αν η f είναι 1-1 τότε το σύνολο

$$\{\cdots, f^{-2}(z), f^{-1}(z), z, f(z), f^2(z), \cdots\}$$

είναι η **πλήρης τροχιά** του z μέσω της f, ενώ στην γενική περίπτωση που η f δεν είναι 1-1 τότε μπορούμε να βρούμε, ανάλογα με τον αριθμό των ριζών των εξισώσεων της μορφής $f(\zeta) = z$, παραπάνω από ένα κλάδους της τροχιάς με τους ίδιους αρνητικούς δείκτες.

ΟΡΙΣΜΟΣ 3. Ένα σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ λέγεται **περιοδικό σημείο** της f αν υπάρχει θετικός ακέραιος p ώστε

$$f^p(z_0) = z_0.$$

Ο ελάχιστος τέτοιος θετικός ακέραιος λέγεται **περίοδος** του z_0 για την f.

Στην ειδική περίπτωση που ισχύει

$$f(z_0) = z_0$$

το z_0 λέγεται **σταθερό σημείο** της f.

Παρατηρούμε ότι αν το z_0 είναι περιοδικό σημείο περιόδου p τότε η τροχιά του z_0 μέσω της f είναι

$$\mathcal{O}_f(z_0) = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), ..., f^{p-1}(z_0)\}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 4. Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ περιοδικό σημείο της f περιόδου $p \geq 1$. Η τιμή

$$\lambda = (f^p)'(z_0)$$

ονομάζεται **πολλαπλασιαστής** (multiplier) της f στο z_0. Το σημείο z_0 λέγεται:

(α) **ελκτικό** (attractive) αν $0 \leq |\lambda| = |(f^p)'(z_0)| < 1$,
(β) **ουδέτερο** (indifferent) αν $|\lambda| = |(f^p)'(z_0)| = 1$,
(γ) **απωθητικό** (repelling) αν $|\lambda| = |(f^p)'(z_0)| > 1$.

Ως πρώτο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(z) = z^2 + \frac{7}{2}z + \frac{3}{2}\,.$$

Τα σταθερά σημεία της f βρίσκονται από τη λύση της εξίσωσης

$$f(z) = z \Leftrightarrow z^2 + \frac{5}{2}z + \frac{3}{2} = 0$$

η οποία έχει ως λύσεις τους αριθμούς $-\frac{3}{2}$ και -1. Ακόμη

$$f'(z) = 2z + \frac{7}{2}$$

οπότε βρίσκουμε :
(α) $|f'(-\frac{3}{2})| = \frac{1}{2} < 1$, συνεπώς το $-\frac{3}{2}$ είναι ελκτικό σταθερό σημείο της f.
(β) $|f'(-1)| = \frac{3}{2} > 1$, συνεπώς το -1 είναι απωθητικό σταθερό σημείο της f.

Ως δεύτερο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την συνάρτηση:

$$f(z) = z^3 + z\,.$$

Είναι $f'(z) = 3z^2 + 1$ και επειδή $f(0) = 0$, $|f'(0)| = 1$ το 0 είναι σταθερό ουδέτερο σημείο της f.

Ακόμη έχουμε

$$f^2(z) = f(f(z)) = (z^3 + z)^3 + z^3 + z = z^9 + 3z^7 + 3z^5 + 2z^3 + z$$

και

$$(f^2)'(z) = 9z^8 + 21z^6 + 15z^4 + 6z^2 + 1.$$

Είναι $f(\sqrt{2}\,i) = -\sqrt{2}\,i \neq \sqrt{2}\,i$ άρα το $\sqrt{2}\,i$ δεν είναι σταθερό σημείο. Όμως είναι περιοδικό με περίοδο 2 αφού $f^2(\sqrt{2}\,i) = \sqrt{2}\,i$. Επιπλέον $|(f^2)'(\sqrt{2}\,i)| = 25 > 1$, άρα το $\sqrt{2}\,i$ είναι περιοδικό απωθητικό σημείο της f με περίοδο 2.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5. Έστω w ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f. Ονομάζουμε **λεκάνη έλξης** (basin of attraction) του w το σύνολο

των μιγαδικών z των οποίων οι αναδρομές μέσω της f συγκλίνουν στο w , δηλαδή το σύνολο:

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, f^{\kappa}(z) \to w \text{ όταν } \kappa \to \infty\}.$$

Ακόμη ορίζουμε:

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} \,:\, f^{\kappa}(z) \to \infty \text{ όταν } \kappa \to \infty\}.$$

Παρατηρούμε ότι το ∞ είναι πάντοτε ελκτικό σημείο για πολυώνυμα.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση με τύπο $f(z) = -z^3$. Τότε βρίσκουμε ότι τα σταθερά σημεία της f είναι οι αριθμοί 0 , i , $-i$. Είναι: $f'(z) = -3z^2$ οπότε βρίσκουμε $|f'(0)| = 0 < 1$ και $|f'(\pm i)| = 3 > 1$, συνεπώς μόνο το 0 είναι ελκτικό σταθερό σημείο ενώ τα $i, -i$ είναι απωθητικά. Παρατηρούμε ότι

$$f^{\kappa}(z) = (-1)^{\kappa} z^{3^{\kappa}}$$

επομένως

$$f^{\kappa}(z) \longrightarrow 0 \quad \text{για} \quad |z| < 1$$

ενώ

$$f^{\kappa}(z) \longrightarrow \infty \quad \text{για} \quad |z| > 1.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$A(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

και

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 6. Έστω w ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f ή το ∞. Τότε το $A(w)$ είναι ανοιχτό.

Απόδειξη. Προφανώς το w ανήκει στο $A(w)$ αφού $f^{\kappa}(w) = w \to w$ όταν $\kappa \to \infty$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει ανοιχτό σύνολο V με $w \in V$ και $V \subset A(w)$. Πράγματι θέτοντας $\ell = f'(w)$, έχουμε $|\ell| < 1$. Για

δοθέν $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε z με $|z - w| < \delta$ να ισχύει

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{z - w} - \ell \right| < \varepsilon,$$

άρα

$$|f(z) - f(w)| < (\varepsilon + |\ell|)|z - w|\,.$$

Θέτουμε $V = \{z \,:\, |z - w| < \delta\}$. Εκλέγοντας $\varepsilon = \frac{1-|\ell|}{2}$ έχουμε $\varepsilon + |\ell| < 1$, οπότε από την προηγούμενη σχέση προκύπτει

$$|f(z) - w| = |f(z) - f(w)| < 1 \cdot \delta = \delta.$$

Κάνουμε την επαγωγική υπόθεση $|f^\kappa(z) - w| < \delta$ και έχουμε

$$\begin{aligned} |f^{\kappa+1}(z) - w| &= |f(f^\kappa(z)) - f(w)| \\ &< (\varepsilon + |\ell|)|f^\kappa(z) - w| \\ &< 1 \cdot \delta \\ &= \delta, \end{aligned}$$

δηλαδή $|f^\kappa(z) - w| < \delta$ για κάθε κ και κάθε $z \in V$.

Επαγωγικά θέτοντας όπου z το $f(z)$, λαμβάνοντας υπόψιν ότι το w είναι σταθερό σημείο για την f, παίρνουμε

$$|f^\kappa(z) - w| < (\varepsilon + |\ell|)^\kappa |z - w|, \quad z \in V.$$

Επειδή $(\varepsilon + |\ell|)^\kappa \to 0$, καθώς $\kappa \to \infty$ έχουμε $f^\kappa(z) \to w$. Άρα $z \in A(w)$, οπότε $V \subset A(w)$.

Έστω τυχόν $z \in A(w)$. Τότε για κάποιο κ θα είναι $f^\kappa(z) \in V$ άρα $z \in (f^\kappa)^{-1}(V)$ το οποίο είναι ανοιχτό (ως αντίστροφη εικόνα ανοιχτού) υποσύνολο του $A(w)$. Έτσι το $A(w)$ είναι ανοιχτό.

Αν $w = \infty$, εργαζόμαστε όμοια θεωρώντας το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > r\}$ για αρκετά μεγάλο r.

4 Γενική θεωρία για τα σύνολα Julia μιγαδικών πολυωνυμικών συναρτήσεων

Η παρακάτω θεωρητική ανάπτυξη βασίζεται στο βιβλίο του K. Falconer *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, κεφάλαιο 14. Στο εξής θα θεωρούμε μόνο πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F} = \{f^\kappa \ : \ \kappa = 0, 1, 2, ...\}$$

των αναδρομών της f και ορίζουμε το σύνολο

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ η οικογένεια } \mathcal{F} \text{ δεν είναι κανονική στο } z \ \}.$$

Το συμπλήρωμα του $J_0(f)$ το συμβολίζουμε με $F_0(f)$, δηλαδή

$$F_0(f) = \mathbb{C} \setminus J_0(f).$$

Ισοδύναμα

$$F_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{υπάρχει } V_z \text{ ανοιχτό, } z \in \ V_z \, , \mathcal{F} \text{ κανονική στο } V_z\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in V_z$ η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο w άρα $V_z \subset F_0(f)$ και

$$F_0(f) = \bigcup_{z \in F_0(f)} V_z.$$

Έπεται ότι το $F_0(f)$ είναι ανοικτό σύνολο ως ένωση ανοικτών και επομένως το $J_0(f)$ είναι κλειστό σύνολο.

Για μια f όπως παραπάνω θεωρούμε επίσης το σύνολο

$$A_p = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ περιοδικό σημείο της } f \text{ περιόδου } p \, , |(f^p)'(z)| > 1\}$$

και την ένωση

$$A = \bigcup_{p=1}^{\infty} A_p$$

δηλαδή το σύνολο όλων των απωθητικών περιοδικών σημείων της f.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6. Η κλειστή θήκη του A ονομάζεται **σύνολο Julia** της f και το συμβολίζουμε $J(f)$, δηλαδή

$$J(f) = \overline{A}\,.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 7. Το συμπλήρωμα του $J(f)$ ονομάζεται **σύνολο Fatou** της f και το συμβολίζουμε $F(f)$, δηλαδή

$$F(f) = \mathbb{C} \setminus J(f)\,.$$

Θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των συνόλων $J_0(f)$ και $F_0(f)$ με χρήση των κανονικών οικογενειών και θα δείξουμε τελικά ότι

$$J_0(f) = J(f) \quad \text{και} \quad F_0(f) = F(f)\,.$$

Επειδή θα εργαστούμε με ακολουθίες από την οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι χρήσιμη η παρακάτω παρατήρηση. Μια ακολουθία από την οικογένεια $\mathcal{F}$ ενδέχεται να μην είναι υπακολουθία της $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ δεδομένου π.χ. ότι μπορεί να είναι της μορφής $\{f^{100}, f^{110}, f^{20}, f^{25}, ...\}$. Όμως κάθε ακολουθία (α) από την $\mathcal{F}$ περιέχει υπακολουθία, που είναι και υπακολουθία της $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$. Πράγματι έστω κ ο δείκτης του πρώτου όρου της (α), διαλέγω $g_1 = f^{\kappa}$ και στη συνέχεια επιλέγω $g_2 = f^{\lambda}$ όπου λ είναι ο μικρότερος δείκτης όρων της (α) ώστε $\lambda > \kappa$ και συνεχίζουμε παρόμοια. Έτσι κατασκευάζεται ακολουθία $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ που είναι υπακολουθία της $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 7. Το σύνολο $J_0(f)$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Όπως είδαμε προηγουμένως το $J_0(f)$ είναι κλειστό. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το $J_0(f)$ είναι και φραγμένο. Επειδή η f είναι βαθμού τουλάχιστον 2 το πηλίκο του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(z)$ προς το z θα είναι μονώνυμο βαθμού τουλάχιστον 1, οπότε

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \xrightarrow{z\to\infty} +\infty$$

άρα υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε z με $|z| \geq r$ να έχουμε

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| \geq 2\,,$$

ισοδύναμα $|f(z)| \geq 2|z|$. Από την τελευταία επαγωγικά προκύπτει

$$|f^\kappa(z)| > 2^\kappa r \quad \text{για } |z| > r, \ \kappa = 1, 2, 3, ... \tag{1}$$

Πράγματι για $\kappa = 1$ είναι $|f(z)| \geq 2|z| > 2r$ και υποθέτοντας ότι $|f^n(z)| > 2^n r$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f^{n+1}(z)| &= |f(f^n(z))| \\ &\geq 2|f^n(z)| \qquad\qquad (\text{αφού } |f^n(z)| > 2^n r > r) \\ &> 2 \cdot 2^n r \\ &= 2^{n+1} r \end{aligned}$$

που αποδεικνύει την (1). Συνεπώς

$$f^\kappa(z) \stackrel{\kappa \to \infty}{\longrightarrow} \infty\,, \text{ για } |z| > r.$$

Άρα η $\mathcal{F} = \{f^\kappa\}$ είναι κανονική στο $V = \{z : |z| > r\}$, οπότε $V \subset F_0(f)$ και επομένως το $J_0(f) = \mathbb{C} \setminus F_0(f)$ είναι φραγμένο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 8. Το σύνολο $J_0(f)$ είναι μη κενό.

Απόδειξη. Έστω ότι $J_0(f) = \emptyset$. Τότε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ η $\{f^\kappa\}$ είναι κανονική στο z, οπότε η $\{f^\kappa\}$ είναι κανονική στον ανοιχτό δίσκο $B(0, r)$ για κάθε $r > 0$. Η f έχει σταθερό σημείο αφού η εξίσωση $f(w) = w$ ισοδύναμα $f(w) - w = 0$, είναι πολυωνυμική στο $\mathbb{C}$ βαθμού τουλάχιστον 2, άρα έχει λύση.

Εκλέγοντας $\rho_1 > |w_0|$, όπου w_0 μια από τις ρίζες της $f(w) - w = 0$ συμπεραίνουμε ότι η f έχει σταθερό σημείο σε κάθε ανοιχτό δίσκο με κέντρο 0 και ακτίνα τουλάχιστον ρ_1. Στην απόδειξη του θεωρήματος 7 βρήκαμε ότι υπάρχει $\rho_2 > 0$ τέτοιο ώστε $f^\kappa(z) \to \infty$ ομοιόμορφα στο ανοιχτό $V = \{z : |z| > \rho_2\}$.

Επιλέγουμε z_0 με $|z_0| > \rho_2$, οπότε $f^\kappa(z_0) \to \infty$. Αν $r > \max\{\rho_1, |z_0|\}$ τότε στο δίσκο $B(0, r)$ υπάρχουν τα σημεία w_0, z_0 και ισχύει

$$f^\kappa(z_0) \to \infty\,, \quad f^\kappa(w_0) = w_0 \quad \text{για κάθε } \kappa.$$

Τότε όμως δεν είναι δυνατόν μια υπακολουθία της $\{f^\kappa\}$ να συγκλίνει ούτε σε πεπερασμένη αναλυτική συνάρτηση, αλλά ούτε και στην συνάρτηση ∞, άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 9. Το $J_0(f) = J_0$ παραμένει αναλλοίωτο μέσω των f και f^{-1}, δηλαδή

$$J_0 = f(J_0) = f^{-1}(J_0)\,.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι

$$f^{-1}(F_0) \subset F_0.$$

Η f είναι συνεχής και το F_0 ανοικτό άρα και το $f^{-1}(F_0)$ ανοικτό. Θα δείξουμε ότι η $\mathcal{F} = \{f^\kappa\}$ είναι κανονική στο $f^{-1}(F_0)$. Έστω $\{f^{\kappa_\lambda}\}$ ακολουθία από την $\mathcal{F}$. Η ακολουθία $\{f^{\kappa_\lambda - 1}\}$ έχει υπακολουθία $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu} - 1}\}$ που συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του F_0. Έστω G συμπαγές υποσύνολο του $f^{-1}(F_0)$. Λόγω συνέχειας της f το $f(G)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του F_0 άρα η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu} - 1}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $f(G)$.

Θέτουμε $g = \lim_\mu f^{\kappa_{\lambda_\mu} - 1}$. Τότε είτε g παντού πεπερασμένη συνάρτηση στο $f(G)$ είτε $g \equiv \infty$. Αν g παντού πεπερασμένη τότε για $\varepsilon > 0$ υπάρχει M_0 ώστε

$$\left| f^{\kappa_{\lambda_\mu} - 1}(w) - g(w) \right| < \varepsilon \quad \forall w \in f(G) \quad \text{και} \quad \mu > M_0.$$

Αλλά $w = f(z)$, $z \in G$, οπότε

$$|f^{\kappa_{\lambda_\mu}}(z) - g(f(z))| < \varepsilon \quad \text{για} \quad z \in G \quad \text{και} \quad \mu > M_0$$

άρα $f^{\kappa_{\lambda_\mu}} \to g \circ f$ ομοιόμορφα στο G. Αν $g \equiv \infty$, με ανάλογο τρόπο έπεται ότι $f^{\kappa_{\lambda_\mu}} \to \infty$ ομοιόμορφα στο G. Δηλαδή η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}}\}$ συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο $f^{-1}(F_0)$, άρα η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο $f^{-1}(F_0)$, οπότε $f^{-1}(F_0) \subset F_0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι

$$F_0 \subset f^{-1}(F_0).$$

Για $z \in F_0$ η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο z. Αρκεί να δειχθεί ότι η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο $f(z) = w$.

Η εξίσωση $f(\zeta) = w$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεις. Μπορούμε να βρούμε ένα μικρό δίσκο γύρω από κάθε λύση ώστε οι δίσκοι να μην τέμνονται μεταξύ τους. Έστω D ο δίσκος που αντιστοιχεί στη λύση $\zeta = z$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο z υπάρχει U ανοικτή περιοχή του z στην οποία η $\mathcal{F}$ είναι κανονική. Αφού η f είναι αναλυτική, μη σταθερή, η εικόνα $V = f(U \bigcap D)$ είναι ανοικτό και περιέχει το $w = f(z)$.

Έστω $\{f^{\kappa_\lambda}\}$ υπακολουθία της $\{f^{\kappa}\}$. Η ακολουθία $\{f^{\kappa_\lambda+1}\}$ έχει υπακολουθία $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}+1}\}$ που συγλίνει στα συμπαγή υποσύνολα του $U \bigcap D$. Θα δείξουμε ότι η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του V.

Έστω $G \subset V$ συμπαγές. Το $\Gamma = f^{-1}(G) \bigcap (U \bigcap D)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $U \bigcap D$ άρα η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}+1}\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο Γ. Αν το όριο $g = \lim_\mu f^{\kappa_{\lambda_\mu}+1}$ είναι παντού πεπερασμένη συνάρτηση στο Γ, τότε η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}+1}\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στο Γ, δηλαδή για $\varepsilon > 0$ υπάρχει M ώστε

$$\left| f^{\kappa_{\lambda_\mu}+1}(\zeta) - f^{\kappa_{\lambda_\nu}+1}(\zeta) \right| < \varepsilon \quad \text{για } \zeta \in \Gamma, \quad \mu, \nu > M.$$

Έπεται ότι

$$|f^{\kappa_{\lambda_\mu}}(w) - f^{\kappa_{\lambda_\nu}}(w)| < \varepsilon \quad \text{για } w = f(\zeta) \in G, \quad \mu, \nu > M.$$

Επομένως η $\{f^{\kappa_{\lambda_\mu}}\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy άρα συγκλίνει ομοιόμορφα στο G. Στην περίπτωση που $g \equiv \infty$ η απόδειξη είναι ανάλογη. Έχουμε λοιπόν $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$.

Έχουμε δείξει ότι $f^{-1}(F_0) \subset F_0$ και $F_0 \subset f^{-1}(F_0)$. Έπεται ότι $F_0 \subset f(F_0)$, $f(F_0) \subset F_0$ και η απόδειξη είναι πλήρης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 10. Για κάθε $p \geq 1$ ισχύει $J_0(f) = J_0(f^p)$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$F_0(f) = F_0(f^p).$$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $F_0(f) \subset F_0(f^p)$. Έστω τυχόν ανοιχτό σύνολο V και $\{f^\kappa\}$ κανονική στο V. Θα δείξουμε ότι η $\{f^{\kappa p}\} = \{(f^p)^\kappa\}$ είναι κανονική στο V. Κάθε υπακολουθία της $\{f^{\kappa p}\}$ είναι και υπακολουθία της $\{f^\kappa\}$ οπότε ως τέτοια λόγω κανονικότητας της $\{f^\kappa\}$ θα συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο V. Επομένως η $\{f^{\kappa p}\}$ είναι κανονική στο V.

Για την $F_0(f^p) \subset F_0(f)$ παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η f^n γράφεται

$$f^n = f^{\kappa p + r}$$

όπου $\kappa \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ και $r \in \{0, 1, ..., p-1\}$ (τα κ και r εξαρτώνται από το n). Έστω $\{f^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ ακολουθία από την $\mathcal{F} = \{f^n\}$. Υπάρχει τουλάχιστον ένα r_0 μεταξύ των $0, 1, 2, ..., p-1$ ώστε άπειροι όροι της $\{f^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ να περιέχονται στην $\{f^{\kappa p + r_0}\}_{\kappa=1}^\infty$. Αυτό είναι εύκολα κατανοητό με την διάταξη που ακολουθεί, όπου επειδή έχουμε p στήλες και άπειρους όρους της ακολουθίας $\{f^{m_i}\}_{i=1}^\infty$, μία τουλάχιστον στήλη θα περιέχει άπειρους όρους αυτής.

$$\begin{array}{ccccc} & f & f^2 & \dots & f^{p-1} \\ f^p & f^{p+1} & f^{p+2} & \dots & f^{2p-1} \\ f^{2p} & f^{2p+1} & f^{2p+2} & \dots & f^{3p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Έστω $V \subset F_0(f^p)$, δηλαδή η $\{f^{\kappa p}\}_{\kappa=1}^\infty$ είναι κανονική στο V. Από το θεώρημα 3 η $\{f^{\kappa p + r_0}\}_{\kappa=1}^\infty = \{f^{r_0} \circ f^{\kappa p}\}_{\kappa=1}^\infty$ θα είναι κανονική στο V. Άρα η ακολουθία των άπειρων όρων της $\{f^{m_i}\}_{i=1}^\infty$ που περιέχονται στην $\{f^{\kappa p + r_0}\}_{\kappa=1}^\infty$ θα συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στο V άρα η $\mathcal{F}$ είναι κανονική στο V, δηλαδή $F_0(f^p) \subset F_0(f)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 11. Έστω $w \in J_0(f)$ και U περιοχή του w. Τότε:
(α) Το

$$W \equiv \bigcup_{\kappa=1}^\infty f^\kappa(U)$$

είναι όλο το $\mathbb{C}$ εκτός ίσως από ένα σημείο u.
(β) Το εξαιρετέο σημείο u (αν υπάρχει) δεν ανήκει στο $J_0(f)$ και

είναι ανεξάρτητο των w, U.

Απόδειξη.
(α) Από τον ορισμό του $J_0(f)$ η $\{f^\kappa\}$ δεν είναι κανονική στο w, οπότε το

$$W \equiv \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^\kappa(U) = f(U) \bigcup f^2(U) \bigcup \cdots$$

είναι όλο το $\mathbb{C}$ εκτός ίσως από ένα σημείο u, σύμφωνα με το Θεώρημα Montel.
(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει το εξαιρετέο σημείο u. Παρατηρούμε ότι

$$f(W) = f\left(\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^\kappa(U)\right) = \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{\kappa+1}(U) \subset \bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^\kappa(U) = W,$$

δηλαδή

$$f(W) \subset W. \tag{1}$$

Συμβολίζουμε με m το βαθμό της πολυωνυμικής συνάρτησης f. Αν z είναι ρίζα της $f(z) = u$, τότε επειδή το u δεν ανήκει στο W θα έχουμε επίσης ότι το z δεν θα ανήκει στο W λόγω της (1). Έπεται ότι $z = u$ είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης, αναγκαστικά πολλαπλότητας m. Θα έχουμε λοιπόν

$$f(z) - u = c(z-u)^m$$

για κάποια σταθερά $c \neq 0$. Τότε

$$\begin{aligned} f^2(z) - u = f(f(z)) - u &= c(f(z)-u)^m \\ &= c\left(c(z-u)^m\right)^m = c^{m+1}(z-u)^{m^2}. \end{aligned}$$

Ακόμη

$$\begin{aligned} f^3(z) - u = f(f^2(z)) - u &= c(f^2(z)-u)^m \\ &= c\left(c^{m+1}(z-u)^{m^2}\right)^m = c^{m^2+m+1}(z-u)^{m^3} \end{aligned}$$

και επαγωγικά,

$$f^\kappa(z) - u = c^{m^{\kappa-1}+m^{\kappa-2}+\cdots+m+1}(z-u)^{m^\kappa},\ \kappa = 1, 2, 3, ...$$

Επομένως

$$\begin{aligned}|f^\kappa(z)-u| &= |c|^{m^{\kappa-1}+m^{\kappa-2}+\cdots+m+1}|z-u|^{m^\kappa}\\ &= |c|^{\frac{m^\kappa-1}{m-1}}|z-u|^{m^\kappa}\\ &= |c|^{\frac{-1}{m-1}}\left(|c|^{\frac{1}{m-1}}|z-u|\right)^{m^\kappa}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για τα z εκείνα για τα οποία ισχύει $|z-u|<|c|^{\frac{-1}{m-1}}$ θα έχουμε

$$|c|^{\frac{1}{m-1}}|z-u|<1$$

άρα για $z\in B\left(u,|c|^{\frac{-1}{m-1}}\right)$ θα έχουμε $|f^\kappa(z)-u|\to 0$ καθώς $\kappa\to\infty$, άρα

$$f^\kappa(z)\overset{\kappa\to\infty}{\longrightarrow} u\,,\quad z\in B\left(u,|c|^{\frac{-1}{m-1}}\right).$$

Έπεται ότι η $\mathcal{F}=\{f^\kappa\}$ είναι κανονική στο u, άρα το u δεν ανήκει στο $J_0(f)$.

Τέλος το u εξαρτάται μόνο από την f διότι

$$u=\lim_{\kappa\to\infty}f^\kappa(z)$$

για z στο δίσκο $B\left(u,|c|^{\frac{-1}{m-1}}\right)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 12.
(α) Έστω U ανοιχτό σύνολο με $U\bigcap J_0(f)\neq\emptyset$. Τότε για κάθε $z\in\mathbb{C}$, με μια το πολύ εξαίρεση, το σύνολο $f^{-\kappa}(z)$ τέμνει το U για άπειρους το πλήθος ακεραίους κ.
(β) Για κάθε $z\in J_0(f)$ έχουμε

$$J_0(f)=\overline{\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}f^{-\kappa}(z)}\quad.$$

Απόδειξη.
(α) Από το προηγούμενο θεώρημα, θέτοντας $W=\bigcup_{\kappa=1}^{\infty}f^\kappa(U)$, θα έχουμε $W=\mathbb{C}$ είτε $W=\mathbb{C}\backslash\{u\}$. Επομένως αν $z\in W$ τότε υπάρχει ακέραιος κ_1 και $\zeta_1\in U$ με $f^{\kappa_1}(\zeta_1)=z$ δηλαδή $\zeta_1\in f^{-\kappa_1}(z)\bigcap U$.

Παρατηρούμε ότι αφού $f(W) \subset W$ θα έχουμε $f^{\kappa}(W) \subset W$ για κάθε φυσικό κ, επομένως $\zeta_1 \in W$. Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα βρίσκουμε ακέραιο ν_1 και $\zeta_2 \in U$ ώστε $f^{\nu_1}(\zeta_2) = \zeta_1$. Αν $\kappa_2 = \kappa_1 + \nu_1$ θα έπρεπε $\zeta_2 \in f^{-\kappa_2}(z) \bigcap U$ και $\zeta_2 \in W$. Συνεχίζοντας επαγωγικά κατασκευάζουμε ακολουθία φυσικών $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \cdots$ ώστε

$$f^{-\kappa_j}(z) \bigcap U \neq \emptyset \ , \ j = 1, 2, \cdots$$

(β) Από το θεώρημα 9 έχουμε

$$f^{-\kappa}(z) \subset J_0(f) \ , \ \kappa = 1, 2, \cdots$$

άρα η ένωση $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)$ περιέχεται στο $J_0(f)$. Αφού το $J_0(f)$ είναι κλειστό θα έχουμε επίσης

$$\overline{\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)} \subset J_0(f).$$

Αντίστροφα, έστω $w \in J_0(f)$. Το z δεν είναι το εξαιρετέο σημείο u (αν υπάρχει τέτοιο) γιατί το u δεν ανήκει στο $J_0(f)$ ενώ το z ανήκει στο $J_0(f)$. Άρα για κάθε περιοχή U του w υπάρχει κ με $f^{-\kappa}(z) \bigcap U \neq \emptyset$. Επομένως το σύνολο $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)$ τέμνει κάθε περιοχή του w, δηλαδή το w είναι σημείο συσσώρευσης του $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)$, συνεπώς $w \in \overline{\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)}$. Έπεται ότι

$$J_0(f) \subset \overline{\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^{-\kappa}(z)}$$

δηλαδή το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 13. Για κάθε πολυωνυμική συνάρτηση f, το $J_0(f)$ έχει κενό εσωτερικό.

Απόδειξη. Έστω ότι το $J_0(f)$ έχει μη κενό εσωτερικό. Αν U ανοιχτό με $U \subset J_0(f)$ θα έχουμε

$$f(U) \subset f(J_0(f)) = J_0(f)$$

άρα επαγωγικά $f^\kappa(U) \subset J_0(f)$ για κάθε $\kappa \geq 1$, επομένως

$$\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^\kappa(U) \subset J_0(f)$$

το οποίο όμως είναι άτοπο γιατί από το θεώρημα 11 το σύνολο $\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f^\kappa(U)$ είναι όλο το $\mathbb{C}$ (εκτός ίσως ενός σημείου) οπότε το $J_0(f)$ δεν θα ήταν φραγμένο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 14. Το $J_0(f)$ δεν περιέχει απομονωμένα σημεία (και επομένως είναι υπεραριθμήσιμο).

Απόδειξη. Έστω $z \in J_0(f)$ και U μια τυχαία ανοιχτή περιοχή του z. Θα δείξουμε ότι η U περιέχει και άλλα σημεία του $J_0(f)$ εκτός του z. Διακρίνουμε 3 περιπτώσεις :
(i) *Το z δεν είναι περιοδικό σημείο της f, δηλαδή $f^p(z) \neq z$, για κάθε $p \geq 1$.*
Τότε $f^{-\kappa}(z) \subset J_0(f)$ για κάθε $\kappa \geq 1$ (Θεώρημα 9) και $f^{-\kappa}(z) \bigcap U \neq \emptyset$ (Θεώρημα 12). Επιπλέον το $f^{-\kappa}(z) \bigcap U$ περιέχει σημεία διαφορετικά από το z γιατί αν $f^{-\kappa}(z) \bigcap U = \{z\}$ θα είχαμε $f^\kappa(z) = z$ δηλαδή το z θα ήταν περιοδικό σημείο της f, που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα υπάρχει $w \in J_0(f) \bigcap U$ με $w \neq z$.
(ii) *Το z είναι σταθερό σημείο της f, δηλαδή $f(z) = z$.*
Υπάρχει $w \neq z$ με $f(w) = z$, διότι αν η εξίσωση $f(\zeta) = z$ είχε ως μόνη λύση την $\zeta = z$, τότε από την απόδειξη του θεωρήματος 11,

$$f(\zeta) = c(\zeta - z)^m + z$$

και $z \in F_0(f)$ που είναι άτοπο. Υπάρχει λοιπόν $w \neq z$ με $f(w) = z$. Επίσης $w \in J_0(f)$ αφού $w \in f^{-1}(z) \subset J_0(f)$. Άρα από το θεώρημα 12 το U τέμνει το $f^{-\kappa}(w)$ για κάποιο κ. Επομένως υπάρχει ρ που ανήκει συγχρόνως στα U και $f^{-\kappa}(w) \subset J_0(f)$ (Θεώρημα 9). Αν $\rho = z$ τότε $w = f^\kappa(\rho) = f^\kappa(z) = z$, άτοπο.
(iii) *Το z είναι περιοδικό σημείο περιόδου $p \geq 2$.*
Τότε το z είναι σταθερό σημείο της f^p. Εφαρμόζουμε το (ii) για την f^p, οπότε το U περιέχει και άλλα σημεία του $J_0(f^p) = J_0(f)$.

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ότι το $J_0(f)$ είναι το σύνολο Julia της f. Υπενθυμίζουμε ότι

$$J_0(f) = \{z \in \mathbb{C} : \text{ η οικογένεια } \mathcal{F} \text{ δεν είναι κανονική στο } z \}$$

ενώ το σύνολο Julia της f είναι η κλειστή θήκη του συνόλου όλων των απωθητικών περιοδικών σημείων της f. Στην απόδειξη θα χρησιμοποιηθεί και το εξής λήμμα:
Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $m \geq 2$, έχει το πολύ $2m-2$ μη απωθητικές περιοδικές τροχιές. Σημειώνεται ότι μια τροχιά $\mathcal{O}_f(z_0)$ περιόδου p λέγεται απωθητική αν $|(f^p)'(z_0)| > 1$. (Για μια απόδειξη βλέπε [4])

ΘΕΩΡΗΜΑ 15. Ισχύει $J(f) = J_0(f)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $J(f) \subset J_0(f)$. Προς τούτο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε απωθητικό περιοδικό σημείο w της f ανήκει στο $J_0(f)$. Πράγματι τότε επειδή το $J_0(f)$ είναι κλειστό και η κλειστή θήκη του συνόλου των απωθητικών περιοδικών σημείων θα περιέχεται στο $J_0(f)$, δηλαδή $J(f) \subset J_0(f)$.

Έστω λοιπόν w απωθητικό περιοδικό σημείο της f, δηλαδή για κάποιο $p \geq 1$, $f^p(w) = w$ και $|(f^p)'(w)| > 1$. Θέτουμε $g(z) = f^p(z)$, οπότε

$$g(w) = w \ , \ |g'(w)| > 1.$$

Θα δείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F} = \{g^\kappa\}$ δεν είναι κανονική στο w.

Πράγματι αν υποθέσουμε ότι υπάρχει περιοχή U του w, ώστε η $\mathcal{F} = \{g^\kappa\}$ να είναι κανονική επί της U, τότε υπάρχει κάποια υπακολουθία $\{g^{\kappa_i}\}_{i=1}^{\infty}$ που συγκλίνει τοπικά ομοιόμορφα στην U σε μια αναλυτική συνάρτηση g_0. Επειδή $g^{\kappa_i}(w) = w$, η g_0 είναι παντού πεπερασμένη. Τότε θα έχουμε επίσης $(g^{\kappa_i})' \to {g_0}'$ τοπικά ομοιόμορφα στο U. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$(g^2)'(w) = g'(g(w))g'(w) = g'(w)g'(w) = (g'(w))^2$$

και με τον ίδιο συλλογισμό βρίσκουμε $(g^\kappa)'(w) = (g'(w))^\kappa$ για κάθε κ. Συνεπώς $(g^{\kappa_i})'(w) = (g'(w))^{\kappa_i} \to \infty$ καθώς $i \to \infty$ αφού

$|g'(w)| = |(f^p)'(w)| > 1$. Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το ότι η τιμή ${g_0}'(w)$ είναι πεπερασμένη. Άρα η $\mathcal{F}$ δεν είναι κανονική στο w, δηλαδή $w \in J_0(f)$ που ήταν το ζητούμενο.

Για την αντίστροφη σχέση $J_0(f) \subset J(f)$, θεωρούμε το σύνολο

$$K = \{w \in J_0(f) \ : \ \exists\, z \neq w \text{ με } f(z) = w \text{ και } f'(z) \neq 0\}.$$

Παρατηρούμε ότι το K περιέχει όλα τα σημεία του $J_0(f)$ εκτός ίσως πεπερασμένου πλήθους. Πράγματι για $w \in J_0(f)$ υπάρχει $z \neq w$ με $f(z) = w$ (αν η εξίσωση $f(z) = w$ έχει την $z = w$ ως μόνη λύση τότε, συμβολίζοντας με m το βαθμό του πολυωνύμου f, $f(z) - w = c(z-w)^m$ και όπως στην απόδειξη του θεωρήματος 11 το w θα ήταν το εξαιρετέο σημείο και δεν θα ανήκε στο $J_0(f)$). Έστω ότι υπάρχουν άπειρα το πλήθος $\{w_1, w_2, ...\}$ σημεία του $J_0(f)$ ώστε για κάθε $i = 1, 2, 3, ...$ και κάθε $z \in f^{-1}(w_i) \setminus \{w_i\}$ να έχουμε $f'(z) = 0$. Διαλέγοντας $z_i \in f^{-1}(w_i) \setminus \{w_i\}$ για κάθε i, έχουμε άπειρα το πλήθος $\{z_1, z_2, ...\}$ σημεία του $J_0(f)$, διαφορετικά ανά δύο (γιατί $f(z_i) = w_i$ και τα w_i είναι διαφορετικά ανά δύο) τέτοια ώστε $f'(z_i) = 0$ για κάθε i. Το $J_0(f)$ είναι συμπαγές άρα η ακολουθία $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ έχει σημείο συσσώρευσης στο $J_0(f)$. Από την αρχή ταυτισμού για αναλυτικές συναρτήσεις έπεται ότι $f' \equiv 0$, άτοπο.

Έστω τώρα $w \in K$. Θα δείξουμε ότι το w είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου των περιοδικών σημείων της f. Έστω $z \neq w$ με $f(z) = w$ και $f'(z) \neq 0$. Υπάρχει περιοχή U του z στην οποία η f είναι 1-1 και υπάρχει περιοχή V του w όπου εκεί ορίζεται η τοπική αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : V \to U$. Μπορούμε να υποθέσουμε $U \bigcap V = \emptyset$ (αλλιώς μικραίνουμε τις περιοχές κατάλληλα). Ορίζουμε την οικογένεια ολόμορφων συναρτήσεων

$$h_\kappa(z) = \frac{f^\kappa(z) - z}{f^{-1}(z) - z}\ ,\ z \in V.$$

Για μια τυχούσα περιοχή $V_1 \subset V$ με $w \in V_1$ η $\{f^\kappa\}$ δεν είναι κανονική στο στην V_1 (διότι $w \in V_1$ και $w \in J_0(f)$) επομένως η $\{h_\kappa\}$ δεν είναι κανονική στην V_1. Από το Θεώρημα Montel είτε υπάρχει $\zeta \in V_1$ ώστε για κάποιο κ, να έχουμε $h_\kappa(\zeta) = 0$, είτε υπάρχει $\zeta \in V_1$ ώστε για

κάποιο κ, να έχουμε $h_\kappa(\zeta) = 1$. Στην πρώτη περίπτωση $f^\kappa(\zeta) = \zeta$ ενώ στην δεύτερη $f^{\kappa+1}(\zeta) = \zeta$. Και στις δύο περιπτώσεις, η V_1 περιέχει περιοδικό σημείο της f. Έπεται ότι υπάρχει ακολουθία $\{\zeta_n\}$ από διαφορετικά ανά δύο περιοδικά σημεία της f ώστε $\zeta_n \to w$. Από το προηγούμενο λήμμα όλα τα ζ_n εκτός πεπερασμένα το πλήθος είναι απωθητικά, επομένως $w \in J(f)$.

Έχουμε δείξει ότι $K \subset J(f)$ άρα $\overline{K} \subset \overline{J(f)} = J(f)$. Αλλά το K περιέχει το $J_0(f)$ εκτός πεπερασμένου πλήθους σημείων και το $J_0(f)$ δεν έχει μεμονωμένα σημεία. Άρα $J_0(f) = \overline{K} \subset J(f)$.

Για τη συνάρτηση $f(z) = -z^3$ βρήκαμε ότι το 0 είναι ελκτικό σημείο της f με λεκάνη έλξης

$$A(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Το ∞ είναι επίσης ελκτικό σημείο με λεκάνη έλξης

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}.$$

Τα $A(0)$ και $A(\infty)$ έχουν κοινό σύνορο, το οποίο είναι ο μοναδιαίος κύκλος

$$D = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| = 1\}$$

δηλαδή έχουμε $D = \partial A(0) = \partial A(\infty)$. Όπως θα δούμε στο επόμενο θεώρημα το κοινό αυτό σύνορο D είναι το σύνολο Julia της f.

ΘΕΩΡΗΜΑ 16. Έστω w ένα ελκτικό σταθερό σημείο της f ή το ∞. Τότε $J(f) = \partial A(w)$.

Απόδειξη. Έστω $w \in \mathbb{C}$. Αρχικά θα δείξουμε ότι $J(f) \subset \partial A(w)$. Έστω $z \in J(f)$, τότε για κάθε κ, $f^\kappa(z) \in J(f)$, λόγω του αναλλοίωτου του $J(f)$ μέσω της f. Έτσι η $\{f^\kappa(z)\}$ δεν μπορεί να συγκλίνει σε σημείο εκτός του $J(f)$, οπότε δεν συγκλίνει και στο w. Συνεπώς το z δεν ανήκει στο $A(w)$.

Έστω U τυχαία ανοιχτή περιοχή του $z \in J(f)$. Τότε το σύνολο $f^\kappa(U)$ περιέχει σημεία του $A(w)$ για κάποιο κ (Θεώρημα 11). Δηλαδή για κάθε ανοιχτή περιοχή του z το $f^\kappa(U)$ τέμνει το $A(w)$,

άρα υπάρχουν σημεία ζ οσοδήποτε κοντά στο z ώστε $f^\kappa(\zeta) \in A(w)$ και$f^n(\zeta) \to w$, οπότε $\zeta \in A(w)$. Άρα το z είναι σημείο συσσώρευσης του $A(w)$ επομένως $z \in \overline{A(w)}$. Επειδή το z δεν ανήκει στο $A(w)$ και $z \in \overline{A(w)}$ παίρνουμε $z \in \partial A(w)$.

Έστω τώρα $z \in \partial A(w)$ και ότι το z δεν ανήκει στο $J(f) = J_0(f)$. Αφού το z δεν ανήκει στο $J_0(f)$, υπάρχει ανοιχτό συνεκτικό σύνολο V με $z \in V$ και η $\{f^\kappa\}$ είναι κανονική στο V. Άρα η $\{f^\kappa\}$ έχει υπακολουθία $\{f^{\kappa_i}\}$ που συγκλίνει αναγκαστικά στο w στο σύνολο $V \bigcap A(w)$ το οποίο είναι ανοιχτό ως τομή ανοιχτών και μη κενό. Η $\{f^{\kappa_i}\}$ θα συγκλίνει στο w και στο V αφού κάθε ολόμορφη συνάρτηση αν είναι σταθερή σε ένα ανοιχτό σύνολο τότε είναι σταθερή και σε κάθε ανοιχτό και συνεκτικό υπερσύνολό του (άμεσο από την αρχή ταυτισμού για ολόμορφες συναρτήσεις). Έτσι λοιπόν για κάθε σημείο ζ του V είναι $f^\kappa(\zeta) \to w$, άρα $\zeta \in A(w)$, οπότε $V \subset A(w)$ που είναι άτοπο αφού $z \in \partial A(w)$, ενώ $z \in V$ και $A(w)$ ανοιχτό.

Για την περίπτωση $w = \infty$ η απόδειξη είναι ανάλογη.

Αξίζει να επισημανθεί ότι η f έχει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες στο $J(f)$. Για την έννοια αυτή δίνεται ο παρακάτω ορισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 8. Έστω $F : \Lambda \to \Lambda$ συνεχής συνάρτηση, όπου Λ υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Λέμε ότι η F παρουσιάζει **ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες** αν υπάρχει σταθερά $\delta > 0$ τέτοια, ώστε για κάθε $p \in \Lambda$ και κάθε περιοχή U του p, υπάρχει θετικός ακέραιος κ και $y \in U \bigcap \Lambda$ με

$$|F^\kappa(p) - F^\kappa(y)| > \delta.$$

Για την περίπτωση τώρα του $J(f)$ αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για τυχόν $z \in J(f)$ και κάθε περιοχή U του z υπάρχει θετικός ακέραιος κ και $w \in J(f) \bigcap U$ ώστε

$$|f^\kappa(z) - f^\kappa(w)| > \delta.$$

Έτσι σημεία του $J(f)$ που βρίσκονται αρχικά κοντά μεταξύ τους, δεν παραμένουν κοντά μετά από τις αναδρομές τους μέσω της f. Αυτό θα γίνει κατανοητό με το παράδειγμα που ακολουθεί.

Έστω η συνάρτηση $f(z) = z^2$. Εύκολα βρίσκουμε ότι τα σταθερά σημεία της f είναι οι αριθμοί $0, 1$. Είναι : $f'(z) = 2z$ οπότε βρίσκουμε $|f'(0)| = 0 < 1$ και $|f'(1)| = 2 > 1$, συνεπώς μόνο το 0 είναι ελκτικό σταθερό σημείο ενώ το 1 είναι απωθητικό. Παρατηρούμε ότι

$$f^\kappa(z) = z^{2^\kappa}$$

επομένως

$$f^\kappa(z) \longrightarrow 0 \quad \text{για} \quad |z| < 1$$

ενώ

$$f^\kappa(z) \longrightarrow \infty \quad \text{για} \quad |z| > 1.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$A(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

και

$$A(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$$

συνεπώς το σύνολο Julia της f είναι το κοινό σύνορο των $A(0)$, $A(\infty)$ δηλαδή ο μοναδιαίος κύκλος

$$D = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z| = 1\}.$$

Εκλέγουμε $\delta = 1$. Έστω τυχόν $z_0 = e^{i\theta_0} \in D$ και U περιοχή του z_0. Στο τόξο $U \bigcap D$ παίρνουμε σημείο $z_0' = e^{i\theta_0'}$ διαφορετικό του z_0. Παρατηρούμε ότι η εικόνα $f(z)$ ενός μιγαδικού $z \in D$ έχει το ίδιο μέτρο αλλά διπλάσιο όρισμα από τον z. Έτσι λοιπόν

$$\arg f(z_0) - \arg f(z_0') = 2\theta_0 - 2\theta_0' = 2(\arg z_0 - \arg z_0')$$

και επαγωγικά για κάθε θετικό ακέραιο n

$$\arg f^n(z_0) - \arg f^n(z_0') = 2^n(\arg z_0 - \arg z_0').$$

Είναι φανερό μετά από πεπερασμένο αριθμό κ βημάτων η διαφορά $\arg f^\kappa(z_0) - \arg f^\kappa(z_0')$ μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από 60 μοίρες,

οπότε η χορδή του κύκλου με άκρα τα $f^\kappa(z_0)$ και $f^\kappa(z_0')$ θα έχει μήκος μεγαλύτερο από 1, δηλαδή

$$|f^\kappa(z_0) - f^\kappa(z_0')| > 1.$$

Βλέπουμε επομένως ότι οσοδήποτε μικρή περιοχή U κι αν επιλέξουμε, δηλαδή οσοδήποτε κοντά κι αν είναι τα z_0, z_0' το μέτρο της διαφοράς $f^\kappa(z_0) - f^\kappa(z_0')$ μπορεί να είναι αρκετά μεγάλο για κάποιο κ.

5 Το σύνολο Mandelbrot

Η παρακάτω θεωρητική ανάπτυξη βασίζεται στο βιβλίο του K. Falconer *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, κεφάλαιο 14 καθώς και στο βιβλίο του N. Steinmetz *Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems*.

Έστω $g(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$ πολυώνυμο δευτέρου βαθμού και $h(z) = Az + B$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα A, B κατάλληλα ώστε

$$(h^{-1} \circ g \circ h)(z) = z^2 + c$$

για κάποια σταθερά c. Πράγματι η αντίστροφη της h έχει τύπο $h^{-1}(z) = \frac{z-B}{A}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} g(h(z)) &= \alpha(Az+B)^2 + \beta(Az+B) + \gamma \\ &= \alpha A^2 z^2 + (2AB\alpha + \beta A)z + \alpha B^2 + \beta B + \gamma \end{aligned}$$

και

$$h^{-1}(g(h(z))) = \alpha A z^2 + (2B\alpha + \beta)z + \frac{\alpha B^2 + \beta B + \gamma - B}{A}.$$

Έτσι αν επιλέξουμε $A = \frac{1}{\alpha}$ και $B = \frac{-\beta}{2\alpha}$ βρίσκουμε

$$(h^{-1} \circ g \circ h)(z) = z^2 + c$$

όπου $c = \alpha\gamma + \frac{\beta}{2} - \frac{\beta^2}{4}$.

Θέτουμε $f_c(z) = z^2 + c$. Η σχέση $h^{-1} \circ g \circ h = f_c$ δίνει επαγωγικά για κάθε θετικό ακέραιο κ

$$h^{-1} \circ g^\kappa \circ h = f_c^\kappa$$

ή

$$g^\kappa = h \circ f_c^\kappa \circ h^{-1}.$$

Έπεται ότι το σύνολο Julia της g λαμβάνεται ως $h(J(f_c))$. Προκειμένου λοιπόν να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των αναδρομών δευτεροβάθμιων πολυωνύμων, αρκεί να μελετήσουμε την συμπεριφορά των

αναδρομών των συναρτήσεων της μορφής $f_c(z) = z^2 + c$, $c \in \mathbb{C}$.

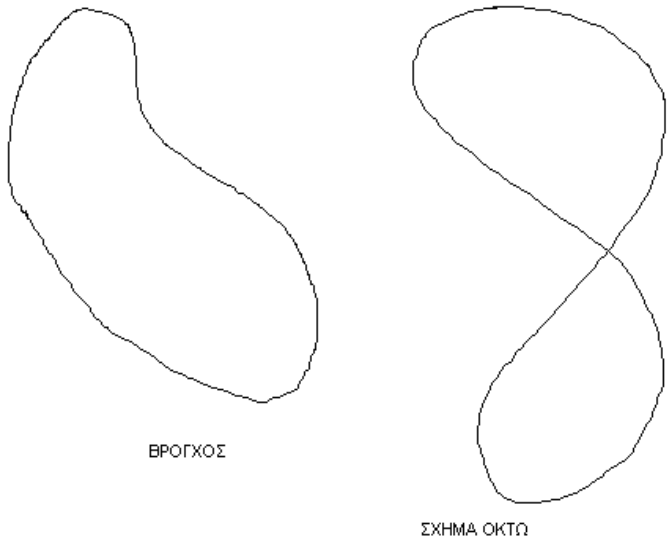
ΟΡΙΣΜΟΣ 9. Το σύνολο Mandelbrot ορίζεται να είναι το σύνολο

$$M = \{c \in \mathbb{C} \ : \ J(f_c) \ \text{ συνεκτικό}\}.$$

Όπως θα φανεί παρακάτω παρόλο που το M ορίζεται με μια συγκεκριμένη τοπολογική ιδιότητα των συνόλων Julia, μας δίνει πολλές πληροφορίες για τη μορφή τους. Ουσιαστικά θα δούμε πως το M είναι ένας χάρτης για τα σύνολα Julia. Εκλέγοντας ένα c στο επίπεδο του M, αυτόματα γνωρίζουμε για το αντίστοιχο σύνολο Julia τη μορφή του και ιδιότητές του.

Ο ορισμός (9) δεν είναι κατάλληλος για υπολογισμούς. Παρακάτω θα βρούμε έναν ισοδύναμο τρόπο να περιγράψουμε το σύνολο M ο οποίος είναι κατάλληλος για υπολογισμούς. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τον ορισμό και το θεώρημα που ακολουθούν.

ΟΡΙΣΜΟΣ 10. Θα ονομάζουμε **βρόγχο** (loop) μια λεία, απλή και κλειστή καμπύλη. Επίσης μια λεία, κλειστή καμπύλη με ένα μόνο σημείο αυτοτομής θα την ονομάζουμε **σχήμα οκτώ** (figure of eight).



ΣΧΗΜΑ 6.

Συμβολίζουμε με I_C το εσωτερικό του βρόγχου C δηλαδή το χωρίο που περικλείεται από τον C και με E_C το εξωτερικό του βρόγχου C.

ΘΕΩΡΗΜΑ 17. Έστω ένας βρόγχος C στο μιγαδικό επίπεδο.
(i) Αν το $c \in I_C$ τότε το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένας βρόγχος με

$$f_c^{-1}(I_C) = I_{f_c^{-1}(C)} \ .$$

(ii) Αν το $c \in C$ τότε το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένα σχήμα οκτώ και η $f_c^{-1}(I_C)$ είναι το εσωτερικό των δύο βρόγχων του σχήματος οκτώ.

Απόδειξη. Έχουμε $f_c(z) = z^2 + c$ και $f_c^{-1}(z) = (z-c)^{\frac{1}{2}}$. Η f_c^{-1} είναι μια πλειότιμη συνάρτηση διότι σε κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \{c\}$ αντιστοιχούν δύο διαφορετικές τιμές. Για την περίπτωση του σημείου c έχουμε μία τιμή, την $f_c^{-1}(c) = 0$. Λέγοντας ότι η f_c^{-1} έχει δύο συνεχείς κλάδους εννοούμε ότι υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις S_1, S_2 ορισμένες στο $\mathbb{C}$ τέτοιες ώστε για κάθε $z \in \mathbb{C}$ το $S_1(z)$ να είναι η μία από τις δύο τιμές της $f_c^{-1}(z)$ και το $S_2(z)$ η άλλη.

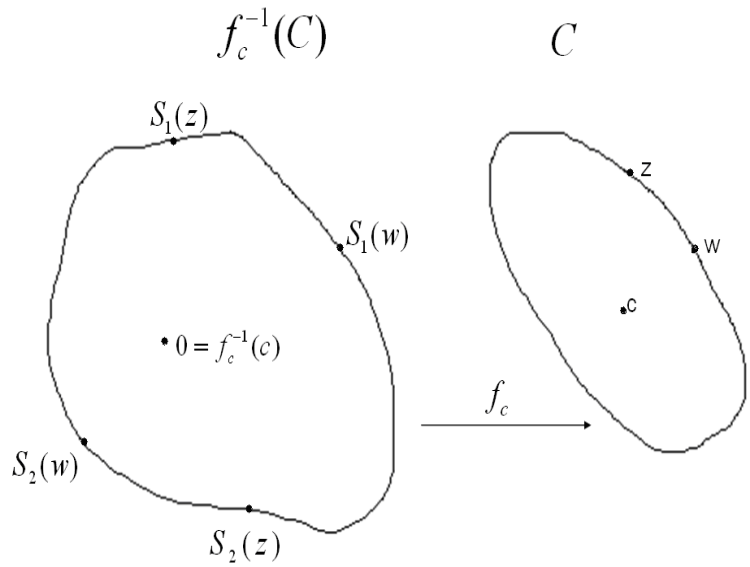
Για ένα βρόγχο C παρατηρούμε ότι αν το $f_c(0) = c$ δεν ανήκει στο C, το 0 δεν θα ανήκει στο $f_c^{-1}(C)$ οπότε $(f_c)'(z) = 2z \neq 0$ για κάθε $z \in f_c^{-1}(C)$. Άρα η f_c είναι τοπικά λεία και 1-1 πάνω στο σύνολο $f_c^{-1}(C)$. Αν όμως το $f_c(0) = c$ ανήκει στο C τότε το 0 θα ανήκει στο $f_c^{-1}(C)$ οπότε $(f_c)'(0) = 0$ και η f_c δεν είναι τοπικά 1-1 σε περιοχή του 0.
(i) Έστω τώρα ότι $c \in I_C$. Παίρνουμε ένα σημείο $w \in C$ και επιλέγουμε την τιμή $S_1(w)$. Αφήνουμε το $S_1(z)$ να μεταβάλλεται συνεχώς καθώς το z κινείται πάνω στη C. Έτσι το σημείο $S_1(z)$ διαγράφει μια λεία καμπύλη αφού για κάθε $z \in C$ έχουμε $z \neq c$ και $S_1'(z) = \frac{1}{2}(z-c)^{-\frac{1}{2}}$. Όταν το z επανέλθει στο w και συνεχίσει να διαγράφει την C ξανά, το $S_2(z)$ συνεχίζει να διαγράφει ένα λείο δρόμο, ο οποίος κλείνει όταν το z επιστρέψει στο w για δεύτερη φορά.

Έπεται ότι το σύνολο $f_c^{-1}(C)$ είναι μια λεία, κλειστή καμπύλη. Η καμπύλη αυτή δεν έχει αυτομές αφού αν υποτεθεί ότι στο $\zeta \in f_c^{-1}(C)$ έχουμε αυτοτομή τότε

$$\zeta = f_c^{-1}(z_1) = f_c^{-1}(z_2)$$

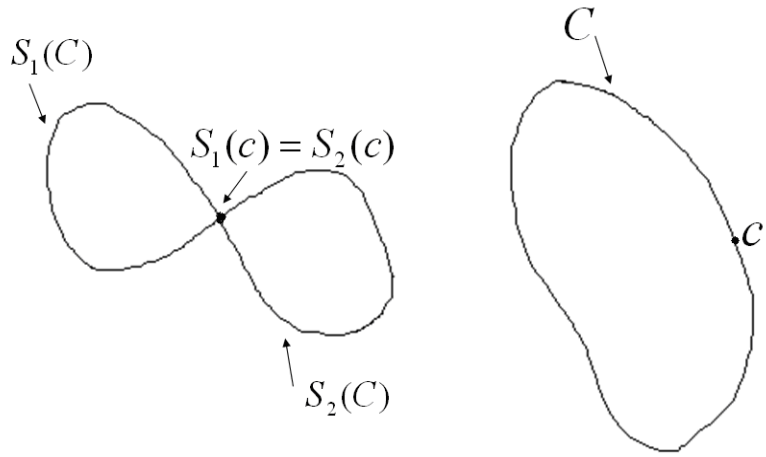
για διαφορετικά σημεία z_1, z_2 του C. Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι $z_1 = z_2$ που είναι άτοπο. Άρα το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένας βρόγχος.

Αφού η f_c είναι ολόμορφη και απεικονίζει το βρόγχο $f_c^{-1}(C)$ (και κανένα άλλο σημείο) στον βρόγχο C, θα πρέπει επίσης να απεικονίζει το εσωτερικό και το εξωτερικό του $f_c^{-1}(C)$ στο εσωτερικό και το εξωτερικό του C αντίστοιχα (το φραγμένο χωρίο απεικονίζεται στο φραγμένο χωρίο). Συνεπώς η f_c^{-1} απεικονίζει το εσωτερικό του C στο εσωτερικό του $f_c^{-1}(C)$.



ΣΧΗΜΑ 7.

(ii) Εργαζόμαστε παρόμοια με το (i). Επειδή τώρα το $f_c(0) = c$ ανήκει στο C παίρνοντας ένα τμήμα καμπύλης C_0 που περνάει από το c τότε το $f_c^{-1}(C_0)$ αποτελείται από δύο λεία κομμάτια καμπύλης που διέρχονται από το 0 (οπότε έχουμε αυτοτομή). Έτσι λοιπόν το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένα σχήμα οκτώ και το $f_c^{-1}(I_C)$ είναι το εσωτερικό των δύο βρόγχων του σχήματος οκτώ.



ΣΧΗΜΑ 8.

ΘΕΩΡΗΜΑ 18. Έστω

$$M' = \{c \in \mathbb{C} \ : \ \text{η } \{f_c^\kappa(0)\} \text{ είναι φραγμένη}\}.$$

Τότε $M = M'$.

Απόδειξη. Αρχικά θα δείξουμε ότι $M' \subset M$. Έστω $c \in M'$. Αφού η $\{f_c^\kappa(0)\}$ είναι φραγμένη, υπάρχει $m > 0$ τέτοιος ώστε $|f_c^\kappa(0)| \leq m$ για κάθε κ. Θέτουμε $C_1 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = m+1\}$ και έχουμε

$$f_c^\kappa(0) \in I_{C_1} \ , \ \kappa = 1, 2, ...$$

Αν θέσουμε $C_2 = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = r\}$ όπου $r > max\{|c|, 2\}$ τότε $|f^{-1}(z)| = |z - c|^{\frac{1}{2}} < r$, οπότε

$$f_c^{-1}(C_2) \subset I_{C_2}.$$

Από την απόδειξη του θεωρήματος 7 υπάρχει κύκλος C_3 κέντρου 0 και ακτίνας r' ώστε για κάθε $z \in E_{C_3}$ να ισχύει

$$f_c^\kappa(z) \to \infty.$$

Θεωρούμε τον κύκλο C με κέντρο 0 και ακτίνα $R = \max\{m+1, r, r'\}$ και έχουμε:
α) όλα τα σημεία $f_c^\kappa(0)$ ανήκουν στο I_C για κάθε κ
β) το $f_c^{-1}(C)$ περιέχεται στο I_C
γ) για κάθε $z \in E_C$ είναι $f_c^\kappa(z) \to \infty$ όταν $\kappa \to \infty$.

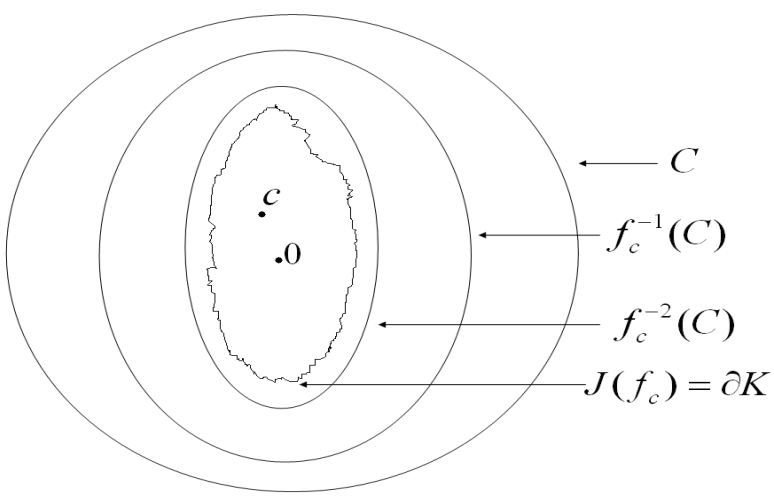
Αφού το $f_c(0) = c \in I_C$ το θεώρημα 17(i) και το (β) δίνουν ότι το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένας βρόγχος που βρίσκεται στο εσωτερικό του C. Επίσης $f_c^2(0) = f_c(c) \in I_C$ και η f_c^{-1} απεικονίζει το I_C στο $I_{f_c^{-1}(C)}$, επομένως το $c \in I_{f_c^{-1}(C)}$. Έτσι το $f_c^{-2}(C)$ είναι ένας βρόγχος που περιέχεται στο $I_{f_c^{-1}(C)}$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι η $\{f_c^{-\kappa}(C)\}$ είναι μια ακολουθία βρόγχων έτσι ώστε κάθε βρόγχος να περιέχει τον επόμενο στο εσωτερικό του με το c να βρίσκεται εντός όλων αυτών των βρόγχων.

Έστω

$$L_\kappa = f_c^{-\kappa}(C) \bigcup I_{f_c^{-\kappa}(C)} \text{ και } K = \bigcap_{\kappa=1}^{\infty} L_\kappa.$$

Αν $z \in \mathbb{C} \setminus K$, τότε για κάποιο κ_0 το $f_c^{\kappa_0}(z)$ βρίσκεται έξω από τον C άρα $f_c^\kappa(z) \to \infty$. Συνεπώς $A(\infty) = \mathbb{C} \setminus K$. Άρα έχουμε

$$J(f_c) = \partial A(\infty) = \partial(\mathbb{C} \setminus K) = \partial K.$$



ΣΧΗΜΑ 9.

Το K είναι η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας κλειστών και απλά συνεκτικών συνόλων, οπότε το K είναι απλά συνεκτικό και έχει συνεκτικό σύνορο, δηλαδή το $J(f_c) = \partial K$ είναι συνεκτικό.

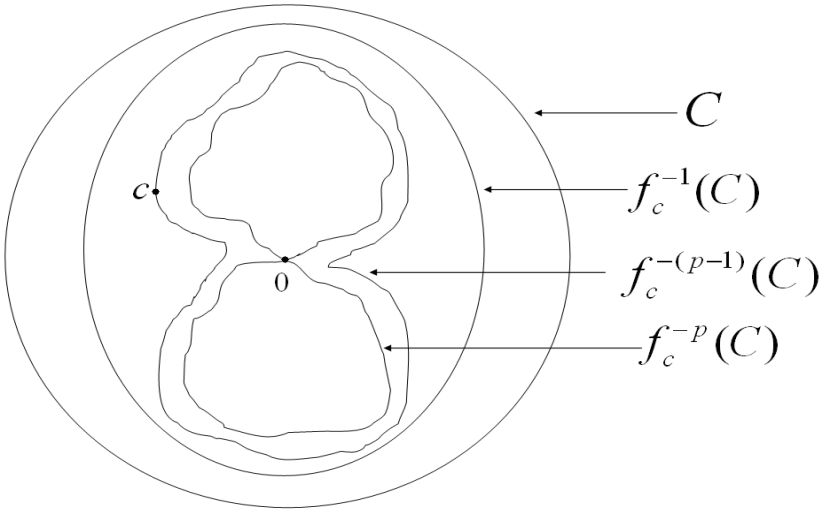
Τώρα θα δείξουμε ότι $M \subset M'$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν η $\{f_c^\kappa(0)\}$ δεν είναι φραγμένη τότε το $J(f_c)$ δεν είναι συνεκτικό. Επειδή η $\{f_c^\kappa(0)\}$ δεν είναι φραγμένη, πάλι μπορούμε να βρούμε ένα αρκετά μεγάλο κύκλο C στο μιγαδικό επίπεδο με κέντρο την αρχή O, τέτοιο ώστε:

α) το $f_c^{-1}(C)$ περιέχεται στο I_C

β) για κάθε $z \in E_C$ είναι $f_c^\kappa(z) \to \infty$ όταν $\kappa \to \infty$

γ) για κάποιο p το $f_c^p(0) = f_c^{p-1}(c) \in C$, έτσι ώστε $f_c^\kappa(0) \in I_C$ αν $\kappa < p$ και $f_c^\kappa(0) \in E_C$ αν $\kappa > p$.

Κατασκευάζουμε πάλι όπως προηγουμένως μια ακολουθία βρόγχων $\{f_c^{-\kappa}(C)\}$ έτσι ώστε κάθε βρόγχος να περιέχει τον επόμενο στο εσωτερικό του. Η διαδικασία αυτή σταματάει όταν φτάσουμε στο βρόγχο $f_c^{-(p-1)}(C) = f_c^{1-p}(C)$, αφού $c \in f_c^{1-p}(C)$ και το θεώρημα $17(i)$ δεν εφαρμόζεται. Από το θεώρημα $17(ii)$ παίρνουμε ότι το $f_c^{-p}(C)$ είναι ένα σχήμα οκτώ, εντός του βρόγχου $f_c^{1-p}(C)$, με την f_c να απεικονίζει το εσωτερικό κάθε βρόγχου του $f_c^{-p}(C)$ στο εσωτερικό του $f_c^{1-p}(C)$.



ΣΧΗΜΑ 10.

Το $J(f_c)$ βρίσκεται στο εσωτερικό των βρόγχων του $f_c^{-p}(C)$, αφού οι αναδρομές των άλλων σημείων τείνουν στο ∞. Αφού το $J(f_c)$ παραμένει αναλλοίωτο μέσω της f_c^{-1}, προκύπτει ότι κομμάτια του $J(f_c)$ βρίσκονται σε κάθε ένα από τα εσωτερικά των βρόγχων του $f_c^{-p}(C)$. Έτσι το $J(f_c)$ είναι μη συνεκτικό.

Μια σημαντική παρατήρηση που μας δίνει άλλη μια έκφραση για το M είναι η εξής : Αν

$$M'' = \{c \in \mathbb{C} \ : \ \text{η } \{f_c^\kappa(0)\} \text{ δεν τείνει στο } \infty \text{ όταν } \kappa \to \infty\}$$

τότε είναι $M' = M''$. Πράγματι προφανώς αν η $\{f_c^\kappa(0)\}$ είναι φραγμένη τότε δεν μπορεί να τείνει στο ∞ οπότε $M' \subset M''$. Για τον αντίστροφο εγκλεισμό αρκεί να δείξουμε ότι αν η $\{f_c^\kappa(0)\}$ δεν είναι φραγμένη τότε $f_c^\kappa(0) \to \infty$. Έχουμε $|f_c(z)| > |z|$ για $|z| > r$ από την απόδειξη του θεωρήματος 7. Έτσι λοιπόν για κάθε κ μεγαλύτερο ενός κατάλληλου κ_0 θα ισχύει $|f_c^\kappa(0)| > r$ και $|f_c^{\kappa+1}(0)| > |f_c^\kappa(0)|$ δηλαδή η $\{|f_c^\kappa(0)|\}$ είναι γνησίως αύξουσα και όχι φραγμένη άνω άρα θα τείνει στο ∞ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Από τα παραπάνω λοιπόν μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} M &= \{c \in \mathbb{C} \ : \ J(f_c) \ \text{ συνεκτικό}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \ : \ \text{η } \{f_c^\kappa(0)\} \text{ είναι φραγμένη}\} \\ &= \{c \in \mathbb{C} \ : \ \text{η } \{f_c^\kappa(0)\} \text{ δεν τείνει στο } \infty \text{ όταν } \kappa \to \infty\} \end{aligned}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 19. Το σύνολο Mandelbrot

$$M = \{c \in \mathbb{C} \ : \ \text{η } \{f_c^\kappa(0)\} \text{ είναι φραγμένη}\}$$

όπου $f_c(z) = z^2 + c$ βρίσκεται ολόκληρο εντός του κλειστού δίσκου $\Delta = \{c \in \mathbb{C} \ : \ |c| \leq 2\}$, δηλαδή $M \subset \Delta$.

Απόδειξη. Έστω $c \in M$ και $B = \sup_\kappa |f_c^\kappa(0)|$ το οποίο είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός εφόσον η $\{f_c^\kappa(0)\}$ είναι φραγμένη. Είναι $|c| = |f_c(0)| \leq sup|f_c^\kappa(0)| = B$, δηλαδή $|c| \leq B$. Ακόμη

$$(f_c^\kappa(0))^2 = f_c^{\kappa+1}(0) - c$$

άρα

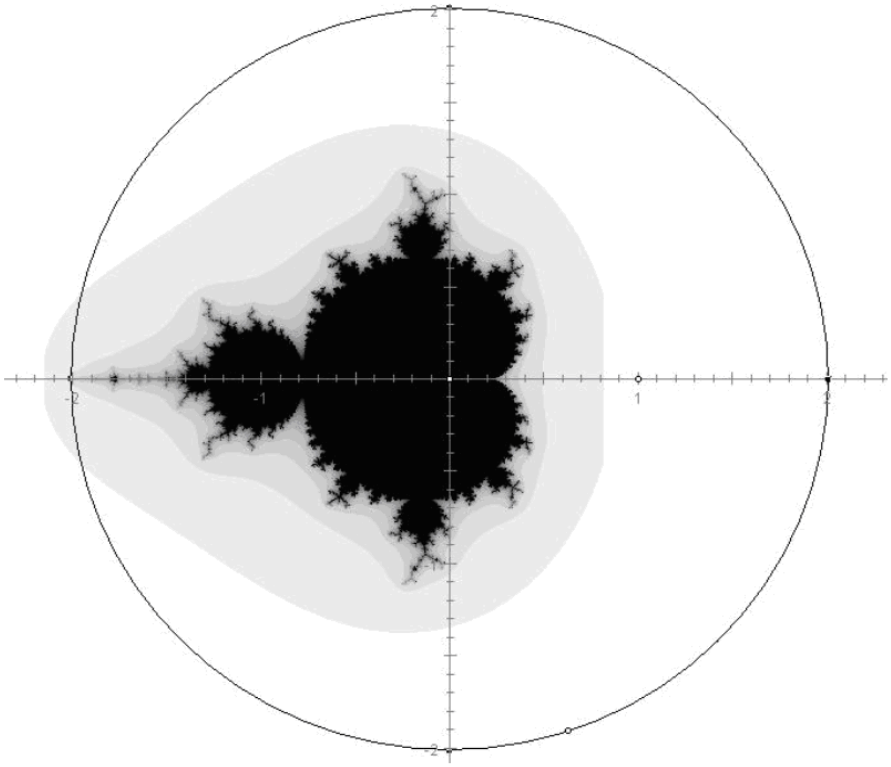
$$|f_c^\kappa(0)|^2 \leq |f_c^{\kappa+1}(0)| + |c| \leq B + |c| \leq 2B\ .$$

Επομένως για κάθε θετικό ακέραιο κ

$$|f_c^\kappa(0)| \leq \sqrt{2B} \Rightarrow sup|f_c^\kappa(0)| \leq \sqrt{2B} \Rightarrow B \leq \sqrt{2B} \Rightarrow B \leq 2\,.$$

Συνεπώς $|c| \leq 2$.

Για να παραστήσουμε γραφικά το σύνολο Mandelbrot χρησιμοποιούμε τον ηλεκτρονικό υπολογιστή. Με τη βοήθεια του θεωρήματος 19 και εκλέγοντας ένα αρκετά μεγάλο θετικό ακέραιο m μπορούμε κατά προσέγγιση να συμπεράνουμε ότι κάποιο $c \in \mathbb{C}$ ανήκει στο σύνολο Mandelbrot εάν $|f_c^m(0)| \leq 2$ ενώ δεν θα ανήκει αν για κάποιο $n \leq m$ είναι $|f_c^n(0)| > 2$. Σε αυτή τη λογική βασίζονται προγράμματα για ηλεκτρονικούς υπολογιστές τα οποία μας δίνουν μια αρκετά καλή εικόνα του εν λόγω συνόλου.



ΣΧΗΜΑ 11. Το σύνολο Mandelbrot

ΘΕΩΡΗΜΑ 20. Το σύνολο Mandelbrot είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Από το προηγούμενο θεώρημα το M είναι φραγμένο. Μάλιστα γράφεται

$$M = \{c \in \mathbb{C} \ : \ |f_c^\kappa(0)| \leq 2 \ , \ \kappa = 1, 2, ...\}.$$

Θα δείξουμε ότι το M είναι και κλειστό.

Παρατηρούμε ότι για $w \in \mathbb{C}$ το $f_w(0) = 0^2 + w = w$ δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο πρώτου βαθμού. Το $f_w^2(0) = w^2 + w$ δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού, το $f_w^3(0) = (w^2 + w)^2 + w$ δηλαδή είναι ένα πολυώνυμο τετάρτου βαθμού και γενικά

$$f_w^\kappa(0) = P_{2^{\kappa-1}}(w)$$

όπου $P_{2^{\kappa-1}}(w)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2^{\kappa-1}$.

Έστω $\{c_n\}$ ακολουθία στο M με $\lim c_n = c$. Τότε για κάθε κ θα έχουμε

$$|f_{c_n}^\kappa(0)| \leq 2 \Rightarrow |P_{2^{\kappa-1}}(c_n)| \leq 2$$

και λαμβάνοντας υπόψιν ότι η $P_{2^{\kappa-1}}$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική παίρνουμε

$$\lim |P_{2^{\kappa-1}}(c_n)| \leq 2 \Rightarrow |P_{2^{\kappa-1}}(c)| \leq 2 \Rightarrow |f_c^\kappa(0)| \leq 2.$$

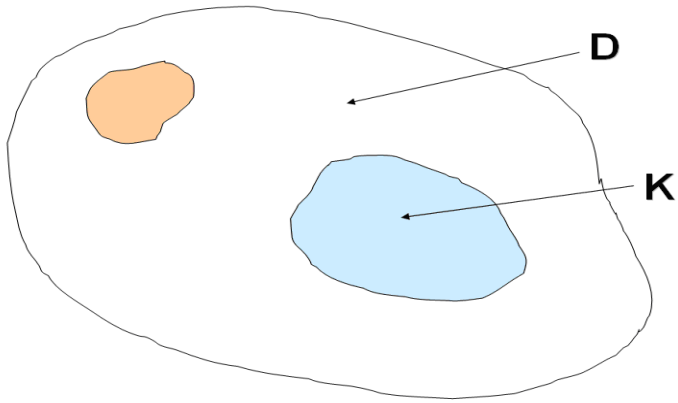
Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι $c \in M$ και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

ΘΕΩΡΗΜΑ 21. Οι συνιστώσες του M^0 είναι απλά συνεκτικά σύνολα.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει συνιστώσα D του M^0 που δεν είναι απλά συνεκτική. Τότε το $\mathbb{C} \setminus D$ θα έχει μια φραγμένη συνιστώσα K με σύνορο $\partial K \subset \partial D$. Ακόμη έχουμε

$$f_c^\kappa(0) = P_{2^{\kappa-1}}(c)$$

όπου $P_{2^{\kappa-1}}(c)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $2^{\kappa-1}$.



ΣΧΗΜΑ 12.

Το πολυώνυμο $P_{2^{\kappa-1}}$ έχει μέγιστο στο συμπαγές ∂K. Από την σχέση $\partial K \subset \partial D$ προκύπτει

$$\max_{\partial K} P_{2^{\kappa-1}}(c) \leq \max_{\partial D} P_{2^{\kappa-1}}(c) \leq 2.$$

Από την αρχή του μεγίστου έπεται ότι

$$|P_{2^{\kappa-1}}(c)| \leq 2 \ , \ \forall c \in K$$

ισοδύναμα

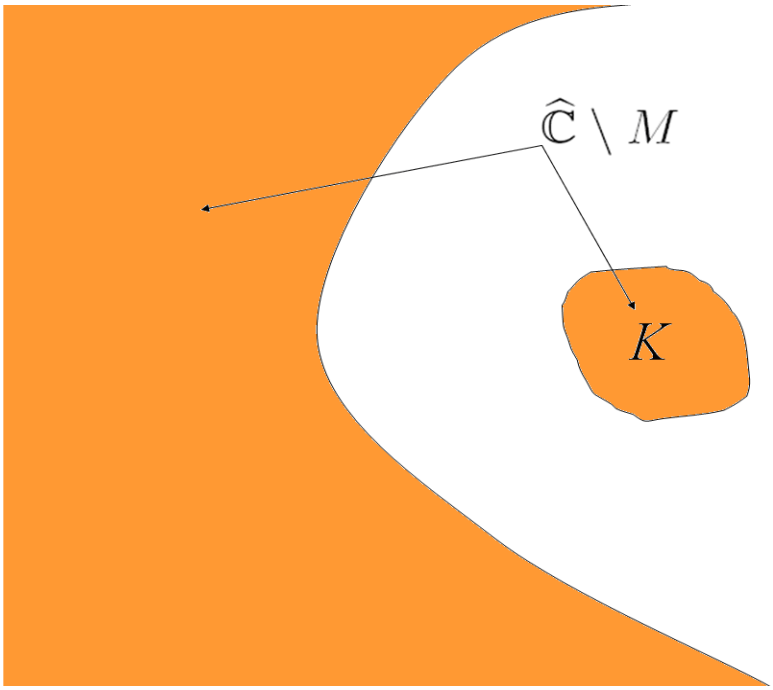
$$|f_c^{\kappa}(0)| \leq 2 \ , \ \forall c \in K.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους κ, οπότε $K \subset M$, που είναι άτοπο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 22. Το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω ότι το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus M$ δεν είναι συνεκτικό σύνολο. Τότε θα έχει στο $\mathbb{C}$ μια φραγμένη συνιστώσα K. Θεωρούμε πάλι τα πολυώνυμα $P_{2^{\kappa-1}}(c) = f_c^{\kappa}(0)$, κ θετικός ακέραιος. Επειδή το ∂K είναι συμπαγές και $\partial K \subset \partial M$ έχουμε

$$\max_{\partial K} P_{2^{\kappa-1}}(c) \leq \max_{\partial M} P_{2^{\kappa-1}}(c) \leq 2.$$



ΣΧΗΜΑ 13.

Από την αρχή του μεγίστου έπεται ότι

$$|P_{2^{\kappa-1}}(c)| \leq 2 \ , \ \forall c \in K$$

ισοδύναμα

$$|f_c^{\kappa}(0)| \leq 2 \ , \ \forall c \in K.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους κ, οπότε $K \subset M$, που είναι άτοπο.

6 Σύνολα Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ και κατάταξή τους με βάση το σύνολο Mandelbrot

Η παρακάτω θεωρητική ανάπτυξη βασίζεται στο βιβλίο του K. Falconer *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, κεφάλαιο 14 καθώς και στο [B]. Για την επεξεργασία των θεμάτων αυτής της παραγράφου θα μας χρειαστούν οι παρακάτω ορισμοί καθώς και ένα θεώρημα από την τοπολογία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 11. Ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται **ολικά ασυνεκτικό** (totally disconnected) αν η συνεκτική συνιστώσα κάθε σημείου του A αποτελείται μόνο από αυτό το σημείο ή ισοδύναμα αν για κάθε ζεύγος σημείων x, y του A μπορούμε να βρούμε ξένα μεταξύ τους ανοιχτά σύνολα U, V έτσι ώστε $x \in U$, $y \in V$ και $A \subset U \bigcup V$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 12. Έστω K ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$. Μια απεικόνιση $S \ : \ K \to K$ ονομάζεται **συστολή** (contraction) εάν υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$|S(x) - S(y)| \leq c|x - y|$$

για κάθε x, y στο K.

ΟΡΙΣΜΟΣ 13. Θεωρούμε τις συστολές

$$S_1, S_2, ..., S_m \ : \ K \to K$$

και F υποσύνολο του κλειστού $K \subset \mathbb{R}^2$. Λέμε ότι το F είναι **αναλλοίωτο** (invariant) για τις $S_i, \quad i = 1, 2, ..., m$, αν

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω θεώρημα για την μελέτη της μορφής των συνόλων Julia.

ΘΕΩΡΗΜΑ 23. Θεωρούμε τις συστολές

$$S_1, S_2, ..., S_m \ : \ K \to K.$$

Τότε υπάρχει μοναδικό μη κενό συμπαγές σύνολο F το οποίο είναι αναλλοίωτο για τις $S_i, \quad i = 1, 2, ..., m$, δηλαδή

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(F). \tag{1}$$

Αν επιπλέον στην (1) τα $S_i(F)$ είναι ξένα μεταξύ τους ανά δύο τότε το F είναι ολικά ασυνεκτικό.
Για την απόδειξη βλέπε στο [12].

Στα επόμενα δύο θεωρήματα θα δειχθεί ότι τα σύνολα Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ είναι ολικά ασυνεκτικά σύνολα για αρκετά μεγάλο $|c|$ ενώ είναι απλές κλειστές καμπύλες για αρκετά μικρό $|c|$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 24. Το σύνολο Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ είναι ολικά ασυνεκτικό αν $|c| > \frac{1}{4}(5 + 2\sqrt{6})$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = |c|\} \quad \text{και} \quad D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < |c|\} = I_C.$$

Τότε επειδή $f_c^{-1}(z) = \sqrt{z - c}$ και η f_c^{-1} έχει δύο κλάδους προκύπτει ότι

$$f_c^{-1}(C) = \{(|c|e^{i\theta} - c)^{\frac{1}{2}} \ : \ 0 \leq \theta \leq 4\pi\}.$$

Αφού $c \in C$ το $f_c^{-1}(C)$ είναι ένα σχήμα οκτώ με αυτοτομή στο 0.

Επειδή $|c| > 2$ έχουμε

$$||c|e^{i\theta} - c| \leq |c||e^{i\theta}| + |c| = 2|c| < |c|^2$$

άρα

$$||c|e^{i\theta} - c|^{\frac{1}{2}} < |c|$$

οπότε το σχήμα οκτώ $f_c^{-1}(C)$ βρίσκεται εντός του D. Το εσωτερικό καθενός από τους δύο βρόγχους του $f_c^{-1}(C)$ απεικονίζεται 1-1 και επί μέσω της f_c πάνω στο D. Αν ονομάσουμε $S_1, S_2 \ : \ D \to D$ τους δύο κλάδους της f_c^{-1}, τότε τα $S_1(D), S_2(D)$ είναι τα εσωτερικά των δύο βρόγχων του $f_c^{-1}(C)$. Θέτουμε

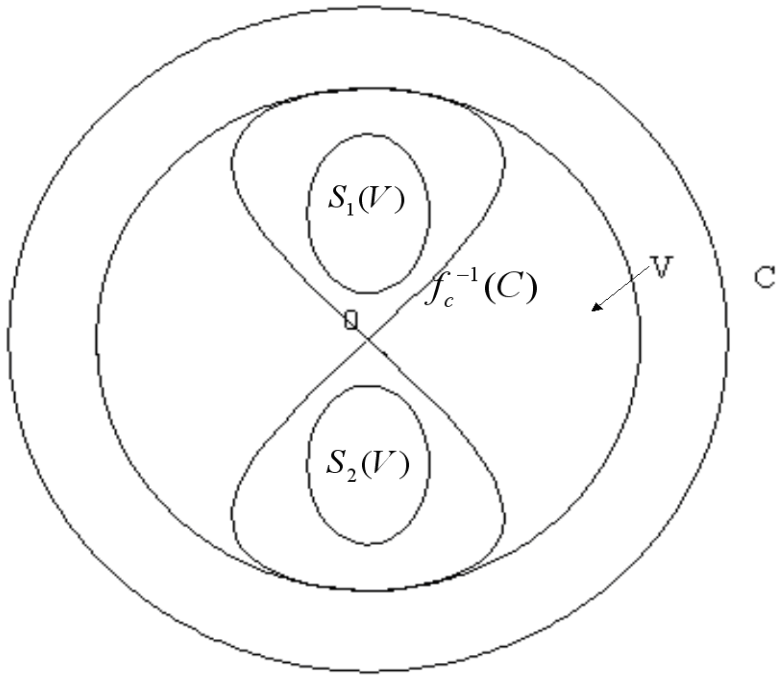
$$V = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < |2c|^{\frac{1}{2}}\}.$$

Για κάθε $z \in D$

$$|f_c^{-1}(z)| = |z - c|^{\frac{1}{2}} \leq (|z| + |c|)^{\frac{1}{2}} < (2|c|)^{\frac{1}{2}} = |2c|^{\frac{1}{2}}.$$

Επομένως

$$S_1(D), S_2(D) \subset V \subset D \quad \text{με} \quad S_1(\overline{V}) \bigcap S_2(\overline{V}) = \emptyset.$$



ΣΧΗΜΑ 14.

Για κάθε $z \in V$ έχουμε

$$|c| - |2c|^{\frac{1}{2}} \leq |z - c| \leq |c| + |2c|^{\frac{1}{2}}$$

άρα

$$\frac{1}{2}(|c|+|2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}|z-c|^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(|c|-|2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$$

επομένως

$$\frac{1}{2}(|c|+|2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \leq |S_i'(z)| \leq \frac{1}{2}(|c|-|2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \quad i=1,2$$

Επειδή

$$|c| > \frac{1}{4}(5+2\sqrt{6}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(|c|-|2c|^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} < 1$$

οι S_1, S_2 είναι συστολές πάνω στο δίσκο $\overline{V}$. Από το θεώρημα 23 υπάρχει μοναδικό, μη κενό, αναλλοίωτο σύνολο $F \subset \overline{V}$ και

$$S_1(F) \bigcup S_2(F) = F.$$

Αφού $S_1(\overline{V}) \bigcap S_2(\overline{V}) = \emptyset$ προκύπτει $S_1(F) \bigcap S_2(F) = \emptyset$, οπότε το F είναι ολικά ασυνεκτικό.

Μένει να δείξουμε ότι $F = J(f_c)$. Το $\overline{V}$ περιέχει ένα απωθητικό σταθερό σημείο της f_c. Πράγματι η εξίσωση $z^2+c=z$ έχει δύο ρίζες με γινόμενο $|c|>1$ και μία τουλάχιστον από τις δύο θα έχει μέτρο μεγαλύτερο του 1, οπότε αν συμβολίσουμε με z_0 την ρίζα αυτή θα έχουμε $|f_c'(z_0)| = 2|z_0| > 1$ δηλαδή το z_0 είναι απωθητικό σταθερό σημείο της f_c. Έχουμε

$$|z_0| = \left|\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}\right| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1+4|c|)^{\frac{1}{2}} \leq |2c|^{\frac{1}{2}}.$$

Η τελευταία ανισοϊσότητα προκύπτει υψώνοντας στο τετράγωνο διαδοχικά τα δύο μέλη της μέχρι να καταλήξουμε στην ισοδύναμη σχέση $4|c|(|c|-2) \geq 0$ η οποία αληθεύει αφού $|c|>2$.
Έτσι το $\overline{V}$ περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο $z_0 \in J(f_c)$ οπότε από το θεώρημα 12

$$J(f_c) = \overline{\bigcup_{\kappa=1}^{\infty} f_c^{-\kappa}(z_0)} \subset \overline{V} \quad \text{αφού} \quad f_c^{-\kappa}(\overline{V}) \subset \overline{V}.$$

Επειδή το $J(f_c)$ είναι ένα μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\overline{V}$ που ικανοποιεί την

$$J(f_c) = f_c^{-1}(J(f_c)) \quad \text{ή} \quad J(f_c) = S_1(J(f_c)) \bigcup S_2(J(f_c))$$

έχουμε $F = J(f_c)$ λόγω μοναδικότητας του F.

ΘΕΩΡΗΜΑ 25. Το σύνολο Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ είναι μια απλή κλειστή καμπύλη αν $|c| < \frac{1}{4}$.

Απόδειξη. Η εξίσωση $z^2 + c = z$ έχει 2 ρίζες με γινόμενο c. Επειδή $|c| < \frac{1}{4}$ μία τουλάχιστον από τις δύο, έστω z_0, θα έχει μέτρο μικρότερο του $\frac{1}{2}$. Το z_0 είναι ελκτικό σταθερό σημείο αφού $f_c(z_0) = z_0$ και $|f_c'(z_0)| = |2z_0| < 1$. Έστω C_0 η καμπύλη $|z| = \frac{1}{2}$ η οποία περικλείει τόσο το c όσο και το ελκτικό σταθερό σημείο z_0 της f_c.

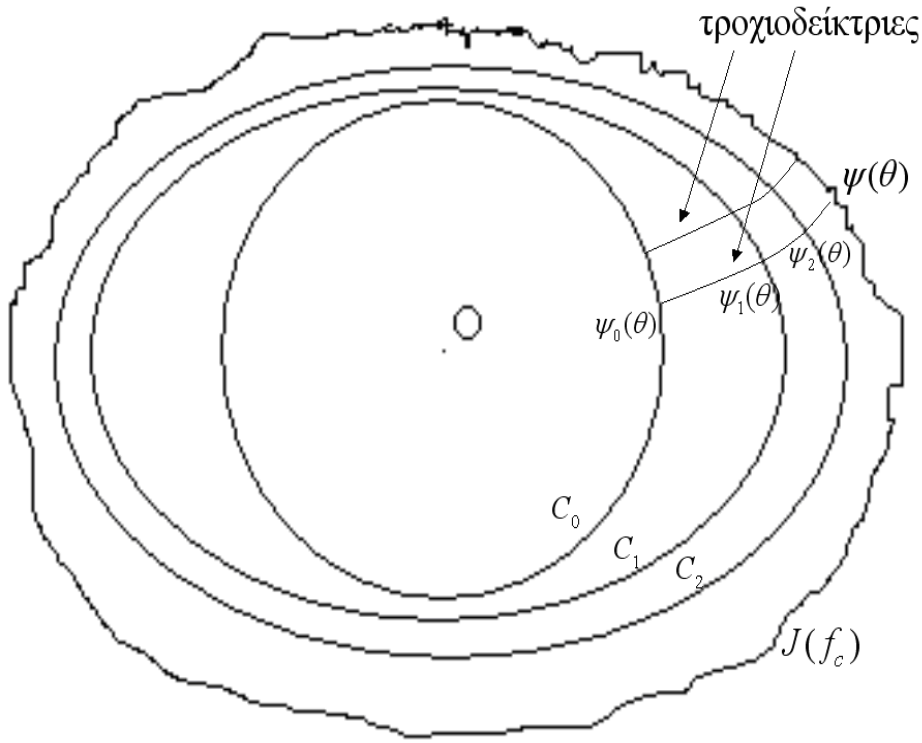
Το $f_c^{-1}(C_0)$είναι ένας βρόγχος C_1 ο οποίος περικλείει τον C_0 αφού λόγω των σχέσεων $|c| < \frac{1}{4}$ και $|z| = \frac{1}{2}$ προκύπτει $|z - c| > \frac{1}{4}$ ή $|z - c|^{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$. Μπορούμε να γεμίσουμε την δακτυλική περιοχή A_1 μεταξύ C_0 και C_1 με μια οικογένεια από καμπύλες τις οποίες θα ονομάζουμε τροχιοδείκτριες (trajectories) οι οποίες ξεκινούν από τη C_0 και φτάνουν στη C_1 ορθογώνια.

Για τυχόν $\theta \in [0, 2\pi)$ έστω $\psi_1(\theta)$ το σημείο στη C_1 που φτάνει η τροχιοδείκτρια που ξεκινά από το σημείο $\psi_0(\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}$ της C_0. Το $f_c^{-1}(A_1) = A_2$ είναι μια δακτυλική περιοχή με εξωτερικό σύνορο το βρόγχο $C_2 = f_c^{-1}(C_1)$ και εσωτερικό σύνορο C_1. Έστω $\psi_2(\theta)$ το σημείο στη C_2 που φτάνει η τροχιοδείκτρια που ξεκινά από το σημείο $\psi_1(\theta)$ της C_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια ακολουθία βρόγχων C_κ , καθένας από τους οποίους περικλείει τον προηγούμενό του και οικογένειες τροχιοδεικτριών που ενώνουν τα σημεία $\psi_\kappa(\theta)$ της C_κ με τα σημεία $\psi_{\kappa+1}(\theta)$ της $C_{\kappa+1}$ για κάθε κ.

Καθώς $\kappa \to \infty$ οι βρόγχοι C_κ πλησιάζουν το $\partial A(z_0) = J(f_c)$. Για z έξω από τον C_1 και επειδή $|c| < \frac{1}{4}$ έχουμε

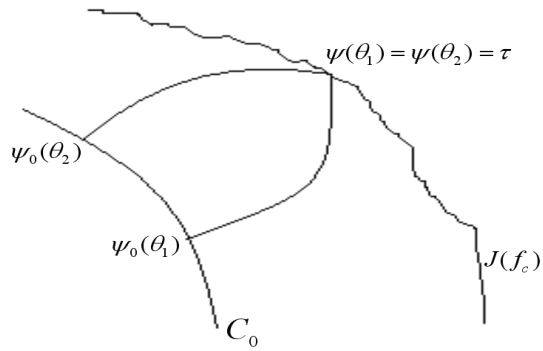
$$|(f_c^{-1})'(z)| = \frac{1}{2}|z - c|^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(|z| - |c|\right)^{-\frac{1}{2}} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - |c|\right)^{-\frac{1}{2}} < 1.$$

Άρα κοντά στο $J(f_c)$ θα έχουμε $|(f_c^{-1})(z_1) - f_c^{-1})(z_2)| < \lambda|z_1 - z_2|$, όπου $\lambda = |(f_c^{-1})'(z)| \in (0,1)$, δηλαδή η f_c^{-1} είναι συστολή κοντά στο $J(f_c)$. Έτσι το μήκος της τροχιοδείκτριας που συνδέει το $\psi_\kappa(\theta)$ με το $\psi_{\kappa+1}(\theta)$ τείνει στο 0 καθώς $\kappa \to \infty$.
Συνεπώς η $\psi_\kappa(\theta)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο [0,2π) σε μια συνεχή συνάρτηση $\psi(\theta)$ καθώς $\kappa \to \infty$ και το $J(f_c)$ είναι μια κλειστή καμπύλη που δίνεται από την $\psi(\theta)$ με $\theta \in [0, 2\pi)$.



ΣΧΗΜΑ 15.

Μένει να δείξουμε ότι η ψ είναι μια απλή καμπύλη. Έστω δύο διαφορετικά θ_1, θ_2 στο [0,2π), χωρίς βλάβη $\theta_1 < \theta_2$, με $\psi(\theta_1) = \psi(\theta_2) = \tau$. Θέτουμε D το χωρίο που φράσσεται από τη C_0 και τις δύο τροχιοδείκτριες που ενώνουν τα $\psi_0(\theta_1)$, $\psi_0(\theta_2)$ με το τ.



ΣΧΗΜΑ 16.

Το ∂D παραμένει φραγμένο από τις αναδρομές της f_c οπότε από την αρχή μεγίστου και το D θα παραμένει φραγμένο από τις αναδρομές της f_c. Το εσωτερικό του D δεν περιέχει σημεία του $J(f_c)$ οπότε κάθε τροχιοδείκτρια που ξεκινά από ένα τυχόν $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$ θα καταλήγει αναγκαστικά στο τ, άρα $\psi(\theta) = \tau$ για κάθε $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$, άτοπο. Άρα η $\psi(\theta)$ δεν έχει αυτοτομές.

Γενικά ισχύει ότι αν το c βρίσκεται εκτός του συνόλου Mandelbrot M το σύνολο Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ είναι ολικά ασυνεκτικό, ενώ αν το c βρίσκεται εντός της βασικής καρδιοειδούς του M το σύνολο Julia της f_c είναι και μια απλή κλειστή καμπύλη.

Τα σταθερά σημεία της $f_c(z) = z^2+c$ τα βρίσκουμε από τις λύσεις της εξίσωσης $z^2 + c = z$, οι οποίες δίνονται από τον τύπο

$$z_0 = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}.$$

Εάν το $|f_c'(z_0)| = |2z_0|$ είναι μικρότερο του 1 τότε το σημείο z_0 είναι ελκτικό ενώ αν είναι μεγαλύτερο του 1 είναι απωθητικό. Η ενδιάμεση περίπτωση $|2z_0| = 1$ καθορίζει και το σύνορο μεταξύ αυτών των δύο καταστάσεων. Έχουμε λοιπόν

$$|2z_0| = 1 \Leftrightarrow |1 \pm \sqrt{1-4c}| = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}e^{i\phi} - \frac{1}{4}e^{2i\phi}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

Θέτοντας $c = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$ παίρνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της καρδιοειδούς

$$\begin{aligned} x =& \frac{1}{2}\cos\phi - \frac{1}{4}\cos(2\phi) \\ y =& \frac{1}{2}\sin\phi - \frac{1}{4}\sin(2\phi) \end{aligned}$$

Από την καρδιοειδή αυτήν ξεφυτρώνει μια ακολουθία από μικρότερες κυκλικές φυσαλίδες που εφάπτονται στην κεντρική καρδιοειδή σε σημεία

$$c_\kappa = x(\phi_\kappa) + y(\phi_\kappa)i$$

που συνδέονται με τις γωνίες

$$\phi_\kappa = \pm\frac{2\pi}{\kappa}, \quad \kappa = 2, 3, 4, ...$$

μέσω των παραμετρικών εξισώσεων της κεντρικής καρδιοειδούς.

Για τιμές του c εντός μιας τέτοιας κ-φυσαλίδας η απεικόνιση f_c έχει μια **ελκτική τροχιά περιόδου κ**, προς την οποία τείνουν οι αναδρομές $\{f_c^n(0)\}$ για $n \to \infty$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ελκτικό περιοδικό σημείο w (περιόδου κ) τέτοιο ώστε η ακολουθία $\{f_c^n(0)\}$ να έχει ως σημεία συσσωρεύσεως τα στοιχεία του συνόλου $\mathcal{O}_{f_c}(w)$. Ο αριθμός 0 στην ακολουθία $\{f_c^n(0)\}$ είναι το μοναδικό **κρίσιμο σημείο** της $f_c(z) = z^2 + c$, δηλαδή σημείο που μηδενίζει την πρώτη παράγωγο της f_c.

Γενικότερα, ο ρόλος των κρίσιμων σημείων μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f, είναι ιδιαίτερα σημαντικός για τη συμπεριφορά των αναδρομών της. Αποδεικνύεται ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f έχει ένα ελκτικό περιοδικό σημείο $w \neq \infty$ (δηλαδή ελκτική τροχιά), τότε οι αναδρομές κάποιου κρίσιμου σημείου θα τείνουν προς αυτήν, δηλαδή η ακολουθία των αναδρομών του κρίσιμου σημείου θα έχει ως σημεία συσσωρεύσεως τα στοιχεία του συνόλου της τροχιάς. Επειδή

κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει το πολύ $n-1$ κρίσιμα σημεία, έπεται ότι θα έχει το πολύ $n-1$ ελκτικά περιοδικά σημεία. Έτσι λοιπόν από όλα τα πεπερασμένα περιοδικά σημεία ενός δευτεροβάθμιου πολυωνύμου το πολύ ένα θα είναι ελκτικό.

Ακόμη μπορεί να παρατηρήσει κάποιος ότι ανάμεσα σε δύο φυσαλίδες με αρίθμηση κ και λ παρεμβάλλεται πάντα μια τρίτη με αριθμό μ=κ+λ που είναι μικρότερη από τις άλλες δύο.

Ας πάρουμε την πιο μεγάλη φυσαλίδα της κεντρικής καρδιοειδούς που αντιστοιχεί στον αριθμό κ=2. Οι φυσαλίδες που προκύπτουν στην περιφέρειά της κατανέμονται με τον ίδιο τρόπο όπως οι φυσαλίδες της μεγάλης καρδιοειδούς με την διαφορά ότι οι αριθμοί που αντιστοιχούν τώρα σε αυτές είναι διπλάσιοι των αντίστοιχων φυσαλίδων της κεντρικής καρδιοειδούς.

Ανάλογα από τη φυσαλίδα με αριθμό κ=3 προκύπτουν φυσαλίδες με αριθμούς τριπλάσιους των αντίστοιχων φυσαλίδων της κεντρικής καρδιοειδούς. Η σχέση του αριθμού κ μιας φυσαλίδας και της μορφής του αντίστοιχου συνόλου Julia της $f_c(z) = z^2 + c$ για c εντός της κ-φυσαλίδας φαίνεται στο σχήμα 17 που ακολουθεί. Μάλιστα αν το c βρίσκεται σε ένα από τα τριχοειδή μέρη του M τότε το αντίστοιχο σύνολο Julia μπορεί να είναι ένας δενδρίτης. Αυτό συμβαίνει όταν μια αναδρομή του κρίσιμου σημείου 0 είναι περιοδική, δηλαδή αν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι m, p ώστε $f_c^m(0) = f_c^{m+p}(0)$.

Αξίζει να αναφερθεί ότι για δύο συγκεκριμένες τιμές του c το $J(f_c)$ είναι πολύ απλό (δεν είναι fractal). Συγκεκριμένα το $J(f_0)$ όπως έχουμε αποδείξει στα προηγούμενα είναι ο κύκλος με κέντρο το 0 και ακτίνα ίση με 1. Ακόμη το $J(f_{-2})$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τους αριθμούς -2 και 2. Ακολουθεί η απόδειξη.

Είναι γνωστή από τη μιγαδική ανάλυση η συνάρτηση Joukowski

$$\mathcal{J} : \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}} \to \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-2, 2]$$

με τύπο

$$\mathcal{J}(z) = z + \frac{1}{z}$$

η οποία είναι σύμμορφη (δηλαδή ολόμορφη, 1-1) και επί, όπου $\mathbb{D}$ είναι ο ανοιχτός δίσκος με κέντρο 0 και ακτίνα 1.

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{J}(f_0(z)) = z^2 + \frac{1}{z^2} = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = f_{-2}(\mathcal{J}(z))$$

οπότε παίρνουμε

$$f_{-2} = \mathcal{J} \circ f_0 \circ \mathcal{J}^{-1}$$

και επαγωγικά

$$f_{-2}^n = \mathcal{J} \circ f_0^n \circ \mathcal{J}^{-1} \ , \ n = 1, 2, 3, ...$$

Έστω z ένας αριθμός που δεν ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$. Τότε $|\mathcal{J}^{-1}(z)| > 1$ και επειδή $f_0^n(\zeta) = \zeta^{2^n}$ έπεται ότι

$$f_0^n(\mathcal{J}^{-1}(z)) = \left(\mathcal{J}^{-1}(z)\right)^{2^n} \to \infty.$$

Άρα θα έχουμε

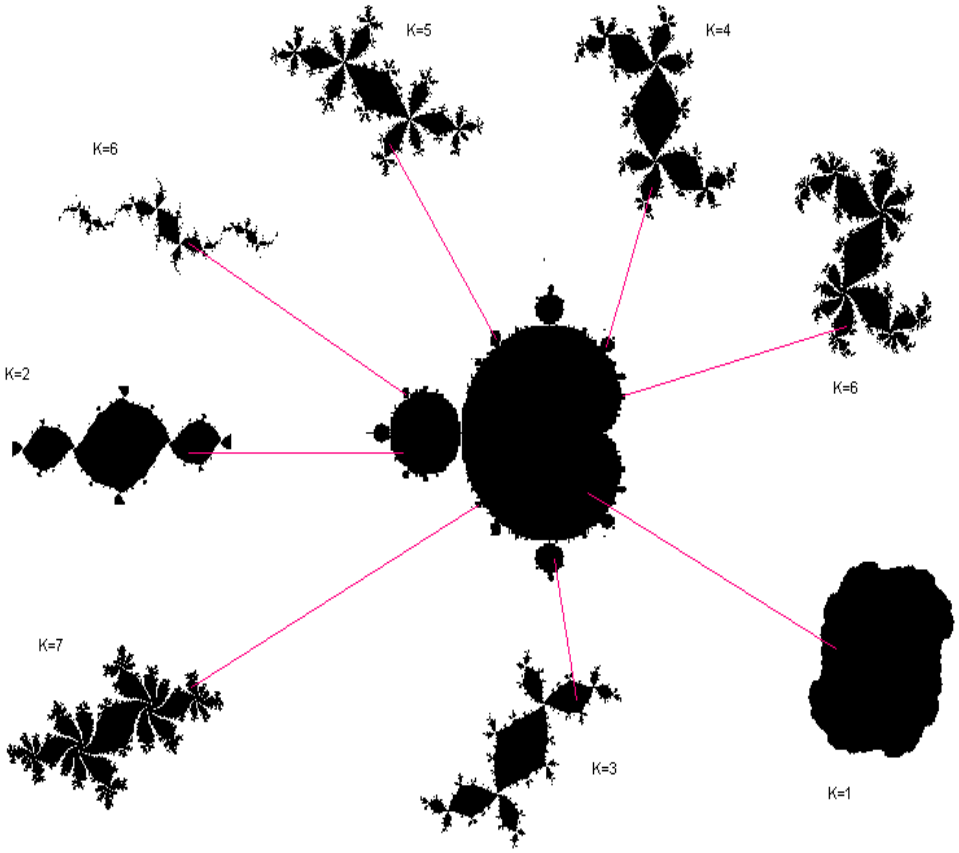
$$f_{-2}^n(z) = \mathcal{J}(f_0^n(\mathcal{J}^{-1}(z))) = f_0^n(\mathcal{J}^{-1}(z)) + \frac{1}{f_0^n(\mathcal{J}^{-1}(z))} \to \infty$$

που σημαίνει ότι $z \in A(\infty)$, δηλαδή το z δεν ανήκει στο $J(f_{-2})$. Άρα αν $z \in J(f_{-2})$ τότε $z \in [-2, 2]$, δηλαδή

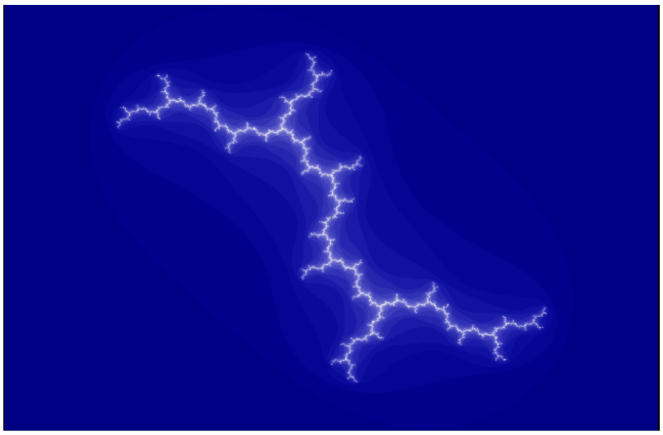
$$J(f_{-2}) \subset [-2, 2].$$

Επειδή $f_{-2}(0) = -2$ και $f_{-2}^n(0) = 2$ για $n = 2, 3, ...$ έπεται ότι η ακολουθία $\{f_{-2}^n(0)\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη και $-2 \in M$. Άρα το $J(f_{-2})$ είναι συνεκτικό.

Αν δείξουμε τώρα ότι τα -2, 2 ανήκουν στο $J(f_{-2})$ θα έχουμε ως συμπέρασμα ότι $J(f_{-2}) = [-2, 2]$. Πράγματι το 2 είναι σταθερό απωθητικό σημείο της f_{-2} αφού $f_{-2}(2) = 2$ και $|f'_{-2}(2)| = 4 > 1$, οπότε $2 \in J(f_{-2})$. Η f_{-2} έχει δύο σταθερά σημεία που είναι και τα δύο απωθητικά. Έτσι αν υποθέσουμε ότι το -2 δεν ανήκει στο $J(f_{-2})$ τότε θα ανήκει αναγκαστικά στο $A(\infty)$ και $f_{-2}^n(-2) \to \infty$ που είναι άτοπο αφού $f_{-2}^n(-2) = 2$ για κάθε $n \geq 1$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $J(f_{-2}) = [-2, 2]$.



ΣΧΗΜΑ 17. Σύνολα Julia για τιμές του c εντός των κ-φυσαλίδων.



ΣΧΗΜΑ 18. Το σύνολο Julia για $c = i$ (δενδρίτης).

Μελετώντας κανείς βιβλία και δημοσιεύσεις εργασιών πάνω στα Δυναμικά Συστήματα (Dynamical Systems) θα έλεγε πως το σύνολο Mandelbrot M έχει γίνει, για αυτούς τουλάχιστον που ασχολούνται με το πεδίο αυτό των μαθηματικών, σήμα κατατεθέν άπειρης πολυπλοκότητας και ανεξάντλητων πληροφοριών.

7 Μέτρο και διάσταση Hausdorff

Η παρακάτω θεωρητική ανάπτυξη βασίζεται στα βιβλία των K. Falconer *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, κεφάλαιο 2 και G. Edgar *Measure, Topology and Fractal Geometry*, κεφάλαιο 6. Όπως έχει αναφερθεί και στην εισαγωγή οι έννοιες του μέτρου και της διάστασης Hausdorff είναι απαραίτητες για μια σε βάθος μελέτη ιδιοτήτων των fractals μεταξύ των οποίων συμπεριλαμβάνονται τα περισσότερα σύνολα Julia. Στην ενότητα αυτή γίνεται μια αναλυτική παρουσίαση αυτών των εννοιών.

ΟΡΙΣΜΟΣ 14. Έστω U ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ονομάζουμε **διάμετρο** του U την ποσότητα

$$|U| = sup\{|x-y| \ : \ x, y \in U\}.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 15. Μια αριθμήσιμη συλλογή $\{U_i\}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ λέγεται **δ-κάλυψη** του $F \subset \mathbb{R}^n$ αν

$$F \subset \bigcup U_i \quad \text{και} \quad 0 < |U_i| < \delta \ , \ \text{για κάθε } i.$$

Έστω $s \geq 0$ και $F \subset \mathbb{R}^n$. Θέτουμε

$$H^s_\delta(F) = inf\left\{\sum |U_i|^s \ : \ \{U_i\} \text{ είναι δ-κάλυψη του } \ F\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι καθώς το δ μειώνεται η κλάση των αποδεκτών καλύψεων του F μειώνεται επίσης. Επομένως το infimum $H^s_\delta(F)$ αυξάνει και πλησιάζει σε ένα όριο καθώς $\delta \to 0$. Γράφουμε

$$H^s(F) = \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(F)$$

Το παραπάνω όριο υπάρχει για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 16. Η συνάρτηση

$$H^s \ : \ \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, +\infty]$$

η οποία αντιστοιχίζει στο τυχόν $F \subset \mathbb{R}^n$ το $H^s(F)$ ονομάζεται s-διάστατο **μέτρο Hausdorff**.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση H^s είναι ένα εξωτερικό μέτρο, δηλαδή ικανοποιεί τα παρακάτω :
α) $H^s(\emptyset) = 0$
β) Για κάθε $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ με $A \subset B$ ισχύει $H^s(A) \leq H^s(B)$
γ) Για κάθε ακολουθία $\{A_i\}$ συνόλων του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$H^s\left(\bigcup A_i\right) \leq \sum H^s(A_i).$$

Επίσης κάθε σύνολο Borel του $\mathbb{R}^n$ είναι H^s-μετρήσιμο, οπότε άν $\{A_i\}$ είναι μια ακολουθία ξένων μεταξύ τους ανά δύο συνόλων Borel θα ισχύει

$$H^s\left(\bigcup A_i\right) = \sum H^s(A_i).$$

Το n-διάστατο μέτρο Hausdorff και το γνωστό n-διάστατο μέτρο Lebesgue συνδέονται μεταξύ τους για Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με την σχέση

$$H^n(F) = c_n vol_n(F),$$

όπου c_n σταθερά που εξαρτάται από το n, δηλαδή το n-διάστατο μέτρο Hausdorff είναι το γνωστό n-διάστατο μέτρο Lebesgue (n-διάστατος όγκος) επί μια σταθερά.

Αξίζει να σημειώσουμε τα εξής:
i) Στον ορισμό του μέτρου Hausdorff μπορούμε να θεωρήσουμε μια δ-κάλυψη μόνο με κλειστά σύνολα αφού για κάθε υποσύνολο U του $\mathbb{R}^n$ ισχύει $|\overline{U}| = |U|$.
ii) Αν το F είναι συμπαγές, στον ορισμό του μέτρου Hausdorff μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο πεπερασμένες δ-καλύψεις του F, αφού κάθε δ-κάλυψη του F μπορεί να επεκταθεί σε μια ανοιχτή δ-κάλυψή του οπότε λόγω συμπάγειας του F μπορούμε να πάρουμε μια πεπερασμένη υποκάλυψή του.

ΘΕΩΡΗΜΑ 26. Για κάθε $F \subset \mathbb{R}^n$ και $\lambda > 0$ ισχύει

$$H^s(\lambda F) = \lambda^s H^s(F).$$

Απόδειξη. Έστω $\{U_i\}$ τυχαία δ-κάλυψη του F. Τότε η $\{\lambda U_i\}$ είναι μια λδ-κάλυψη του λF. Άρα θα έχουμε

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \sum |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum |U_i|^s$$

και επειδή η $\{U_i\}$ είναι τυχαία θα είναι

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \lambda^s \inf \sum |U_i|^s$$

δηλαδή

$$H^s_{\lambda\delta}(\lambda F) \leq \lambda^s H^s_\delta(F).$$

Παίρνοντας $\delta \to 0$ (οπότε και $\lambda\delta \to 0$) έχουμε

$$H^s(\lambda F) \leq \lambda^s H^s(F). \tag{1}$$

Θέτοντας στην παραπάνω σχέση (1) όπου λ το 1/ λ και όπου F το λF παίρνουμε

$$H^s(\frac{1}{\lambda}\lambda F) \leq \frac{1}{\lambda^s} H^s(\lambda F)$$

οπότε θα είναι

$$H^s(\lambda F) \geq \lambda^s H^s(F). \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο.

ΘΕΩΡΗΜΑ 27. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ και $f : F \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in F$, όπου c, α θετικές σταθερές. Τότε για κάθε $s \geq 0$

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^s(F).$$

Απόδειξη. Έστω $\{U_i\}$ τυχαία δ-κάλυψη του F. Τότε η $\{f(F \bigcap U_i)\}$ είναι μια $\varepsilon = c\delta^\alpha$ κάλυψη του $f(F)$ αφού

$$\begin{aligned}
\left|f\left(F \bigcap U_i\right)\right| &= sup\left\{|f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in F \bigcap U_i\right\} \\
&\leq sup\left\{c|x - y|^\alpha \ : \ x, y \in F \bigcap U_i\right\} \\
&\leq c|U_i|^\alpha \\
&< c\delta^\alpha
\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$H_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq \sum \left| f\left(F \bigcap U_i\right)\right|^{\frac{s}{\alpha}} \leq \sum (c|U_i|^{\alpha})^{\frac{s}{\alpha}} = c^{\frac{s}{\alpha}} \sum |U_i|^s$$

και επειδή η $\{U_i\}$ είναι τυχαία θα είναι

$$H_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} \inf \sum |U_i|^s$$

δηλαδή

$$H_{\varepsilon}^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H_{\delta}^{s}(F).$$

Παίρνοντας $\delta \to 0$ (οπότε και $\varepsilon = c\delta^{\alpha} \to 0$) προκύπτει

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) \leq c^{\frac{s}{\alpha}} H^{s}(F).$$

Παρατηρούμε ότι για $\alpha = 1$ (οπότε η f είναι Lipschitz) έχουμε :

$$H^s(f(F)) \leq c^s H^s(F).$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 28. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία, δηλαδή $|f(x) - f(y)| = |x - y|$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $F \subset \mathbb{R}^n$ τότε

$$H^s(f(F)) = H^s(F).$$

Απόδειξη. Έστω $f(F) = Y$. Από την προηγούμενη παρατήρηση για $c = 1$ θα είναι

$$H^s(f(F)) \leq H^s(F). \tag{1}$$

Επειδή όμως όταν η f είναι ισομετρία από το F επί του $f(F) = Y$ τότε και η f^{-1} είναι ισομετρία από το Y επί του $f^{-1}(Y) = F$. Άρα $H^s(f^{-1}(Y)) \leq H^s(Y)$ δηλαδή

$$H^s(F) \leq H^s(f(F)). \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) παίρνουμε το ζητούμενο.

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι επειδή οι μετασχηματισμοί μεταφοράς και περιστροφής είναι ισομετρίες, το μέτρο Hausdorff παραμένει αμετάβλητο μέσω αυτών για κάθε υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, όπως άλλωστε θα περιμέναμε.

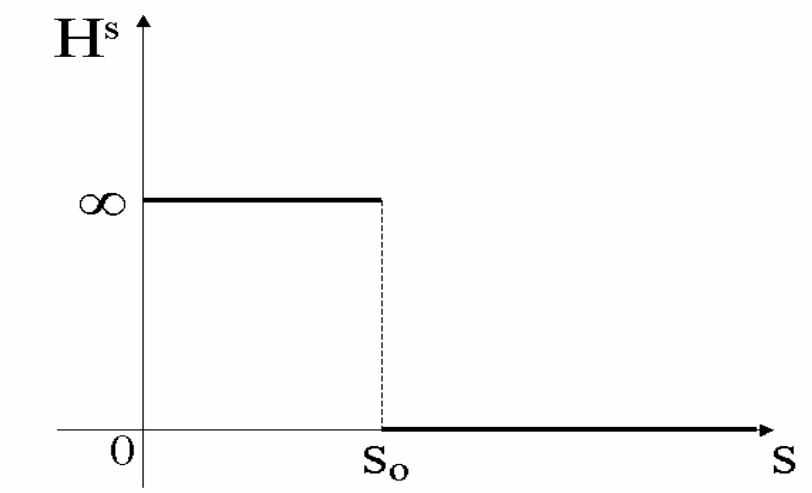
Για ένα σύνολο $F \subset \mathbb{R}^n$ και $\delta < 1$, θεωρούμε την ποσότητα $H^s(F)$ ως συνάρτηση με ανεξάρτητη μεταβλητή το s. Είναι φανερό ότι η συνάρτηση αυτή είναι φθίνουσα. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι $0 \leq s < t$.
Αν $H^s(F) < \infty$ τότε για κάθε δ-κάλυψη $\{U_i\}$ του F έχουμε

$$\sum_i |U_i|^t = \sum_i |U_i|^{t-s}|U_i|^s \leq \sum_i \delta^{t-s}|U_i|^s = \delta^{t-s}\sum_i |U_i|^s.$$

Παίρνοντας infimum έχουμε

$$H^t_\delta(F) \leq \delta^{t-s}H^s_\delta(F).$$

Παίρνοντας όρια με $\delta \to 0$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $H^s(F) < \infty$ έχουμε $H^t(F) = 0$.
Αν $H^t(F) > 0$ τότε θα είναι υποχρεωτικά $H^s(F) = \infty$ διότι αν $H^s(F) < \infty$ με βάση την προηγούμενη διαδικασία θα ήταν $H^t(F) = 0$ που είναι άτοπο.



ΣΧΗΜΑ 19.

Όταν λοιπόν δεν είναι $H^s(F) = 0$ $\forall s$ ή $H^s(F) = \infty$ $\forall s$, εμφανίζεται ένα άλμα από το ∞ στο 0 σε ένα συγκεκριμένο σημείο s_0. Δηλαδή

$$\begin{aligned} H^s(F) &= \infty \qquad \forall s < s_0 \\ H^s(F) &= 0 \qquad \forall s > s_0 \end{aligned}$$

Το $H^{s_0}(F)$ μπορεί να είναι 0 ή ∞ ή πεπερασμένος θετικός αριθμός. Οδηγούμαστε έτσι στον παρακάτω ορισμό:

ΟΡΙΣΜΟΣ 17. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ως **διάσταση Hausdorff** του F την ποσότητα

$$dim_H F = inf\{s \ : \ H^s(F) = 0\} = sup\{s \ : \ H^s(F) = \infty\}.$$

Πριν την αναφορά και την απόδειξη σχετικών θεωρημάτων για την διάσταση Hausdorff δίνεται το παρακάτω παράδειγμα υπολογισμού της διάστασης Hausdorff του συνόλου του Cantor.

Είναι γνωστό από τη θεωρία μέτρου ότι το $\mathcal{C}$ έχει μέτρο Lebesgue ίσο με 0. Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \leq H^s(\mathcal{C}) \leq 1 \quad \text{όπου} \quad s = dim_H(\mathcal{C}) = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63.$$

Έστω $\mathcal{C}_0 = [0,1]$, $\mathcal{C}_1 = [0, \frac{1}{3}] \bigcup [\frac{2}{3}, 1]$ κ.τ.λ. Το όριο της ακολουθίας $\mathcal{C}_n$ είναι το σύνολο $\mathcal{C}$. Παρατηρούμε ότι στην n-οστή επανάληψη $\mathcal{C}_n$ έχουμε 2^n διαστήματα μήκους 3^{-n}, τα οποία θα ονομάζουμε **βασικά διαστήματα**.

Απόδειξη της $\mathbf{H^s(\mathcal{C}) \leq 1}$:
Θεωρούμε μια δ-κάλυψη $\{V_i\}$ του $\mathcal{C}$ με 2^n βασικά διαστήματα μήκους δ=3^{-n}. Είναι

$$H^s_\delta(\mathcal{C}) = inf\left\{\sum |U_i|^s \ : \ \{U_i\} \text{ είναι δ-κάλυψη του } \mathcal{C}\right\}$$

οπότε για την συγκεκριμένη κάλυψη $\{V_i\}$

$$H^s_\delta(\mathcal{C}) \leq \sum_{i=1}^{2^n} |V_i|^s = \sum_{i=1}^{2^n} 3^{-ns} = (3^{-s}2)^n = 1$$

αφού από την σχέση $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ προκύπτει $3^s = 2$. Παίρνοντας $n \to \infty$ ή ισοδύναμα $\delta \to 0$ έχουμε $H^s(\mathcal{C}) \leq 1$.

Απόδειξη της $\mathbf{H^s(\mathcal{C}) \geq \frac{1}{2}}$:
Είναι αρκετό να δειχθεί για τυχούσα δ-κάλυψη $\{U_i\}$ του $\mathcal{C}$ ότι

$$\sum |U_i|^s \geq \frac{1}{2}$$

αφού στη συνέχεια παίρνοντας το inf και $\delta \to 0$ προκύπτει το ζητούμενο. Μάλιστα αφού το $\mathcal{C}$ είναι συμπαγές αρκεί να θεωρήσουμε πεπερασμένες μόνο καλύψεις με κλειστά υποσύνολα του [0,1].

Έστω λοιπόν $\{U_i\}$ μια τυχαία κλειστή κάλυψη του $\mathcal{C}$. Για κάθε σύνολο της κάλυψης U_i υπάρχει ακέραιος κ (που εξαρτάται από το i) τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{3^{\kappa+1}} \leq |U_i| < \frac{1}{3^{\kappa}}.$$

Το U_i αφού έχει μήκος μικρότερο από $3^{-\kappa}$ τέμνει το πολύ ένα βασικό διάστημα μήκους $3^{-\kappa}$. Για $j \geq \kappa$ το U_i τέμνεται το πολύ από $2^{j-\kappa}$ βασικά διαστήματα μήκους 3^{-j}. Είναι όμως

$$2^{j-\kappa} = 2^j(3^s)^{-\kappa} = 2^j 3^s 3^{-s(\kappa+1)} \leq 2^j 3^s |U_i|^s.$$

Επειδή το πλήθος των U_i είναι πεπερασμένο μπορούμε να επιλέξουμε το j αρκετά μεγάλο ώστε η παραπάνω ανισότητα να ισχύει για όλα τα σύνολα U_i και όχι μόνο για κάποιο συγκεκριμένο. Άρα όλη η κάλυψη $\{U_i\}$ τέμνεται από το πολύ

$$2^j 3^s \sum_i |U_i|^s$$

βασικά διαστήματα μήκους 3^{-j}. Όμως τα βασικά διαστήματα μήκους 3^{-j} είναι σε πλήθος 2^j. Άρα

$$2^j \leq 2^j 3^s \sum_i |U_i|^s \Rightarrow \sum_i |U_i|^s \geq 3^{-s} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως αφού υπάρχει s τέτοιος ώστε $H^s(\mathcal{C}) \neq 0, \infty$ θα είναι

$$s = dim_H \mathcal{C} = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Στον παραπάνω υπολογισμό της $dim_H \mathcal{C}$ φαίνεται πως ο υπολογισμός της διάστασης Hausdorff ενός συνόλου έχει δύσκολες πράξεις. Για σύνολα όμως που παρουσιάζουν αυτοομοιότητα και επιπλέον γνωρίζουμε ότι για την τιμή s της διάστασης Hausdorff αυτών το μέτρο Hausdorff δεν είναι 0 ή ∞, τότε ο υπολογισμός αυτής μπορεί να γίνει πολύ εύκολα. Ας δούμε αυτόν τον τρόπο στην περίπτωση του συνόλου $\mathcal{C}$.

Έστω $\mathcal{C}_L = \mathcal{C} \bigcap [0, \frac{1}{3}]$ και $\mathcal{C}_R = \mathcal{C} \bigcap [\frac{2}{3}, 1]$. Προφανώς τα $\mathcal{C}_L$,$\mathcal{C}_R$ είναι γεωμετρικώς όμοια προς το $\mathcal{C}$ με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{3}$. Ακόμη $\mathcal{C} = \mathcal{C}_L \bigcup \mathcal{C}_R$ με $\mathcal{C}_L \bigcap \mathcal{C}_R = \emptyset$. Επομένως για κάθε s

$$H^s(\mathcal{C}) = H^s(\mathcal{C}_L) + H^s(\mathcal{C}_R) = \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(\mathcal{C}) + \left(\frac{1}{3}\right)^s H^s(\mathcal{C})$$

και υποθέτοντας ότι για $s = dim_H \mathcal{C}$ έχουμε $H^s(\mathcal{C}) \neq 0, \infty$, διαιρώντας με $H^s(\mathcal{C})$ παίρνουμε

$$1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^s \Leftrightarrow s = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

Σημειώνεται ότι για τα σύνολα Julia της οικογένειας των συναρτήσεων της μορφής $f_c(z) = z^2 + c$ ισχύουν τα εξής:
Για μικρό $|c|$

$$dim_H(J(f_c)) = 1 + \frac{|c|^2}{4\log 2} + \text{ όροι με } |c|^m, m \geq 3$$

ενώ για μεγάλο $|c|$

$$\frac{2\log 2}{\log[4(|c| + \sqrt{|2c|})]} \leq dim_H(J(f_c)) \leq \frac{2\log 2}{\log[4(|c| - \sqrt{|2c|})]}\,.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 29. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ και $f : F \to \mathbb{R}^m$ τέτοια ώστε $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ για κάθε $x, y \in F$, όπου c, α θετικές σταθερές. Τότε

$$dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} dim_H F.$$

Απόδειξη. Για κάθε $s > dim_H F$ είναι $H^s(F) = 0$, οπότε από το θεώρημα 24 έχουμε

$$H^{\frac{s}{\alpha}}(f(F)) = 0$$

και συνεπώς $dim_H f(F) \leq \frac{s}{\alpha}$.

Παίρνοντας το inf πάνω στα $s > dim_H F$ προκύπτει

$$dim_H f(F) \leq \frac{1}{\alpha} dim_H F.$$

Παρατηρούμε ότι για $\alpha = 1$ από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι αν η f είναι Lipschitz τότε

$$dim_H f(F) \leq dim_H F.$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 18. Έστω $F \subset \mathbb{R}^n$ και $f : F \to \mathbb{R}^m$. Η f ονομάζεται **διπλά Lipschitz** (bi-Lipschitz) αν

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$$

για κάθε $x, y \in F$, όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές.

ΟΡΙΣΜΟΣ 19. Δύο σύνολα A,B ονομάζονται **διπλά Lipschitz ισοδύναμα** αν υπάρχει διπλά Lipschitz συνάρτηση από το A επί του B.

ΘΕΩΡΗΜΑ 30. Αν τα σύνολα A,B είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα τότε έχουν την ίδια διάσταση Hausdorff δηλαδή $dim_H A = dim_H B$.

Απόδειξη. Αφού τα A,B είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα υπάρχει διπλά Lipschitz συνάρτηση f από το A επί του $B = f(A)$. Είναι λοιπόν

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|$$

για κάθε $x, y \in A$, όπου c_1, c_2 θετικές σταθερές.
Επειδή η f είναι Lipschitz θα είναι $dim_H f(A) \leq dim_H A$ δηλαδή

$$dim_H B \leq dim_H A$$

Για την $f^{-1} : B \to A$ (που ορίζεται αφού η f λόγω της σχέσης $c_1|x-y| \leq |f(x)-f(y)|$ είναι 1-1) έχουμε

$$c_1|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| \leq |z-w| \Rightarrow |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| \leq \frac{1}{c_1}|z-w|$$

οπότε

$$dim_H f^{-1}(B) \leq dim_H B.$$

Επειδή $f^{-1}(B) = f^{-1}(f(A)) = A$ προκύπτει

$$dim_H A \leq dim_H B$$

και συνεπώς το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Η παραπάνω πρόταση είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό της διάστασης Hausdorff συνόλων που είναι εικόνες μέσω μιας διπλά Lipschitz συνάρτησης, άλλων συνόλων με γνωστή διάσταση Hausdorff. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ με πεδίο ορισμού το σύνολο του Cantor $\mathcal{C}$ και το γράφημά της

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \,,\, x \in \mathcal{C}\}.$$

Θα υπολογίσουμε τη διάσταση Hausdorff του Γ_f.

Αρχικά παρατηρούμε ότι η f είναι Lipschitz. Πράγματι για κάθε $x, y \in \mathcal{C} \subset [0,1]$ έχουμε

$$|f(x) - f(y)| = \frac{|x^2 - y^2|}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}|x-y|.$$

Όμως

$$\frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \leq \frac{1+1}{(1+0^2)(1+0^2)} = 2$$

οπότε

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x-y|.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g : \mathcal{C} \to \Gamma_f$ με $g(x) = (x, f(x))$ η οποία προφανώς είναι συνάρτηση επί. Η g είναι διπλά Lipschitz. Πράγματι για κάθε $x, y \in \mathcal{C}$ έχουμε

$$|x-y|^2 \leq |g(x)-g(y)|^2 = |x-y|^2 + |f(x)-f(y)|^2 \leq 5|x-y|^2$$

οπότε

$$|x-y| \leq |g(x)-g(y)| \leq \sqrt{5}|x-y|.$$

Άρα τα σύνολα $\mathcal{C}$ και Γ_f είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα και συνεπώς θα έχουν την ίδια διάσταση Hausdorff, δηλαδή

$$dim_H \Gamma_f = dim_H \mathcal{C} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63.$$

8 Χαρακτηρισμός των ψευδόκυκλων από την διάσταση Hausdorff

Στη γεωμετρία των fractals ένας συνήθης τρόπος για να ταξινομηθούν τέτοια σχήματα είναι μέσω της διπλά Lipschitz ισοδυναμίας τους. Είδαμε στην προηγούμενη ενότητα πως αν δύο σύνολα A, B είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα (δηλαδή υπάρχει μια διπλά Lipschitz συνάρτηση από το A επί του B) τότε τα A, B έχουν την ίδια διάσταση Hausdorff. Το αντίστροφο γενικά δεν αληθεύει, οπότε η διάσταση Hausdorff μόνη της δεν είναι ικανοποιητική για την ταξινόμηση αυτή. Όμως σε μια ειδική κατηγορία συνόλων που ονομάζονται ψευδόκυκλοι το αντίστροφο αληθεύει και έτσι τα σύνολα αυτά μπορούν να χαρακτηριστούν μέσω της διάστασης Hausdorff.

ΟΡΙΣΜΟΣ 20.(Βλέπε [13]) Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένας **ψευδόκυκλος** (quasi-circle) αν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:
α) Το A είναι ομοιομορφικό με τον κύκλο $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.
β) Υπάρχουν θετικές σταθερές a, b, r τέτοιες ώστε για κάθε υποσύνολο U του A με $|U| \leq r$, υπάρχει συνάρτηση $\varphi \ : \ U \to A$ με την ιδιότητα

$$a|x-y| \leq |U||\varphi(x) - \varphi(y)| \leq b|x-y|$$

για κάθε $x, y \in U$.
γ) Υπάρχουν θετικές σταθερές r_1, c τέτοιες ώστε για κάθε δίσκο $B(z, R)$ με $z \in A$ και $R < r_1$, υπάρχει συνάρτηση

$$\psi \ : \ A \to B(z,R) \bigcap A \quad \text{με} \quad cR|x-y| \leq |\psi(x) - \psi(y)|$$

για κάθε $x, y \in A$.

Αρκετά συχνά τα σύνολα Julia πολυωνύμων είναι ψευδόκυκλοι. Εκτός της χαρακτηριστικής περίπτωσης των πολυωνύμων της μορφής $f_c(z) = z^2 + c$, όπου το $J(f)$ είναι ένας ψευδόκυκλος αν το c

βρίσκεται εντός της βασικής καρδιοειδούς του συνόλου Mandelbrot M, μπορούμε να αναφέρουμε και ανάλογες περιπτώσεις τριτοβάθμιων πολυωνύμων. Για παράδειγμα το $J(f)$ είναι ένας ψευδόκυκλος εφόσον :

$$f(z) = z^3 + \lambda\,, \ \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq 2\sqrt{3}/9$$

ή

$$f(z) = -z^3 + \lambda\,, \ \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| \leq 4\sqrt{3}/9$$

ή

$$f(z) = z^3 + \lambda z\,, \ \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda| < 1.$$

Επίσης το σύνολο Julia της $f_c(z) = z^n + c$ είναι ένας ψευδόκυκλος για κάθε $n \geq 2$ και με το $|c|$ αρκετά μικρό. Λεπτομέρειες για τα παραπάνω μπορεί κάποιος να βρει στο [7].

Έστω E ένας ψευδόκυκλος. Από τον ορισμό 20 προκύπτει ότι $0 < H^s(E) < \infty$, όπου $s = dim_H E$. Επίσης, αν συμβολίσουμε με $E(x, y)$ το τόξο του E που ορίζεται από τα $x, y \in E$ με φορά διαγραφής τη θετική, αποδεικνύεται ότι $H^s(E(x, y)) > 0$ για $x \neq y$ και η $H^s(E(x, y))$ είναι συνεχής ως προς x, y. Για την απόδειξη του κεντρικού συμπεράσματος της παραγράφου θα χρησιμοποιηθεί το εξής λήμμα: Υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 τέτοιες ώστε

$$c_1 \leq \frac{H^s(E(x, y))}{|x - y|^s} \leq c_2$$

για κάθε $x, y \in E$ με $x \neq y$, όπου τώρα με $E(x, y)$ παριστάνεται το μικρότερο τόξο, δηλαδή $H^s(E(x, y)) \leq H^s(E(y, x)$. Λεπτομέρειες για τα παραπάνω μπορεί κάποιος να βρει στο [13]. Ακολουθεί το κεντρικό συμπέρασμα της παραγράφου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 31. (Βλέπε [13]) Έστω οι ψευδόκυκλοι A, B με

$$dim_H A = dim_H B.$$

Τότε τα A, B είναι είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα.

Απόδειξη. Έστω $m = H^s(A)$ και $n = H^s(B)$ όπου

$$s = dim_H A = dim_H B.$$

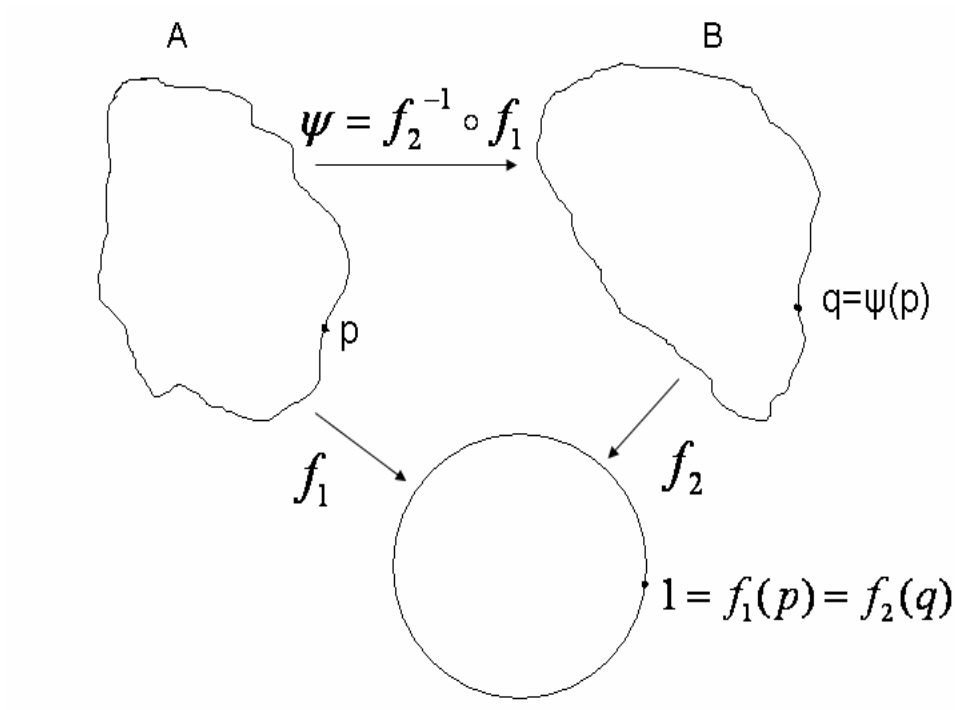
Έστω p τυχόν σημείο του A και

$$\theta(x) = \frac{2\pi}{m} H^s(A(p,x)).$$

Η συνάρτηση f_1 με $f_1(x) = \exp(i\theta(x))$ είναι ένας ομοιομορφισμός του A επί του μοναδιαίου κύκλου D. Επίσης αν q τυχόν σημείο του B και

$$\omega(x) = \frac{2\pi}{n} H^s(B(q,x))$$

η συνάρτηση f_2 με $f_2(x) = \exp(i\omega(x))$ είναι ένας ομοιομορφισμός του B επί του D.
Η συνάρτηση $\psi = f_2^{-1} \circ f_1$ είναι ορισμένη στο A και επί του B και $\psi(p) = q$.



ΣΧΗΜΑ 20.

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{H^s(A(p,x))}{H^s(B(\psi(p),\psi(x)))} = \text{σταθερό} = \frac{m}{n}.$$

Πράγματι

$$\frac{H^s(A(p,x))}{H^s(B(\psi(p),\psi(x)))} = \frac{\frac{m}{2\pi}\theta(x)}{\frac{n}{2\pi}\omega(\psi(x))} = \frac{m}{n}$$

αφού $\omega(\psi(x)) = \theta(x)$.
Θέτοντας $\gamma = \frac{m}{n}$ και επειδή το p είναι τυχόν παίρνουμε τη σχέση

$$H^s(A(x,y)) = \gamma H^s(B(\psi(x),\psi(y)))$$

για κάθε $x, y \in A$.

Από το λήμμα υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2, c_3, c_4 τέτοιες ώστε

$$c_1|x-y|^s \leq H^s(A(x,y)) \leq c_2|x-y|^s$$

και

$$c_3|\psi(x)-\psi(y)|^s \leq H^s(B(\psi(x),\psi(y))) \leq c_4|\psi(x)-\psi(y)|^s.$$

Επομένως έχουμε:

$$c_1|x-y|^s \leq H^s(A(x,y)) = \gamma H^s(B(\psi(x),\psi(y))) \leq \gamma c_4|\psi(x)-\psi(y)|^s$$

άρα

$$c_5|x-y| \leq |\psi(x)-\psi(y)| \quad , \ c_5 > 0.$$

Ακόμη

$$c_2|x-y|^s \geq H^s(A(x,y)) = \gamma H^s(B(\psi(x),\psi(y))) \geq \gamma c_3|\psi(x)-\psi(y)|^s$$

άρα

$$|\psi(x)-\psi(y)| \leq c_6|x-y| \quad , \ c_6 > 0.$$

Τελικά λοιπόν

$$c_5|x-y| \leq |\psi(x)-\psi(y)| \leq c_6|x-y|$$

οπότε η ψ είναι διπλά Lipschitz συνάρτηση από το A επί του B και συνεπώς τα A,B είναι διπλά Lipschitz ισοδύναμα.

9 Επιπλέον στοιχεία και συμπεράσματα

Για το πρώτο μέρος των συμπερασμάτων που ακολουθούν ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [2] τόσο για πληρέστερη ενημέρωση όσο και για βιβλιογραφικές αναφορές.

Όπως έχει αναφερθεί και στην εισαγωγή το κύριο μέρος των εργασιών που εμφανίζεται στις μελέτες των Julia και Fatou πάνω στις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων έχει τις ρίζες του σε δύο λεπτομερείς εργασίες του Γερμανού E. Schröder (1841−1902) και του Βρετανού A. Cayley (1821−1895) πάνω στη μέθοδο του Newton :

$$z_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad n = 0, 1, 2, 3, ...$$

Οι Schröder και Cayley μελέτησαν τη σύγκλιση της μεθόδου του Newton για τη δευτεροβάθμια πολυωνυμική μιγαδική συνάρτηση. Η εργασία του Schröder ήταν πιο γενική και εμφανίζονται αρκετά βασικά συμπεράσματα που έχουν να κάνουν με τις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων. Ο Schröder έγραψε την μέθοδο του Newton στη μορφή

$$N(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

και μελέτησε τις αναδρομές της αναλυτικής συνάρτησης $N(z)$ σε μια περιοχή μιας ρίζας της $f(z)$. Προφανώς εφόσον η $f(z)$ είναι αναλυτική σε μια περιοχή μιας απλής ρίζας της ρ, το ίδιο θα είναι και η $N(z)$, αφού $f'(\rho) \neq 0$. Αν η ρ είναι πολλαπλή ρίζα τότε μπορεί να γίνει άρση της ανωμαλίας αυτής. Σε καθε περίπτωση έχουμε ότι αν $f(\rho) = 0$ τότε $N(\rho) = \rho$. Επίσης το μέτρο του $N'(\rho)$ είναι μικρότερο της μονάδας. Οι εργασίες του Schröder οδήγησαν στο εξής:

Θεώρημα σταθερού σημείου του Schröder

Έστω ότι η συνάρτηση $\phi(z)$ είναι αναλυτική σε μια περιοχή του x, όπου x ελκτικό σταθερό σημείο. Αν $\phi^n(z)$ είναι η n-οστή αναδρομή της $\phi(z)$ τότε για κάθε z σε μια περιοχή του x θα είναι

$$\lim_{n\to\infty} \phi^n(z) = x.$$

Στην προσπάθειά του ο Schröder να βρεί κάποιον τύπο για την n-οστή αναδρομή $\phi^n(z)$ μιας δοθείσας συνάρτησης $\phi(z)$ οδηγήθηκε στη θεώρηση της συζυγούς συνάρτησης της $\phi(z)$. Λέμε ότι η $\phi(z)$ είναι (αναλυτική) συζυγής της $\psi(z)$ στο δίσκο D αν υπάρχει (αναλυτική) συνάρτηση $G(z)$ τέτοια ώστε

$$\phi(z) = (G^{-1} \circ \psi \circ G)(z) \quad \forall z \in D.$$

Πολλές αναδρομικές ιδιότητες, όπως η σύγκλιση σε σταθερό σημείο μέσω αναδρομών, διατηρούνται μέσω της συζυγούς συνάρτησης και γενικά οι αναδρομές της $\phi(z)$ ανάγονται στις αναδρομές της $\psi(z)$ αφού

$$\phi^n = G^{-1} \circ \psi^n \circ G.$$

Ο Schröder ανήγαγε τις αναδρομές μιας τυχούσας συνάρτησης $\phi(z)$ στην $\psi(z) = \lambda z$ ή στην $\psi(z) = z + \lambda$ (λ μιγαδική σταθερά) μέσω των συναρτησιακών εξισώσεων

$$F(\phi(z)) = F(z) + \lambda \tag{1}$$
$$F(\phi(z)) = \lambda F(z) \tag{2}$$

αντιστοίχως, όπου ζητείται η $F(z)$ και είναι $F(z) = G^{-1}(z)$. Μια πιο ειδική μορφή της (2) είναι η

$$F(\phi(z)) = \phi'(x)F(z)$$

με $\phi(x) = x$ και $0 < |\phi'(x)| < 1$, η οποία αποτελεί μια από τις πιο σημαντικές συναρτησιακές εξισώσεις στο πεδίο των αναδρομών μιγαδικών συναρτήσεων.

Επίσης απέδειξε και το παρακάτω θεώρημα που σχετίζεται με τις ρίζες δευτεροβάθμιων πολυωνυμικών μιγαδικών συναρτήσεων:

Άν

α) $q(z)$ ένα μιγαδικό δευτεροβάθμιο πολυώνυμο με δύο διαφορετικές ρίζες a_1 και a_2,

β) $N(z) = z - \frac{q(z)}{q'(z)}$ η συνάρτηση της μεθόδου του Newton για την $q(z)$,

γ) L η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τις ρίζες

της $q(z)$,
δ) H_1, H_2 τα ανοιχτά ημιεπίπεδα στα οποία χωρίζει η L το $\widehat{\mathbb{C}}$ με $a_i \in H_i$ $(i = 1, 2)$ τότε:
i) Για κάθε $z \in H_i$ είναι

$$\lim_{n\to\infty} N^n(z) = a_i \quad i = 1, 2$$

ii) Για κάθε $z \in L$ η $N^n(z)$ δεν συκλίνει ούτε στο a_1 ούτε στο a_2.

Βασιζόμενος στις εργασίες του Schröder ο Γάλλος G. Koenigs (1858-1931) κατά την περίοδο 1883 έως και 1885 μετέτρεψε την μελέτη των αναδρομών μιγαδικών συναρτήσεων σε ένα συνεκτικό και αυστηρά θεμελιωμένο πεδίο των μαθηματικών. Το βασικό αντικείμενο μελέτης του Koenigs ήταν το σύνολο των σημείων συσσωρεύσεως της ακολουθίας

$$\{z_0, \phi(z_0), \phi^2(z_0), ...\} \tag{3}$$

όπου το z_0 είναι σταθεροποιημένο και η $\phi(z)$ αναλυτική στον τόπο G του $\widehat{\mathbb{C}}$. Ο Koenigs έστρεψε το ενδιαφέρον του σε δύο περιπτώσεις:
α) Η (3) έχει μοναδικό όριο x (τότε $\phi(x) = x$ δηλαδή το x είναι σταθερό σημείο)
β) Η (3) έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων συσσωρεύσεως

$$\{x_0, x_1, ..., x_{p-1}\}$$

(τότε $\phi(x_i) = x_{i+1}$ με $x_p = x_0$ δηλαδή το x_i είναι περιοδικό σημείο με περίοδο p)
Επειδή τα περιοδικά σημεία περιόδου p της $\phi(z)$ είναι σταθερά σημεία για την $\phi^p(z)$ ο Koenigs ανήγαγε τη μελέτη των περιοδικών σημείων της $\phi(z)$ σε μελέτη των σταθερών σημείων της $\phi^p(z)$.

Ο Koenigs διατύπωσε μια άλλη εκδοχή του θεωρήματος του σταθερού σημείου του Schröder και κατάλαβε πως η σφαίρα του Riemann είναι ο φυσικός χώρος για να μελετήσει κάποιος τις αναδρομές μιγαδικών συναρτήσεων. Επέκτεινε έτσι τη μελέτη του ώστε να επιτρέπεται το ∞ να θεωρείται ως σταθερό σημείο. Αξίζει να σημειωθεί ότι για κάθε πολυώνυμο το ∞ συμπεριφέρεται ως ένα ελκτικό σταθερό σημείο.

Ας θυμηθούμε τώρα την εξίσωση

$$F(\phi(z)) = \phi'(x)F(z)$$

με $\phi(x) = x$ η οποία με μια αλλαγή συντεταγμένων παίρνει τη μορφή

$$F(\phi(z)) = \phi'(0)F(z) \quad \text{με } \phi(0) = 0. \tag{4}$$

Ο Koenigs έδειξε ότι μια επαρκής συνθήκη για να έχει η (4) αναλυτική λύση σε μια περιοχή του σταθερού σημείου 0 είναι η $0 < |\phi'(0)| < 1$. Η λύση που έδωσε ήταν:

$$F(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{\phi^n(z)}{(\phi'(0))^n}$$

Συμπέρανε επίσης ότι μια τέτοια λύση υπάρχει και όταν $|\phi'(0)| > 1$.

Η περίπτωση $|\phi'(0)| = 1$ ήταν ένα από τα αντικείμενα της εργασίας του Julia πάνω στη θεωρία των αναδρομών που δημοσιεύθηκε το 1918. Ο Fatou ασχολήθηκε με την περίπτωση συτή σε μια εργασία του που δημοσιεύθηκε σε τρία μέρη το 1919 και το 1920. Κάθε μία από τις δύο αυτές εργασίες αντιπροσωπεύει μια νέα προσέγγιση στη μελέτη των αναδρομών. Σε αντίθεση με τις εργασίες των προκατόχων τους οι Julia και Fatou ήταν σε θέση να περιγράψουν αναδρομές τυχαίων μιγαδικών συναρτήσεων μακριά από την περιοχή ενός σταθερού σημείου. Η επιτυχία τους αυτή οφείλεται κατά ένα μεγάλο ποσοστό στο μεγάλο εύρος εφαρμογής της θεωρίας των κανονικών οικογενειών του P. Montel (1876-1975) στις εργασίες τους. Στο γεγονός αυτό οφείλεται και η ομοιότητα προσέγγισης των θεμάτων στις εργασίες τους.

Ο Montel εργάστηκε κυρίως στη θεωρία μιγαδικών συναρτήσεων και η θεωρία του περί κανονικών οικογενειών είναι αυτή που τον έκανε διάσημο. Εφάρμοσε τη θεωρία αυτή με μεγάλη επιτυχία σε θέματα όπως σύγκλιση ακολουθιών και σειρών, θεωρία Picard και θεωρία σύμμορφων απεικονίσεων. Οι πρώτες ολοκληρωμένες εργασίες του Montel πάνω στις κανονικές οικογένειες δημοσιεύθηκαν την περίοδο 1912 έως και 1917. Τα αποτελέσματα των εργασιών αυτών παρουσιάζονται στο βιβλίο του Familles normales το οποίο πρωτοεκδόθηκε το 1927.

Με τη βοήθεια της θεωρίας του Montel είναι δυνατόν να χαρακτηριστεί η συμπεριφορά των αναδρομών μιας δοθείσας συνάρτησης $\phi(z)$ για τυχαία σημεία στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Είναι δυνατόν να χωριστεί το $\widehat{\mathbb{C}}$ σε δύο σύνολα όπου η οικογένεια $\{\phi^n(z)\}$ είναι κανονική ή όχι αντίστοιχα. Αυτή η διαπίστωση είναι ο πυρήνας των εργασιών των Julia και Fatou . Και οι δύο χώρισαν το $\widehat{\mathbb{C}}$ σε περιοχές κανονικότητας και μη κανονικότητας οι οποίες ονομάζονται σήμερα σύνολο Fatou και σύνολο Julia αντίστοιχα. Γενικά τα σημεία του συνόλου Fatou συγλίνουν μέσω αναδρομών σε ελκτικές τροχιές ενώ τα σημεία του συνόλου Julia όχι. Το επόμενο θεώρημα, το οποίο διαπραγματευτήκαμε στο κύριο μέρος της εργασίας (Θεώρημα 15) για πολυώνυμα, αποδείχθηκε τόσο από τον Fatou όσο και από τον Julia και δίνει μια ακριβή περιγραφή του συνόλου J όπου η $\phi(z)$ δεν είναι κανονική: Αν $\phi(z)$ είναι μια ρητή συνάρτηση τότε το σύνολο J όπου η $\phi(z)$ δεν είναι κανονική είναι η κλειστή θήκη του συνόλου

$$T = \left\{ x \ : \ \phi^p(x) = x \ , \ \left| \frac{d\phi^p}{dz}(x) \right| > 1 \right\}$$

Οι Julia και Fatou έδειξαν ότι για ορισμένες συναρτήσεις το σύνολο J ήταν σχετικά περίεργο. Ο Fatou έδειξε ότι το J θα μπορούσε να είναι ένα τελείως μη συνεκτικό σύνολο. Τόσο από τον Fatou όσο και από τον Julia δείχθηκε ότι:

α) το J θα μπορούσε να είναι μια συνεχής καμπύλη $\gamma(t)$ για την οποία η $\gamma'(t)$ δεν ορίζεται για άπειρο πλήθος σημείων

β) μια συνεχής καμπύλη με άπειρο πλήθος διπλών σημείων δηλαδή μια καμπύλη που τέμνει τον εαυτό της άπειρες φορές

γ) μια κλειστή καμπύλη του Jordan

δ) ένα ευθύγραμμο τμήμα

ε) ένα σύνολο που αποτελείται από άπειρα, ξένα μεταξύ τους ανά δύο, κομμάτια.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$\phi(z) = z^m + c$$

ως παράδειγμα ο Fatou παρατήρησε την επίδραση που είχε η μεταβολή της μιγαδικής παραμέτρου c στη δομή του συνόλου J. Αρχικά παρατήρησε

ότι όταν το $|c|$ ήταν αρκετά μεγάλο τότε το J ήταν ένα τελείως μη συνεκτικό σύνολο. Αργότερα έδωσε πιο ακριβείς εκτιμήσεις για το $|c|$ στην γενικότερη περίπτωση της συνάρτησης

$$\phi(z) = zP(z) + c$$

όπου $P(z)$ είναι ένα πολυώνυμο.

Αφού οι Julia και Fatou χρησιμοποίησαν με επιτυχία τη θεωρία των κανονικών οικογενειών του Montel στο χωρισμό της σφαίρας του Riemann σε σύνολα όπου οι αναδρομές της $\phi(z)$ εμφανίζουν την ίδια συμπεριφορά, στη συνέχεια εμβάθυναν περισσότερο. Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα που απέδειξαν είναι ότι το πλήθος των ελκτικών και ουδετέρων περιοδικών σημείων είναι πεπερασμένο. Αφού έδωσαν παραδείγματα όπου το J είναι μια συνεχής καμπύλη που έχει άπειρες αυτοτομές και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι το J δεν έχει εσωτερικά σημεία (εκτός αν είναι ίσο με το $\widehat{\mathbb{C}}$)προκύπτει ότι η καμπύλη χωρίζει το σύνολο Fatou F σε άπειρα κομμάτια. Απέδειξαν και το εξής θεώρημα:
Αν το F δεν αποτελείται από άπειρο πλήθος συνιστωσών(κομματιών), τότε έχει το πολύ δύο συνιστώσες.

Περί το 1980 μια δεύτερη περιόδος αρχίζει στη μελέτη των αναδρομών μιγαδικών συναρτήσεων.

Οι συνεκτικές συνιστώσες του συνόλου Fatou F ονομάζονται σταθερά πεδία (stable domains). Οποιαδήποτε δύο σταθερά πεδία μιας ρητής συνάρτησης f είναι ή ξένα μεταξύ τους ή ταυτίζονται. Αν V είναι ένα σταθερό πεδίο η ακολουθία $\{f^n(V)\}$ ή θα αποτελείται από ξένα μεταξύ τους ανά δύο σταθερά πεδία ή θα υπάρχουν $m \geq 0$ και $p \geq 1$ ώστε $f^{p+m}(V) = f^m(V)$.
Ένα σταθερό πεδίο V λέγεται περιπλανώμενο (wandering domain) εάν

$$f^n(V) \neq f^m(V) \quad \text{για} \quad n \neq m$$

και περιοδικό (periodic domain) αν

$$f^p(V) = V \quad \text{για κάποιο} \quad p \in \mathbb{N}.$$

Ο I.N. Baker (1932-2001) επέκτεινε αρκετή από την δουλειά των Julia και Fatou για ακέραιες και μερόμορφες συναρτήσεις. Χαρακτηριστική είναι η εργασία του πάνω στα περιπλανώμενα πεδία αναδρομών ακεραίων συναρτήσεων (βλέπε [3]).

Ο B. Mandelbrot ειναι ο πρώτος που χρησιμοποίησε γραφικά από υπολογιστή για να ερευνήσει τέτοιες καταστάσεις.

Με τη συγγραφή των βιβλίων του [17] (είχε προηγηθεί η γαλλική έκδοση το 1975) και [18] αποκάλυψε την ομορφιά και χρησιμότητα πολύπλοκων συνόλων που ο ίδιος ονόμασε fractals από το λατινικό fractus που σημαίνει κομματιασμένος. Για την περιγραφή των συνόλων αυτών δεν επαρκούσε η κλασική Ευκλείδεια Γεωμετρία. Χρειαζόταν μια γεωμετρία της πολυπλοκότητας τις οποίας τα θεμέλια είχαν ήδη τεθεί στις αρχές του εικοστού αιώνα από τον F. Hausdorff με τις έννοιες του μέτρου και της διάστασης F. Hausdorff, ο οποίος με τη σειρά του βασίστηκε σε εργασίες του Έλληνα μαθηματικού Κ. Καραθεοδωρή.

Ο Mandelbrot εκμεταλεύτηκε τις μεγάλες δυνατότητες των ηλεκτρονικών υπολογιστών για να αναδείξει την πολυπλοκότητα των σχημάτων αυτών. Με την μελέτη του πάνω στις αναδρομές συναρτήσεων της μορφής

$$f_c(z) = z^2 + c$$

πέτυχε να κατατάξει τα σύνολα Julia της f_c με τη βοήθεια ενός συνόλου που σήμερα φέρει το όνομά του . Ο Mandelbrot έδωσε και τις πρώτες εικόνες για το σύνολο αυτό μελετώντας για ποιες τιμές του c το σύνολο Julia της f_c είναι συνεκτικό ή όχι.

Η ανακάλυψή του για το σύνολο που φέρει το όνομά του προέτρεψε πολλούς μαθηματικούς να ερευνήσουν ακόμη περισσότερο αυτό το πεδίο.

Για παράδειγμα ο D. Sullivan εισήγαγε τη χρήση των ψευδοσύμμορφων μετασχηματισμών μιας ρητής συνάρτησης και με τη βοήθεια αυτού του εργαλείου να αποδείξει ένα πρόβλημα που παρέμενε ανοιχτό από την εποχή των Julia και Fatou .Το πρόβλημα ήταν αν υπάρχουν περιπλανώμενα πεδία για ρητές συναρτήσεις. Ο Sullivan λοιπόν το 1985 έλυσε το πρόβλημα αυτό και έδειξε ότι δεν υπάρχουν

περιπλανώμενα πεδία για ρητές συναρτήσεις (βλέπε [29]). Η απόδειξη του Sullivan ήταν μακροσκελής μιας και έπρεπε να διακρίνει αρκετές περιπτώσεις για το περιπλανώμενο πεδίο: αν είναι απλά συνεκτικό, διπλά συνεκτικό, πεπερασμένα πολλαπλά συνεκτικό ή απείρως πολλαπλά συνεκτικό.

Χρησιμοποιώντας μια πρόταση που οφείλεται στον I.N. Baker μπορεί κάποιος να απλουστεύσει την απόδειξη του Sullivan και να θεωρήσει μόνο την περίπτωση απλά συνεκτικού περιπλανώμενου πεδίου. Η πρόταση αυτή διατυπώνεται ως εξής:
Αν η ρητή συνάρτηση f έχει ένα περιπλανώμενο πεδίο τότε η f έχει επίσης και ένα απλά συνεκτικό περιπλανώμενο πεδίο.

Οι Douady και Hubbard άνοιξαν νέους ορίζοντες με τη θεώρηση του παραμετρικού χώρου για δευτεροβάθμια πολυώνυμα και απέδειξαν ότι το σύνολο Mandelbrot M είναι συνεκτικό (βλέπε [10]). Ανοιχτό παραμένει το ερώτημα αν είναι τοπικά συνεκτικό. Ένα σημαντικό βήμα προς την κατεύθυνση αυτή έγινε από τον Yoccoz ο οποίος βρήκε ότι τα σύνολα $J(f_c)$ και M είναι τοπικά συνεκτικά αν το $c \in M$ πάρει συγκεκριμένες ειδικές τιμές (βλέπε [20]).

Ο Curt McMullen έδειξε (βλέπε [19]) ότι για τις παρακάτω οικογένειες ακεραίων συναρτήσεων

$$\{f(z) = \lambda \exp(z) \,:\, \lambda \neq 0\} \quad (\text{η εκθετική οικογένεια })$$

και

$$\{f(z) = \sin(\alpha z + \beta) \,:\, \alpha \neq 0\} \quad (\text{η ημιτονοειδής οικογένεια })$$

ισχύουν τα εξής θεωρήματα:
Θ1) Το σύνολο Julia κάθε μέλους της εκθετικής οικογένειας έχει πάντα διάσταση Hausdorff ίση με 2.
Θ2) Το σύνολο Julia κάθε μέλους της ημιτονοειδούς οικογένειας έχει πάντα θετικό εμβαδό.
Ανοιχτό παραμένει το ερώτημα αν το σύνορο του συνόλου Mandelbrot έχει θετικό εμβαδό. Μια πολύ σπουδαία εργασία του McMullen (βλέπε [21]) αφορά τα λεγόμενα γενικευμένα σύνολα Mandelbrot που ορίζονται για πολυώνυμα της μορφής

$$f_c(z) = z^d + c \quad , d \in \mathbb{Z} \quad , d \geq 2.$$

όμοια με το κλασικό .

Ο M. Lyubich (βλέπε [16]) έδειξε ότι κάτω από ορισμένες προυποθέσεις για την συνάρτηση $f_c(z) = z^2 + c$ παίρνουμε ως συμπέρασμα ότι το μέτρο Lebesgue του συνόλου $J(f_c)$ είναι 0. Ένα ερώτημα που εξακολουθεί να παραμένει ανοιχτό είναι αν υπάρχει σύνολο Julia πολυωνύμου με θετικό εμβαδό (μέτρο Lebesgue).

Ο M. Shishikura (βλέπε [27]) έδειξε ότι το σύνορο του συνόλου Mandelbrot έχει διάσταση Hausdorff ίση με 2.

Ο W. Bergweiler (βλέπε [6]) έδειξε τη χρησιμότητα του θεωρήματος των πέντε νήσων του Ahlfors στην Μιγαδική Δυναμική (Complex Dynamics). Μια εκδοχή του θεωρήματος αυτού είναι η ακόλουθη:
Έστω $D_1, D_2, .., D_5$ τόποι στο $\widehat{\mathbb{C}}$ οι κλειστές θήκες των οποίων ανά δύο έχουν κενή τομή. Αν D είναι ένας ακόμη τόπος στο $\widehat{\mathbb{C}}$ και συμβολίσουμε με $\mathcal{F}$ την οικογένεια όλων των μερόμορφων συναρτήσεων $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ με την ιδιότητα κανένα υποσύνολο του D να απεικονίζεται σύμμορφα και επί σε κάποιο D_i , $i = 1, ...5$ μέσω της f.
Τότε η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι κανονική.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα αυτό ο Bergweiler έδωσε απαντήσεις σε διάφορα ερωτήματα όπως π.χ σχετικά με τη διάσταση Hausdorff των συνόλων Julia και την ύπαρξη απωθητικών περιοδικών σημείων.

Ακολούθησαν και άλλοι μαθηματικοί με παραγωγή νέων συμπερασμάτων και ιδεών. Αυτό που μπορεί κάποιος να παρατηρήσει εύκολα είναι μια δυναμική που συνεχώς αναπτύσσεται στο πεδίο αυτό των μαθηματικών.

10 Βιβλιογραφία [1]

Ελληνική

[*A*] Μερκουράκης Σ., Χατζηαφράτης Τ., *Εισαγωγή στη Μιγαδική Ανάλυση*, Συμμετρία, 2005.
[*B*] Μπουντής Τ., *Ο θαυμαστός κόσμος των fractal*, Leader Books, 2004.

Ξενόγλωσση

[1] Ahlfors, L.V., *Complex Analysis*, Second Edition, McGraw-Hill, New York, 1966.
[2] Alexander, D., *A History of Complex Dynamics: From Schröder to Fatou and Julia*, Vieweg, 1994.
[3] Baker,I.N., *Wandering Domains in the Iteration of Entire Functions*, Proc. London Math. Soc. 49 (1984) 563-576.
[4] Beardon, A.F., *Iteration of Rational Functions*, Springer-Verlag, New York, 1991.
[5] Berglund, N., *Geometrical theory of dynamical systems (lecture notes)*, 2001,
http://dpwww.epfl.ch/instituts/ipt/berglund/dynsys.ps.gz
[6] Bergweiler, W., *The role of the Ahlfors five islands theorem in complex dynamics*, Conformal Geometry and Dynamics 4 (2000) 22-34.
[7] Brolin, H., *Invariant sets under iteration of rational functions*, Arkiv Math. 6 (1965) 103-144.
[8] Carleson, L., Gamelin, T., *Complex Dynamics*, Springer-Verlag, 1993.
[9] Devaney, R.L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Second Edition, Addison-Wesley, Redwood City, 1989.
[10] Douady, A., Hubbard, J.H., *On the dynamics of polynomial-like mappings*, Ann. Sci. Ecole Norm, Sup.18 (1985) 287-344.
[11] Edgar, G., *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer-

[1] Όλες οι διευθύνσεις των ιστοσελίδων που αναφέρονται στη βιβλιογραφία ήταν ενεργές στις $10-12-2007$.

Verlag, New York, 1990.
[12] Falconer, K., *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*, Wiley, New York, 1990.
[13] Falconer, K.J., Marsh, D.T., *Classification of quasi-circles by Hausdorff dimension*, Nonlinearity 2 (1989) 489-493.
[14] Hutchinson, J., *Fractals and self-similarity*, Indiana University Journal of Mathematics 30 (1981) 713-747.
[15] Lei, T., *The Mandelbrot Set, Theme and Variations*, Cambridge University Press, 2000.
[16] Lyubich, M., *On the Lebesgue measure of the Julia set of a quadratic polynomial*, SUNY Stony Brook, preprint, 1991.
[17] Mandelbrot, B.B., *Fractals: Form,Chance and Dimension*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.
[18] Mandelbrot, B.B., *The Fractal Geometry of Nature*,W.H. Freeman and Co., New York, 1982.
[19] McMullen, C., *Area and Hausdorff dimension of Julia sets of entire functions*, 1986,
http://www.math.harvard.edu/∼ctm/papers/home/text/papers/entire/entire.pdf
[20] McMullen, C., *Frontiers in Complex Dynamics*, 2003,
http://www.math.harvard.edu/∼ctm/papers/home/text/papers/front/front.pdf
[21] McMullen, C., *The Mandelbrot set is universal*, 2003,
http://www.math.harvard.edu/∼ctm/papers/home/text/papers/muniv/muniv.pdf
[22] Milnor, J., *Dynamics in one complex variable*,Third Edition, Princeton University Press, 2006.
[23] Peitgen, H.O., Jürgens, H., Saupe, D., *Fractals for the Classroom: Part 2-Complex systems and Mandelbrot set*, Springer-Verlag, New York, 1992.
[24] Peitgen, H.O., Richter, P.H., *The Beauty of Fractals*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1986.
[25] Pilgrim, K., *Complex Dynamics-an overview (informal notes)*, 1998,

http://www.umr.edu/∼pilgrim/Research/Papers/overview.pdf
[26] Scheinerman, E.R., *Invitation to Dynamical Systems*, Prentice Hall, 1995.
[27] Shishikura, M., *The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets*, Ann. Math. 147 (1998) 225-267.
[28] Steinmetz, N., *Rational Iteration: Complex Analytic Dynamical Systems*, Walter de Gruyter, 1993.
[29] Sullivan, D., *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I*, Ann. Math. 122 (1985) 401-418.