ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ′ ΛΥΚΕΙΟΥ

(Τελευταία ενημέρωση: Νοέμβριος 2016)

Ανέστης Τσομίδης
Κατερίνη

Περιεχόμενα

1 Συναρτήσεις - Όρια - Συνέχεια

1.1 Η έννοια της συνάρτησης - Πράξεις συναρτήσεων

1.1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{3x-6}}{x-5}$ β) $g(x)=\sqrt{x}\cdot ln\left(x^2-5x+6\right)$ γ) $h(x)=\sqrt{3-\sqrt{x}}$

1.2. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^3-x^2+x-1}$ β) $g(x)=ln\left(|x-1|-2\right)$ γ) $h(x)=\sqrt{3-lnx}$

1.3. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^3+x^2-2}}{e^x-3}$ β) $g(x)=log\left(log\left(2-|x-2|\right)\right)$ γ) $h(x)=\dfrac{lnx}{logx}$

1.4. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\ln\left(9^x-4\cdot 3^x+3\right)$ β) $g(x)=ln\left(\dfrac{1-e^x}{e^x-e}\right)$ γ) $h(x)=\dfrac{4}{\sqrt{lnx}-1}$

1.5. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{e^x+2^x}{2\sigma\upsilon\nu x+1}$ β) $g(x)=\dfrac{x^2+x}{\sqrt{2}\eta\mu x+1}$ γ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu x}}{3\eta\mu x-4}$

1.6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}2lnx, & x\geq 1\\ \sqrt{4-x^2}, & -2\leq x<1\end{cases}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(-1)$, $f(e)$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x)=1/2$.

1.7. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x\in[-4,4]\\ -\sqrt{x}+1, & x>4\end{cases}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f(4)$, $f(16)$, $f(-2)$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x)=5$.

1.8. Θεωρούμε ορθογώνιο μήκους x, πλάτους y και εμβαδού 50.
α) Να βρείτε την περίμετρο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.
β) Να βρείτε τη διαγώνιο του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x.

1.9. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους 10 σε δύο κομμάτια. Με το πρώτο κομμάτι κατασκευάζουμε κύκλο και με το δεύτερο τετράγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του μήκους x του πρώτου κομματιού.

1.10. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2,5)$, $B(-2,0)$, $\Gamma(8,0)$. Θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ της ΑΓ με τετμημένη x. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΜΒΓ ως συνάρτηση του x.

1.11. Θεωρούμε τα σημεία $A(0,5)$ και $B(-4,0)$. Μια ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΟΒ στα σημεία Γ, Δ αντίστοιχα, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου ΒΓΔ ως συνάρτηση της τετμημένης x του σημείου Δ.

1.12. Να εξετάσετε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να είναι ίσες.

α) $f(x) = \dfrac{lnx^5}{5}$, $g(x) = \dfrac{lnx^3}{3}$ β) $f(x) = 2ln\,(x-1)$, $g(x) = ln\,(x-1)^2$

1.13. Να εξετάσετε σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο να είναι ίσες.

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4x-4}}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ β) $f(x) = \left(\sqrt{x+3}\right)^2$, $g(x) = x\left(\dfrac{3}{x}+1\right)$

1.14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 4x\sqrt{x}$ και $g(x) = xln(2-x)$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \cdot g$ και f/g.

1.15. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = ln(x-2)$ και $g(x) = ln(x-3)$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f-g$.

1.16. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 4, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 5, & x < 0 \end{cases}.$$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f(x) \cdot g(x)$.
β) Εξετάστε την ορθότητα της πρότασης: "Αν $f(x) \cdot g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $g(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$."

1.17. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} -5, & x \geq 0 \\ 5, & x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = 5\,,\, x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
β) Εξετάστε την ορθότητα της πρότασης: "Αν $f^2(x) = g^2(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) = -g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$."

1.2 Γραφική παράσταση συνάρτησης

1.18. Δίνονται τα σημεία $A(-1,4)$, $B(-2,a+3)$, όπου α πραγματικός αριθμός και η συνάρτηση $f(x)=-x^2+6$.
α) Να εξετάσετε αν το σημείο A ανήκει στην γραφική παράσταση της f.
β) Να βρείτε την τιμή του a ώστε το σημείο B να ανήκει στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

1.19. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης f με τους άξονες $x'x$, $y'y$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=2x^3-7x^2+7x-2$ β) $g(x)=log(x-2)-3$ γ) $h(x)=\sqrt[4]{x-4}+7$

1.20. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=3x^2-4x,\ g(x)=2x^2-3$ β) $f(x)=5x^2+x+5,\ g(x)=3x^2+2$

1.21. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=5\,|x-3|-10$ και $g(x)=4x-x^3$.
α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης g βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

1.22. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=e^{2x}-e^x$ και $g(x)=5e^x-5$. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g.

1.23. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f_a οι οποίες για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$ ορίζονται από τον τύπο $f_a(x)=x^6+ax^4-a$.
α) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f_0 και f_1 έχουν ακριβώς δύο κοινά σημεία.
β) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f_a, για τις διάφορες τιμές του $a\in\mathbb{R}$, διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.

1.24. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=lnx$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)\,,\quad \varphi_1(x)=-lnx\,,\quad \varphi_2(x)=ln(-x)\,,\quad \varphi_3(x)=lnx-2\,,\quad \varphi_4(x)=ln(x-2).$$

1.25. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=e^x$. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)\,,\quad \varphi_1(x)=-e^x\,,\quad \varphi_2(x)=e^{-x}\,,\quad \varphi_3(x)=e^x+1\,,\quad \varphi_4(x)=e^{x+1}.$$

1.26. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\geq 1\\ 2x^2, & x<1\end{cases},\quad g(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x\in[0,2\pi]\\ -x, & x\in[-2\pi,0)\end{cases}.$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε με τη βοήθεια αυτής το σύνολο τιμών της f.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g και να βρείτε με τη βοήθεια αυτής το σύνολο τιμών της g.

1.27. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = |3x-6| + x \quad \text{και} \quad g(x) = |x|\,\frac{e^x}{x}.$$

α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε με τη βοήθεια αυτής το σύνολο τιμών της f.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της g και να βρείτε με τη βοήθεια αυτής το σύνολο τιμών της g.

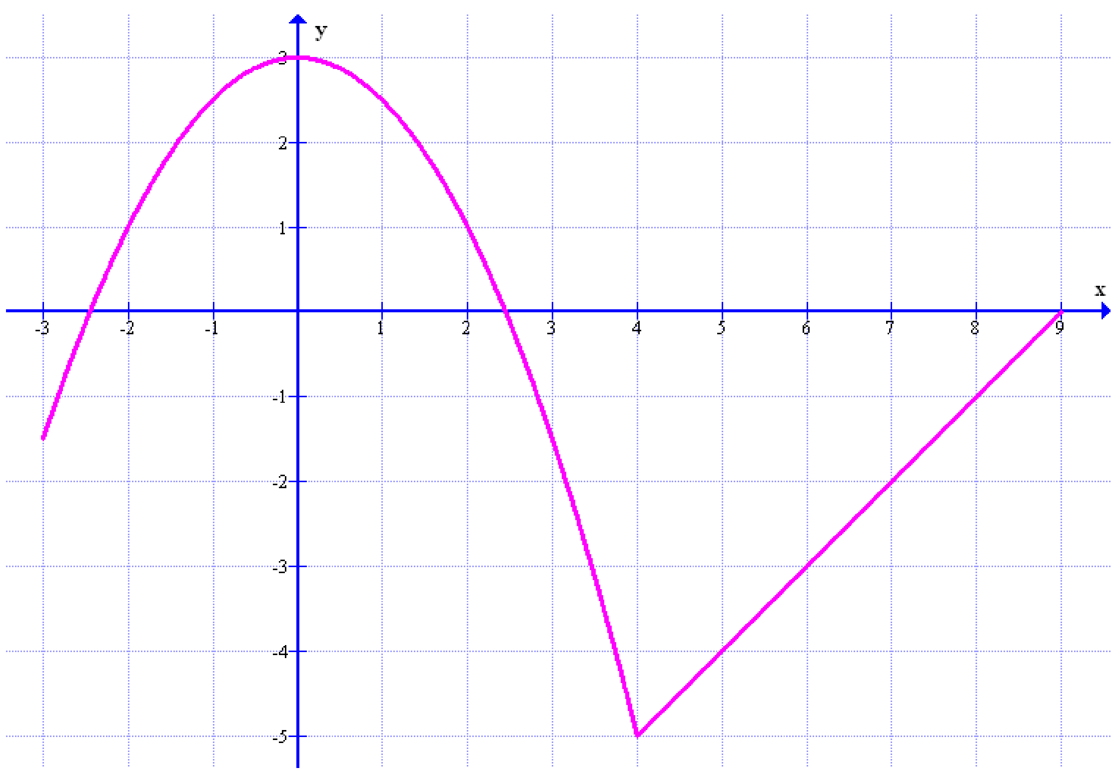
1.28. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = |lnx|$ β) $g(x) = |\eta\mu x|$ γ) $h(x) = \sqrt{1-x^2}$ δ) $\varphi(x) = \sqrt{1-4x^2}$.

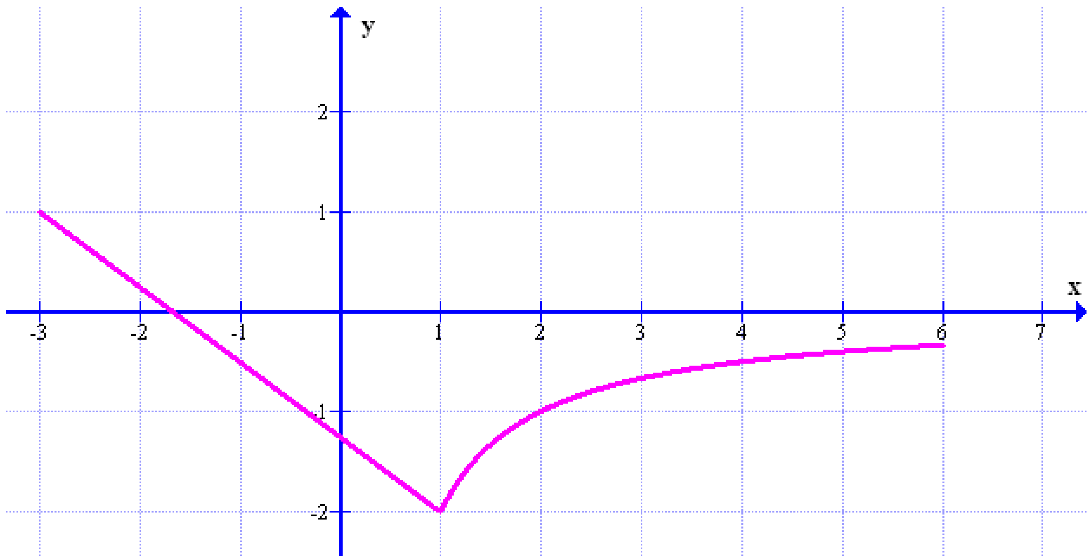
1.29. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = |x-2|$ β) $g(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$ γ) $h(x) = \sqrt{9-x^2}$ δ) $\varphi(x) = \sqrt{1+x^2}$.

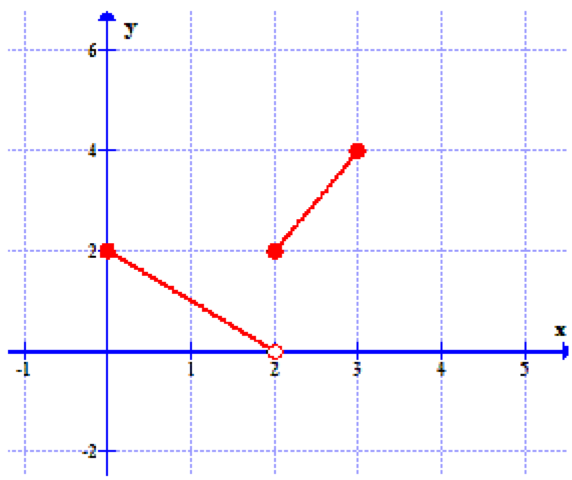
1.30. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f η οποία αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα τμήμα παραβολής της μορφής $y = ax^2 + \beta$. Να βρείτε τον τύπο της f.



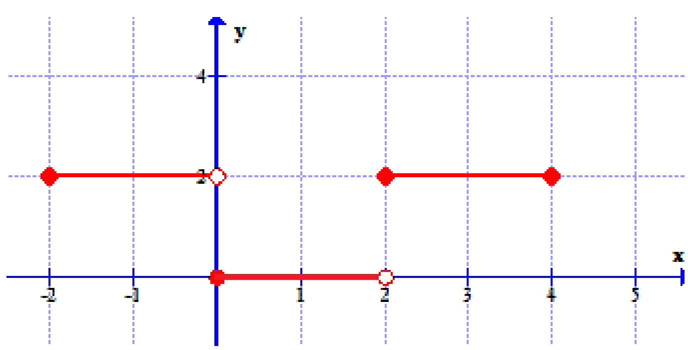
1.31. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f η οποία αποτελείται από ένα ευθύγραμμο τμήμα και ένα τμήμα υπερβολής της μορφής $y = a/x$. Να βρείτε τον τύπο της f.



1.32. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε τον τύπο της f.



1.33. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Να βρείτε τον τύπο της f.



1.3 Σύνθεση συναρτήσεων

1.34. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ και $g(x) = 3\sqrt{x} - 2$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ και $g \circ g$.

1.35. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = ln(x-e)$ και $g(x) = \sqrt{x-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ και $g \circ g$.

1.36. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-2, 3]$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g σε καθεμία απο τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $g(x) = f(3x-4)$ β) $g(x) = f(lnx)$ γ) $g(x) = f\left(e^x\right)$ δ) $g(x) = f\left(x^2-5\right)$

1.37. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{x}.$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

1.38. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 0 \\ 3x-4, & x < 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 1 \\ -x+2, & x < 1 \end{cases}.$$

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

1.39. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx$, $g(x) = \sqrt{x} - 1$ και $\varphi(x) = \sqrt[3]{x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g \circ \varphi$ και $g \circ \varphi \circ f$.

1.40. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(2x-4) = x^2 - 3x\,,\ x \in \mathbb{R}$ β) $f(-x+3) = 2x^2 + 5x\,,\ x \in \mathbb{R}$

1.41. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f\left(1/\sqrt{x}\right) = \dfrac{x^2+1}{x^2}\,,\ x > 0$ β) $f(e^x) = 2x - e^x\,,\ x \in \mathbb{R}$

1.42. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $5f(x) + f(2-x) = x\,,\ x \in \mathbb{R}$ β) $3f(1-x) + f(x) = 4 + x^2\,,\ x \in \mathbb{R}$

1.43. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ αν είναι γνωστό ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x-2) - 4f(3-x) = 10x - 31.$$

1.44. Να βρείτε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $(g \circ f)(x) = 4x - 3$ και $g(x) = 8x - 1$ β) $(g \circ f)(x) = e^x$ και $g(x) = e^x - 1$

1.45. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$(f \circ f)(x) = 4x + 3 \quad \text{και} \quad (f \circ f \circ f)(x) = 8x + 7.$$

1.46. Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x^2 + 1$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, όπου

$$f(x) = \frac{2x+3}{x-2}.$$

1.47. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = ax + \beta$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε να ισχύει η σχέση $f \circ g = g \circ f$.

1.48. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f\left(x^2 + 6\right) + f(5x) = 0.$$

Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο τουλάχιστον σημεία.

1.49. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = -f(x)$ και $f(3x) = 3f(x)$.

1.50. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $f(0) \neq 0$, τέτοια ώστε για κάθε x, $y \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y).$$

Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(-x) = (f(x))^{-1}$ και $f(3x) = (f(x))^3$.

1.51. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f\left(f(x)\right) = x^2 - 2x + 2.$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(x^2 - 2x + 2\right) = f^2(x) - 2f(x) + 2$.
β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο $(1, 2)$, να υπολογίσετε την τιμή $f(1)$.

1.52. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f\left(f(x)\right) = x^2 - 8x + 20.$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f\left(x^2 - 8x + 20\right) = f^2(x) - 8f(x) + 20$.
β) Αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το σημείο $(4, 5)$, να υπολογίσετε την τιμή $f(4)$.

1.4 Μονοτονία - ακρότατα

1.53. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = 3\sqrt{2x-1} + 5$ β) $g(x) = -2ln(x-1) + 4$ γ) $h(x) = \dfrac{4}{\sqrt{5-x}} + 13$

1.54. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = -2\sqrt{x} + \dfrac{5}{e^x+1}$ β) $g(x) = 2\left(x-3\right)^5 + 4e^{x+2}$ γ) $h(x) = x^2 + \sqrt{-2-x}$

1.55. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g, h με τους παρακάτω τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+3, & x \geq 2 \\ 5x-1, & x < 2 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \leq 0 \\ -2x^4, & x > 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ x+5, & x < 0 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2)$.
β) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(0, +\infty)$ και $(-\infty, 0]$. Είναι η g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$;
γ) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $[0, +\infty)$ και $(-\infty, 0)$. Είναι η h γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$;

1.56. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_1(x) = 3f(x) - 2g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_2(x) = -5f(x) + 4g(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1.57. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_1(x) = (f \circ g)(x) + (g \circ f)(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi_2(x) = (f \circ f)(x) + (g \circ g)(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1.58. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α) $3^{2x-1} - 3^{-3x+4} < (-3x+4)^3 - (2x-1)^3$ β) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2} - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} > x^2 - 3x$

1.59. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $e^{x-2} = 3 - x$ β) $x^7 + 2x^5 = 4 - x$ γ) $e^{e-x} = lnx$ δ) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x = 1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^x$

1.60. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(x) \cdot 2^{f(x)} = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

1.61. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $e^x \cdot 3^{f(x)} + f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
β) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

1.62. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

$$f(x) + f(4x) > f(2x) + f(8x).$$

1.63. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x < 0$ ισχύει

$$f(2x) + f(4x) > f(3x) + f(5x).$$

1.64. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$. Να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(x^2\right) + f\left(x^5\right) = f\left(x^3\right) + f\left(x^6\right).$$

1.65. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό ελάχιστο το οποίο να βρείτε.

α) $f(x) = 3\,|x-2| + 4$ β) $f(x) = 2\sqrt{x-2} + 5$ γ) $f(x) = (x-1)^2 + 2(x-1)^4 - 3$

1.66. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, αποδείξτε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο το οποίο να βρείτε.

α) $f(x) = -(x-5)^4 + 3$ β) $f(x) = -ln^2x + 2$ γ) $f(x) = -2\,|x-1| - \left|x^2 - 1\right|$

1.67. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε το ολικό ακρότατό της, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -x + 1, & x < 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} lnx, & x \geq 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases}$ γ) $f(x) = \begin{cases} -e^x, & x > 0 \\ -x^2, & x \leq 0 \end{cases}$

1.68. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f^9(x) + e^{f(x)} + 5 = x^4.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

1.69. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$f^3(x) + 2^{f(x)} + 3 = -x^2.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

1.5 Αντίστροφη συνάρτηση

1.70. Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι 1-1 σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = -2\sqrt{x-4} + 11$ β) $f(x) = ln(3-x) + 4$ γ) $f(x) = 2\,|x+5| - 1$

1.71. Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι 1-1 σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^3 + 2x - 1$ β) $f(x) = e^x + x^5 - 9$ γ) $f(x) = (x-1)(x+5) + 1$

1.72. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^5 + x^3$ και $g(x) = (f(x))^5 + (f(x))^3$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση

$$\left(x^2 - x\right)^5 + \left(x^2 - x\right)^3 = (2x-2)^5 + (2x-2)^3\,.$$

1.73. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $ln\left(x^2+1\right) + e^{x^2+1} = ln\left(2x^2 - x + 1\right) + e^{2x^2-x+1}$ β) $ln\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+5}\right) = -2x+4$

1.74. Έστω η συνάρτηση f με $f(f(x)) = 2x + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι 1-1 και στη συνέχεια να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

1.75. Έστω η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1 σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(f(x)) = 4x - 1\,,\ x \in \mathbb{R}$ β) $f(f(x)) = x^9\,,\ x \in \mathbb{R}$ γ) $f(f(x)) = 2\,,\ x \in \mathbb{R}$

1.76. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$(g \circ g)(x) = ag(x) + \beta f(x^5 + 2x)$$

όπου α, β μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί. Με δεδομένο ότι η f είναι 1-1, να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

1.77. Έστω η συνάρτηση f με $f(f(x)) = x^5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x))^5 = f\left(x^5\right)$.
γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = x$.
δ) Να δείξετε ότι $(f(-1))^5 + (f(1))^5 = f(0)$.

1.78. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$, τέτοια ώστε για κάθε x, $y \in (0, +\infty)$ να ισχύει

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y).$$

Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$, το $A(1, 0)$, να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

1.79. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = 5x - 6$ β) $f(x) = \dfrac{x-1}{x-3}$ γ) $f(x) = \sqrt[5]{x-2}$ δ) $f(x) = -2x^4 + 1$

1.80. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x-1} + 2$ β) $f(x) = ln(x+5)$ γ) $f(x) = x^3$ δ) $f(x) = |x-4|$

1.81. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ β) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$ γ) $f(x) = \sqrt{x^2-4x+4} + x - 2$

1.82. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 0 \\ x-1, & x < 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} lnx, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$ γ) $f(x) = \begin{cases} x-2, & x > 0 \\ x+1, & x \leq 0 \end{cases}$

1.83. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}, αν υπάρχουν, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt[4]{x}$ β) $f(x) = \sqrt{x-2}$ γ) $f(x) = 5 - x\,,\ x \in [0,5]$.

1.84. Έστω η συνάρτηση f με $f(2f(x)) = x + 6 + f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
α) Αποδείξτε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
β) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από το σημείο $(-3,-6)$.
γ) Για κάθε x που ανήκει στο σύνολο τιμών της f, να δείξετε ότι $f(2x) - f^{-1}(x) = x + 6$.

1.85. Έστω η αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f^{-1}(0) = -f(0)$ και ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

α) $(f \circ f)(x) - 2f(x) = -x$ β) $f(2x - f(x)) = x$

1.86. α) Θεωρούμε συνάρτηση f γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της A. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $f(x) = x$.
β) Αν $f(x) = e^x + x - 2$, να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των f και f^{-1}.
γ) Με τη βοήθεια κατάλληλου παραδείγματος, να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της A, τότε οι εξισώσεις $(g \circ g)(x) = x$ και $g(x) = x$ δεν είναι ισοδύναμες.

1.6 Πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.87. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to -1}\left(2x^4-3^x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to e}(lnx-2)^{20}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-1)e^x}{\sqrt{x}+5}$ δ) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{x\sigma\upsilon\nu x}{2\pi-x}$

1.88. Με δεδομένο ότι το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 2$ είναι ίσο με -1, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2f(x)-x^3\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\left((f(x)-3x)\,|f(x)-3|\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(f(x)+2)^{12}}{\sqrt[3]{|f(x)-7|}}$

1.89. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-8}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x-1}{x^4-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4-4x^2-x}{x^2+2x}$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\eta\mu x}$

1.90. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x+5}-\sqrt{x+7}}{x^2-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{5-\sqrt{x+1}}}$ δ) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

1.91. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{x-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}+\sqrt{x}-4}{x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{5x+6}+2}{x-2}$

1.92. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x^{21}+\eta\mu x-3|-3}{2x}$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x^2-2x|+x-2}{x^2-4}$ γ) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{4x-12}$

1.93. Να βρείτε τα όρια των παρακάτω συναρτήσεων, αν υπάρχουν, στο $x_0=1$:

α) $f(x)=\begin{cases} e^x-x, & x\neq 1\\ 1821, & x=1\end{cases}$ β) $f(x)=\begin{cases} 5x^2+(2x-3)lnx, & x\geq 1\\ x^3+4x^2-5x-3, & x<1\end{cases}$

1.94. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+\beta, & x\geq 2\\ x^3-5, & x<2\end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} ax+lnx, & x\geq 1\\ 2x+\beta, & x<1\end{cases}.$$

Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a, β ώστε οι συναρτήσεις f, g να έχουν όριο στο 2 και στο 1 αντίστοιχα.

1.95. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 1$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2-2x+3\leq f(x)\leq 2x^2-4x+4\,,\ x\in\mathbb{R}$ β) $ln^2x\leq f(x)\leq 3ln^2x\,,\ x>0$

1.96. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\left(x^3-8\right)\sigma\upsilon\nu\dfrac{-2x+5}{x^2-4}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\cdot\eta\mu\dfrac{e^x+1}{\sqrt{x}}\right)$

1.97. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε $|f(x)-2x|\leq x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

1.98. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε $|f(x)-x^2\sigma\upsilon\nu x|\leq x^4$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$

1.99. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x\to 0$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις (οι σχέσεις ισχύουν στο σύνολο $\mathbb{R}$):

α) $f^2(x)-|x|\leq x^2$ β) $f^2(x)-2f(x)\leq x^2-1$ γ) $f^2(x)\leq 8xf(x)$

1.100. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi x^2-\pi x}{x^2-1}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}ln\dfrac{2\eta\mu x}{x^2+x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 4}e^{\sqrt{x}-2}$ δ) $\lim\limits_{x\to 9}\eta\mu\left(\dfrac{2\pi}{\sqrt{x}}-\pi\right)$

1.101. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1/3}\dfrac{\eta\mu(3x-1)}{15x-5}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2x-3\sigma\upsilon\nu x+2}{\sigma\upsilon\nu x-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt[3]{x}-2}{x\cdot\sqrt[3]{x}-1}$

1.102. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 2$ είναι ίσο με -3. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1}\left(f(5x-3)+x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to -1}\left(x^2f(-2x)+5\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 5}\left(f(7-x)+f(x-3)\right)$

1.103. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 1$ είναι ίσο με 3 και ακόμη

$$f(x)-f(x-2)=4\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+6)-f(x)=12$.
β) Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 3$ και το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 7$.

1.104. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 2$ είναι ίσο με 4 και ακόμη

$$f(2x)=f(x)+3x\,,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(8x)=f(x)+21x$.
β) Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 4$ και το όριο της $f(x)$ όταν το $x\to 16$.

1.105. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν το $x \to 0$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lim_{x\to 0}(3f(x)+\sigma\upsilon\nu x)=5$ β) $\lim_{x\to 0}\left(e^x f(x)-x^5\right)=2$ γ) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-3}{2x}=4$

1.106. Να βρείτε τα όρια των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ όταν $x \to 2$ αν είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x\to 2}(f(x)-g(x))=-1 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2}(5f(x)-2g(x))=4.$$

1.107. Να βρείτε το όριο της συνάρτησης $f(x)g(x)$ όταν το $x \to 1$, αν είναι γνωστό ότι

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^2-1}=4 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 1}\left(g(x)\left(x^2-3x+2\right)\right)=5.$$

1.108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-2}{x-3}=-2.$$

Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x\to 3}f(x)$ β) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2f(x)-18}{x-3}$

1.109. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-\eta\mu x}{x^2-x}=5.$$

Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x\to 0}f(x)$ β) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}$ γ) $\lim_{x\to 0}\frac{|3-5f(x)|-2}{x^2-x}$

1.110. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η σχέση:

$$(f(x))^5+x^4f(x)=2x^5.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι το όριο της $f(x)/x$ όταν $x\to 0$ είναι ίσο με $l\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x\to 0$ και τον αριθμό l.

1.111. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η σχέση:

$$(f(x))^3+x^6f(x)=2x^9.$$

Υποθέτουμε ακόμη ότι το όριο της $f(x)/x^3$ όταν $x\to 0$ είναι ίσο με $l\in\mathbb{R}$. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x\to 0$ και τον αριθμό l.

1.7 Μη πεπερασμένο όριο συνάρτησης στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

1.112. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^{10}}$ β) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}$ γ) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{(x-2)^4}$ δ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{10-2x}$ ε) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{1}{(x-3)^5}$

1.113. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-1}{(x-2)^2}$ β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-5x}{|x^2-5x+6|}$ γ) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x+1}{(x+1)^3}$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-4}{x^2-3x+2}$

1.114. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{1}{|x-1|}$ και $g(x) = \dfrac{1}{|x^2-1|}$.

i) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ γ) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x)+g(x))$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x)g(x))$

ii) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 1} (f(x)-g(x))$ β) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ γ) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ δ) $\lim\limits_{x \to 1} \big((x^2-3x+2)f(x)\big)$

1.115. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x^2-1}{(x-5)^4}$ και $g(x) = \dfrac{2x}{(x-5)^4}$.

i) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to 5} g(x)$ γ) $\lim\limits_{x \to 5} (f(x)+g(x))$ δ) $\lim\limits_{x \to 5} (f(x)g(x))$

ii) Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to 5} (f(x)-g(x))$ β) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ γ) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{g(x)}{f(x)}$ δ) $\lim\limits_{x \to 5} \big((x^2-5x)f(x)\big)$

1.116. Να βρείτε το όριο της συνάρτησης $f(x)$ όταν $x \to 3$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\lim\limits_{x \to 3} \big(x^2 f(x)\big) = +\infty$ β) $\lim\limits_{x \to 3} (2x - f(x)) = +\infty$ γ) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{(x-3)f(x)} = -\infty$

1.117. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να εξετάσετε αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να είναι πραγματικός αριθμός το όριο:

α) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-\lambda x+2}{x-2}$ β) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-\lambda x+2}{(x-2)^2}$ γ) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-\lambda x+2}{(x-2)^3}$

1.118. Να βρείτε τα παρακάτω όρια για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

α) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2-10x+\lambda}{(x-5)^2}$ β) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2-3\lambda}{|x-3|}$ γ) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5\lambda}{x-\lambda}$ δ) $\lim\limits_{x \to \lambda} \dfrac{x^2-\lambda}{x^2+\lambda}$

1.8 Όριο συνάρτησης στο $\pm\infty$.

1.119. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-7x^5-2x^2+5\right)$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^4-2x}{4x^6+3}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-x+2}+5x}{x-2}$

1.120. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x^4-3x^2-x+1\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+5}{4x^5+x}$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+5}+3x}{2x-1}$

1.121. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|x^5-x-3|-5}{x^4-6x^2-2}$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2\,|x^3+x-1|}{x^3-2}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{|-3x^{11}+x|-4x}{2x^8-5x+4}$

1.122. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2+5}\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+4}-\sqrt{4x^2+x+3}\right)$

1.123. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-1}+2x\right)$

1.124. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x\to+\infty$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x)=\sqrt{9x^2+1}+\sqrt{x^2-5x}-4x+1$ β) $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3+2x}$

1.125. Να βρείτε το όριο της $f(x)$ όταν $x\to+\infty$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $x^2-x+1\leq f(x)\leq 2x^2-x+1\,,\ x\in\mathbb{R}$ β) $\left|\left(1+x^3\right)f(x)-2x^2\right|\leq x\,,\ x>0$

1.126. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}$ β) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+2}{x^2-1}\eta\mu x\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)\right)$

1.127. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(lnx+x^2-3\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2logx+3^x\cdot 5^{-x}\right)$

1.128. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}ln\left(x^2-3x\right)$ β) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x^4-x+1}$ γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ δ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x\eta\mu\dfrac{1}{x}\right)$

1.129. Να βρείτε τα όρια της $f(x)$ όταν $x \to +\infty$ και όταν $x \to -\infty$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{3^x + 4}{2^x - 5}$ β) $f(x) = \dfrac{3^{x+2} - 5e^x}{4 \cdot 3^x + 5^{x-1}}$ γ) $f(x) = \dfrac{2 \cdot 5^x - 3^{x+1}}{4 \cdot 5^x + 6^x}$

1.130. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ln(5-x) - ln(x-2)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια τα όρια της $f(x)$ όταν $x \to 2$ και όταν $x \to 5$.

1.131. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ln\left(x^2 - 2x + 1\right) - 5ln(x-1)$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια τα όρια της $f(x)$ όταν $x \to 1$ και όταν $x \to +\infty$.

1.132. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = ln\dfrac{e^x - e}{e^x - 1}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και στη συνέχεια τα όρια της $f(x)$ για $x \to +\infty$, $x \to -\infty$, $x \to 0$ και $x \to 1$.

1.133. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx$ και $g(x) = logx$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - g(x))$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(g(x))$ δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}$

1.134. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = e^{x + lnx}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1} - x$. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x)g(x))$ δ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$

1.135. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to -\infty} \big((\lambda - 1)x^4 - x^3 + 2x - 5\big)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\lambda - 2)x^3 + (\lambda + 3)x + 5}{(\lambda - 5)x^2 + x + 1}$

1.136. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2 - 4x + 3} - \lambda x\right)$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 2} - (\lambda - 1)x - 12\right)$

1.137. Να βρείτε για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in (0, +\infty)$ τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda^x + 4}{2 \cdot \lambda^x + 3}$ β) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\lambda^x + 5 \cdot 3^x}{4 \cdot \lambda^x + 3^{x+1}}$ γ) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\lambda^x + 3 \cdot 2^x}{\lambda^x + 5^x}$

1.138. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x) \geq e^x$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι το όριο της $f(x)$ για $x \to +\infty$ είναι ίσο με $+\infty$.

1.139. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(x) \leq -lnx$, για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι το όριο της $f(x)$ για $x \to +\infty$ είναι ίσο με $-\infty$.

1.9 Συνέχεια συνάρτησης

1.140. Αποδείξτε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς:

α) $f(x) = \left(x^2+1\right) e^x$ β) $g(x) = lnx + \eta\mu x$ γ) $h(x) = \sqrt{x^2 + \sigma\upsilon\nu x + 2}$

1.141. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x > 0 \\ 2x-3, & x \leq 0 \end{cases}, \quad h(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 0 \\ 2+ln2, & x = 0 \\ x^2+2, & x > 0 \end{cases}.$$

1.142. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να βρείτε τις παραμέτρους a, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της:

α) $f(x) = \begin{cases} 3a \cdot x^{-3} + 1, & x \in (0,2] \\ \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4}, & x > 2 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} 3ae^{x+1} + x, & x \leq -1 \\ 2x^2 - ax + 3\beta, & x \in (-1,0) \\ \beta\eta\mu x + a\sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0 \end{cases}$

1.143. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο 0. Να βρείτε το $f(0)$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $xf(x) + x^2 = 3\eta\mu x - 5x^2$, $x \in \mathbb{R}$ β) $xf(x) = x^2 f(x) + 2\left(x^3 - x^2\right)$, $x \in \mathbb{R}$

1.144. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0:

α) $f^2(x) + 4 \leq 4\eta\mu^2 x - 4f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ β) $4f^2(x) + 9 \leq 12f(x) + x^2$, $x \in \mathbb{R}$

1.145. Θεωρούμε τη συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει

$$2\left(1+\sqrt{\eta\mu x}\right) \leq f(x) \leq 3 + \eta\mu x.$$

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $\pi/2$.
β) Αν $g(x) = \sigma\upsilon\nu^2 x$ και $h(x) = f(x) - 4$, να βρείτε το όριο της συνάρτησης $g(x)/h(x)$ όταν $x \to \frac{\pi}{2}$.

1.146. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να δείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο x_0:

α) $f^2(x) + g^2(x) \leq (x-x_0)^2$, $x \in \mathbb{R}$ β) $|f(x)| + |g(x)| \leq |x - x_0|$, $x \in \mathbb{R}$

1.147. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 1.$$

Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $a \in \mathbb{R}$, τότε είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1.148. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in (0,+\infty)$ να ισχύει η σχέση

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y) - ln2.$$

Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής σε κάποιο $a \in (0,+\infty)$, τότε είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$.

1.10 Θεωρήματα συνεχών συναρτήσεων

1.149. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $(x+1)2^{x+1}=1$ στο $(-1,0)$ β) $e\cdot x^3=x^2+2$ στο $(0,2)$

1.150. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $x^4+3x+1=0$ στο $(-2,2)$ β) $x^6=-4x^3-1$ στο $(-2,1)$

1.151. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $\frac{x^5}{x-1}+\frac{e^x}{x-2}=0$ στο $(1,2)$ β) $\frac{x^2+5}{x-2}+\frac{lnx}{x-3}=0$ στο $(2,3)$

1.152. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν μία τουλάχιστον ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $lnx+e^x=0$ στο $(0,1)$ β) $x^{11}+x^{10}-3x+5=0$ στο $\mathbb{R}$

1.153. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν δύο τουλάχιστον ρίζες στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $x^3+3=6x^2$ στο $(-1,1)$ β) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}=\frac{3}{4-x}$ στο $(2,4)$

1.154. Αποδείξτε ότι καθεμία από τις παρακάτω εξισώσεις έχουν μία ακριβώς ρίζα στο αντίστοιχο διάστημα:

α) $5x^5+25x=11$ στο $(0,1)$ β) $e^x+x^9=0$ στο $(-1,0)$

1.155. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0)=f(4)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός ξ τέτοιος ώστε

$$f(\xi)=f(\xi+2).$$

1.156. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[a,\beta]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιος ώστε

$$3f(\xi)=f(a)+f(\beta)+f(\frac{a+\beta}{2}).$$

1.157. Έστω η συνάρτηση f με $f(1)f(3)+3<3f(1)+f(3)$, συνεχής στο $[1,3]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi\in(1,3)$ τέτοιος ώστε $f(\xi)=\xi$.

1.158. Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,5]$, τέτοια ώστε $0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,5]$. Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(5x)-x$ έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

1.159. Έστω η συνάρτηση f, συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$, τέτοια ώστε $f(1)=1/2$. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=2f(x)$ και $h(x)=(1-x)\sigma\upsilon\nu^2 x$, έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

1.160. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=(\pi-x)\,lnx\,,\ x>0$ β) $g(x)=ln(\eta\mu x)\,,\ x\in(0,\pi)$

1.161. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$ και να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f:

α) $f(x)=e^x+x-1$ β) $f(x)=2lnx+x^3-1$

1.162. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, συνεχή στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(0)=-1$ και

$$f^2(x)=x^4+1\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

1.163. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, συνεχή στο $\mathbb{R}$, με $f(-2)>0$, $f(3)>0$ και

$$f^2(x)=\left(e^x-e\right)^2\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

1.164. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, συνεχή στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(1)>0$ και

$$f^2(x)+2f(x)=x^2+x+1\,,\quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

1.165. Θεωρούμε τη συνάρτηση f, συνεχή στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(3,1)$ και δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=(2-x)(x-5)$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(2,5)$.

1.166. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=e^x+x$ β) $g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{4-x}$ γ) $h(x)=lnx-\sqrt{e-x}$

1.167. Να βρείτε τα σύνολα τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}$ β) $g(x)=4e^{-x}-\sqrt{x}$ γ) $h(x)=-2lnx+\sqrt{1-x}$

1.168. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $[a,\beta]$ και τους αριθμούς x_1, x_2, x_3 του διαστήματος $[a,\beta]$.
α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$4f(x_1)+5f(x_2)=9f(\xi).$$

β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in[a,\beta]$ τέτοιο ώστε

$$2f(x_1)+3f(x_2)+5f(x_3)=10f(x_0).$$

2 Διαφορικός λογισμός

2.1 Ορισμός παραγώγου σε σημείο

2.1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ β) $f(x) = \sqrt{x-1}+2$ γ) $f(x) = |x-1|+4$

2.2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f στο $x_0 = 0$, αν υπάρχει, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 \eta\mu \dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x > 0 \\ x^4+2, & x \leq 0 \end{cases}$

2.3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+2, & x < 1 \\ ax-\beta, & x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$ β) $f(x) = \begin{cases} x^2+ax, & x < 2 \\ 3x-\beta, & x \geq 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

2.4. Με δεδομένο ότι $f(3) = 4$ και $f'(3) = 2$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f^2(x)-16}{x^2-9}$ β) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x)-4}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ γ) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2+5h}{f(3+h)-f(3)}$

2.5. Με δεδομένο ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = -3$, να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^3(x)-4f(x)}{x^3-1}$ β) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f^2(1+h)-4}{\sqrt{1+h}-1}$ γ) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1-h)}{h}$

2.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχή στο 0, τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3.$$

Αποδείξτε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 3$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2+f^2(x)}{4x^2+2\eta\mu^2 x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to -5} \frac{f(x+5)}{x^2-25}.$$

2.7. Θεωρούμε τη συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και συνεχή στο 1, τέτοια ώστε

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-x^2+4}{x^2-1} = 2.$$

Αποδείξτε ότι $f(1) = -3$ και $f'(1) = 6$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 5} \frac{f(11-2x)+3}{x-5} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(1-2h)+3}{h}.$$

2.8. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο 2 συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(2) = g(2)$ και για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει $f(x) \leq g(x)$. Να δείξετε ότι $f'(2) = g'(2)$.

2.9. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο 0 συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει $f(x) \leq x^2$. Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$.

2.10. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:

$$-5(x-2)^2 + 3x - 4 \leq f(x) \leq 6(x-2)^2 + 3x - 4\,.$$

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 2.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

2.11. Θεωρούμε τη συνάρτηση f τέτοια ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό x να ισχύει:

$$|x-3|^3 + x + 1 \leq f(x) \leq 2\,|x-3|^3 + x + 1\,.$$

α) Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής στο 3.
β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 3.

2.12. Έστω η συνάρτηση f με $f(0) \neq 0$, παραγωγίσιμη στο 0, τέτοια ώστε

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{για κάθε}\, x \in \mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του $\mathbb{R}$.

2.13. Έστω η συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα (a, β) και παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, \beta)$. Να βρείτε συναρτήσει των x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$ τα παρακάτω όρια:

α) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x_0) - x_0 f(x)}{x - x_0}$ β) $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{xf(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$

2.2 Παράγωγος συνάρτηση και κανόνες παραγώγισης

2.14. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}} - 4$ β) $g(x) = e^x lnx + \dfrac{1}{x^5} + \sqrt{2}$ γ) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}lnx + 2}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x + 3}$

2.15. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = ln\left(x^2 - 4\right) - 2^{1-x}$ β) $g(x) = \eta\mu^3 x + \eta\mu x^3$ γ) $h(x) = (\sigma\upsilon\nu x + 2)^{x-1}$

2.16. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$ β) $g(x) = \eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^3 x$ γ) $h(x) = logx + x^x + 4^x + ln3$

2.17. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ β) $f(x) = 5e^{-x} + ln(2x)$ γ) $f(x) = ln(lnx)$ δ) $f(x) = \eta\mu^4 x$

2.18. Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+6, & x\le 1\\ 2\sqrt{x^2+3}\,, & x>1\end{cases}$ β) $g(x)=5\,|x-4|+2x$ γ) $h(x)=\sqrt[5]{x^4}$

2.19. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με $f(0)=0$ και με την ιδιότητα

$$f^2(x)+3e^{f(x)}=f\left(x^2\right)+3e^x\,,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $f'(0)=1$.

2.20. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $g(0)=g'(0)=1$, τέτοιες ώστε

$$(f(x))^3-(g(x))^2+x=0\,,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Να δείξετε ότι $f'(0)=1/3$.

2.21. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, με $f(-4)=2$ και $f'(-4)=-1/2$, τέτοιες ώστε

$$f^2(3x-4)-2e^x g(2x+5)=ln\left(x^2+1\right)\,,\ \text{για κάθε}\ x\in\mathbb{R}.$$

Να βρείτε την τιμή $g'(5)$.

2.22. Θεωρούμε την άρτια και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και τη συνάρτηση $g(x)=(x^4+2)\,f(x)+ax$, όπου a πραγματικός αριθμός.
α) Αποδείξτε ότι $f'(0)=0$.
β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g'(0)=a$.

2.23. Θεωρούμε την περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f'(0)=-a$ και τη συνάρτηση $g(x)=\eta\mu x f(x)+ax^2$, όπου a πραγματικός αριθμός.
α) Αποδείξτε ότι $f''(0)=0$.
β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g''(0)=0$.

2.24. Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση f, με $f(0)=9$, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $\left(f'(x)\right)^2=f(x)$.

2.25. Να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση f, με $f(1)=2$, για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $x\left(f'(x)\right)^2=3\left(f(x)+1\right)$.

2.26. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $f(xy)=f(x)+f(y)$, για κάθε $x,y\in(0,+\infty)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $f'(x)=f'(1)/x$.

2.27. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ να ισχύει $f(x+y)=e^y f(x)+e^x f(y)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)=f(x)+f'(0)e^x$.

2.28. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=a\eta\mu x+\beta\eta\mu(2x)+\gamma\eta\mu(3x)$, όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, τέτοια ώστε $|f(x)|\le|\eta\mu x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $|a+2\beta+3\gamma|\le 1$.

2.3 Εξίσωση εφαπτομένης

2.29. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
β) Να εξετάσετε αν η εφαπτόμενη στο Α έχει άλλο κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση της f.

2.30. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - x - 2$ και το σημείο $A(-2, f(-2))$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο Α.
β) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου που ορίζεται από την εφαπτομένη του ερωτήματος (α) και τους άξονες $x'x$, $y'y$.

2.31. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2/x$ με πεδίο ορισμού το $D_f = (0, +\infty)$ και το σημείο $M(2, f(2))$ της γραφικής παράστασης της f.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο Μ.
β) Αν Α, Β είναι τα σημεία τομής της παραπάνω εφαπτομένης με τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.

2.32. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(1) = -1$ και $f'(1) = 2$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
β) Αν $g(x) = f\left(x^4\right) - f^3(x)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $(1, g(1))$.

2.33. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$ (αν ορίζεται), σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3, & x \leq 1 \\ 4\sqrt{x}\,, & x > 1 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & x < 1 \\ -\dfrac{1}{x} + 1\,, & x \geq 1 \end{cases}$

2.34. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x + 1$.
α) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η κλίση της είναι ίση με -5, καθώς και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο αυτό.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
γ) Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτόμενη σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία γωνία $135°$.

2.35. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Η εφαπτόμενη είναι παράλληλη στην ευθεία $2x + y - 9 = 0$.
β) Η εφαπτόμενη είναι κάθετη στην ευθεία $x + 4y - 4 = 0$.
γ) Η εφαπτόμενη διέρχεται από το σημείο $H(0, -2)$.
δ) Η εφαπτόμενη ορίζει με τους άξονες $x'x$, $y'y$ ισοσκελές τρίγωνο.

2.36. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = -2x + 4$. Αποδείξτε ότι η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

2.37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = x+1$. Αποδείξτε ότι η ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f.

2.38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 5$ και η ευθεία ε με εξίσωση $y = \lambda x + 5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το λ ώστε η ε να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f και να προσδιορίσετε το σημείο επαφής.

2.39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x$ και $g(x) = e^x - 2$.
α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = 1$ είναι η ευθεία ε με εξίσωση $y = x - 1$.
β) Αποδείξτε ότι η ευθεία ε εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g. Να βρείτε το σημείο επαφής.

2.40. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = -2x^2 - 2$.
α) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g δεν έχουν κοινό σημείο.
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των κοινών εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των f και g.

2.41. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = 1/x$ και $g(x) = -x^2$. Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των f και g.

2.42. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = ax^2 + \beta$ και $g(x) = e^x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g, έχουν κοινή εφαπτόμενη στο κοινό σημείο τους με τετμημένη $x_0 = 1$. Να βρείτε τα α, β και την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

2.4 Ρυθμός μεταβολής

2.43. Δίνεται σφαίρα της οποίας η ακτίνα $R(t)$ (σε cm) μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) σύμφωνα με τον τύπο $R(t) = 2t + 1$, με $t \geq 0$.
α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t = 2\,sec$.
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας τη χρονική στιγμή $t = 1\,sec$.

2.44. Η θέση $x(t)$ (σε cm) ενός κινητού πάνω σε άξονα δίνεται συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ (σε sec) από τον τύπο $x(t) = 3t^2 - 6t + 1$.
α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.
β) Να βρείτε το πρόσημο της ταχύτητας του κινητού για κάθε $t \geq 0$.
γ) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στο χρονικό διάστημα (σε sec) $[0, 3]$.

2.45. Η θέση $x(t)$ (σε cm) ενός κινητού πάνω σε άξονα δίνεται συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ (σε sec) από τον τύπο $x(t) = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 2$.
α) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού.
β) Να βρείτε το πρόσημο της ταχύτητας του κινητού για κάθε $t \geq 0$.
γ) Να βρείτε το διάστημα που έχει διανύσει το κινητό στο χρονικό διάστημα (σε sec) $[0, 3]$.

2.46. Δίνεται η ορθή γωνία $x\widehat{O}y$ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα $u = 2$ m/sec και η θέση του πάνω στην Ox δίνεται από τη συνάρτηση $s(t) = ut$, $t \in [0, 5]$, όπου t ο χρόνος (σε sec).
α) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου.
β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6 m;

2.47. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΒ , όπου Ο η αρχή των αξόνων, $A(4, 0)$ και $B(0, 3)$. Έστω $M(x, 0)$ εσωτερικό σημείο του τμήματος ΟΑ με $x = x(t) = 2t$ (το x σε cm και το t σε sec). Η κάθετη από το Μ στον άξονα $x'x$ τέμνει το τμήμα ΑΒ στο Ν.
α) Να βρείτε το εμβαδόν $E(t)$ του τραπεζίου ΟΜΝΒ ως συνάρτηση του χρόνου.
β) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΜ είναι 2 cm;

2.48. Έστω ότι $f(t)$ είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$ με $f(t) = 1 - 2^{-\frac{t}{200}}$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το $1/16$ του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.

2.49. Ένας γεωργός προσθέτει x μονάδες λιπάσματος σε μια αγροτική καλλιέργεια και συλλέγει $g(x)$ μονάδες του παραγόμενου προϊόντος. Αν για κάθε $x \geq 0$ είναι $g(x) = M_0 + M\left(1 - e^{-\mu x}\right)$ όπου M_0, M και μ είναι θετικές σταθερές, να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής του παραγόμενου προϊόντος ως συνάρτηση της $g(x)$. Ποια είναι η σημασία της σταθεράς M_0 ;

2.50. Δίνεται σφαίρα της οποίας η ακτίνα $R(t)$ (σε cm) μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου $t \geq 0$ (σε sec) με ρυθμό $4cm/sec$.
α) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα είναι ίση με $5cm$.
β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου της σφαίρας τη χρονική στιγμή κατά την οποία η ακτίνα είναι ίση με $10cm$.

2.51. Οι διαστάσεις x, y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό $4\,cm/sec$ και $5\,cm/sec$ αντιστοίχως. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς το χρόνο t κατά τη χρονική στιγμή που οι διαστάσεις του είναι $x = 30\,cm$, $y = 50\,cm$.

2.52. Θεωρούμε ορθή γωνία $x\widehat{O}y$. Ο Αλέξανδρος (Α) κινείται πάνω στην πλευρά Oy με κατεύθυνση προς το Ο με ταχύτητα $3\,km/h$ και ο Βαγγέλης (Β) κινείται πάνω στην Ox με ταχύτητα $2\,km/h$ απομακρυνόμενος από το Ο. Τη χρονική στιγμή κατά την οποία $OA = 6\,km$ και $OB = 8\,km$ να βρείτε:
α) Το ρυθμό μεταβολής της απόστασης ΑΒ.
β) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας $O\widehat{B}A$.

2.53. Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στην καμπύλη $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Αποδείξτε ότι τη χρονική στιγμή κατά την οποία η τετμημένη του Μ είναι ίση με $1/4$, οι ρυθμοί μεταβολής των συντεταγμένων του Μ είναι ίσοι.

2.5 Τα θεωρήματα Rolle και μέσης τιμής

2.54. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x-3)(e^x - 1) + 8$.
α) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μια τουλάχιστον εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$.
β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $\xi - 2 = e^{-\xi}$.

2.55. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 e^x - x - 1$.
α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,0)$ και μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.
β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $4x^3e^x + x^4e^x - 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

2.56. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β) και $f(a) = f(\beta) = 0$.
α) Να δείξετε για τη συνάρτηση $g(x) = f(x)/(x-c)$, όπου $c \notin [a,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0 \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(c_0) = 0$.
β) Για τα c, c_0 του ερωτήματος (α) να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο $M(c_0, f(c_0))$, διέρχεται από το σημείο $N(c,0)$.

2.57. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g οι οποίες είναι συνεχείς στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμες στο (a,β) και $f(\beta)g(a) - f(a)g(\beta) = 0$. Ακόμη για κάθε $x \in [a,\beta]$ είναι $g(x) \neq 0$.
α) Αποδείξτε ότι για τη συνάρτηση $h(x) = f(x)/g(x)$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[a,\beta]$.
β) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(\xi)}{g(\xi)}.$$

2.58. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, δ με $a/3 + \beta/2 + \gamma = 0$. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{ax^3}{3} + \left(\frac{\beta}{2} + \delta\right)x^2 + (\gamma - \delta)x + \delta\,.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

2.59. α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^{10} - 20x + 4 = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f_1(x) = x^{10}$ και $f_2(x) = 20x - 4$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

2.60. α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x + 2x = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f_1(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $f_2(x) = -2x$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

2.61. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\eta\mu x + 3x^2 - 5 = 0$ έχει το πολύ δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$.

2.62. Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των $f(x) = 5e^x$ και $g(x) = 23 - x^2$ έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

2.63. Με δεδομένο ότι $a/4+\beta/3+\gamma/2+\delta=0$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$ έχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, με τετμημένη αριθμό του διαστήματος $(0,1)$.

2.64. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=4x-\pi^2\eta\mu x$ έχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, με τετμημένη αριθμό του διαστήματος $(0,\pi)$.

2.65. Έστω η παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ συνάρτηση f με $f(a)-f(\beta)=a^3-\beta^3$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2$.

2.66. Έστω η παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ συνάρτηση f με $f(a)-f(\beta)=lna-ln\beta$, όπου $0<a<\beta$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=1/\xi$.

2.67. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\eta\mu x+f(x)\sigma\upsilon\nu x=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(\pi,2\pi)$.

2.68. Θεωρούμε τη συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(2)=2f(1)$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $xf'(x)-f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

2.69. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3x^{11}-5x^9+4$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-2x+5$.

2.70. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β) και $f(a)=f(\beta)$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$.

2.71. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,10]$, παραγωγίσιμη στο $(0,10)$ και $f(0)=2$, $f(10)=12$.
α) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,10)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=1$.
β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,10)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=2$.
γ) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(0,10)$ με $x_1\neq x_2$ τέτοια ώστε $4f'(x_1)+f'(x_2)=5$.

2.72. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$ και ισχύει

$$f\left(\frac{a+\beta}{2}\right)=\frac{f(a)+f(\beta)}{2}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

2.73. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με την ιδιότητα $f(2)f(3)<0$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(2,3)$ με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)>0$.

2.74. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[a,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (a,β) και $f(a)=2\beta$, $f(\beta)=2a$.
α) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a,β).
β) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(a,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

2.75. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $ln\pi - ln3 < \dfrac{\pi}{3} - 1$ β) $\eta\mu(a+h) < \eta\mu a + h\sigma\upsilon\nu a$ με $0 < a < a+h < \pi/2$

2.76. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $5 \cdot e^4(\pi - e) < \pi^5 - e^5 < 5 \cdot \pi^4(\pi - e)$ β) $1 + x < e^x < 1 + ex$ με $x \in (0, 1)$

2.77. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $ln(x+1) - lnx < \dfrac{1}{x}$ με $x > 0$ β) $\dfrac{x}{x+1} < ln(x+1) < x$ με $x > 0$

2.78. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $-2 \leq f'(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$|f(x+1) - f(x)| \leq 2\,.$$

2.79. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[4, 6]$, παραγωγίσιμη στο $(4, 6)$ τέτοια ώστε $f(4) = 8$ και $|f'(x)| \leq 2$, για κάθε $x \in (4, 6)$. Να δείξετε ότι:

α) $4 \leq f(6) \leq 12$ β) $4 < f(t) < 12$, για κάθε $t \in (4, 6)$

2.80. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση

$$f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x\,,\ x \in [0, +\infty).$$

Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$.

2.81. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(0) = 0$. Θεωρούμε ακόμη ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει

$$f'(x) > \frac{f(x)}{x}\,.$$

2.82. Θεωρούμε τη συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f' να είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$. Να δείξετε ότι:

α) $f(3) < \dfrac{f(1) + f(5)}{2}$ β) $f(2) < \dfrac{3f(1) + f(5)}{4}$

2.83. Θεωρούμε τη συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση f' να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις:

α) $f'(x+1) < f(x+1) - f(x) < f'(x)$ β) $f(2x) \geq \dfrac{f(x) + f(3x)}{2}$

2.6 Τα θεωρήματα σταθερής συνάρτησης και ίσων παραγώγων

2.84. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f'(x) = f(x)2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $g(x) = f(x)e^{-x^2}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2.85. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$, τέτοιες ώστε για κάθε $x > 0$

$$f'(x) = \frac{2}{g(x)} \quad \text{και} \quad g'(x) = -\frac{1}{f(x)}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)g^2(x)$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.

2.86. Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f^5(x)f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η $g(x) = f^9(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2.87. Θεωρούμε τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(y)| \leq 3(x - y)^4 .$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \neq y$ ισχύει

$$-3\,|x - y|^3 \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq 3\,|x - y|^3 .$$

β) Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

2.88. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f''(x) + f(x) = 0$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$g(x) = f(x) - f'(0)\eta\mu x - f(0)\sigma\upsilon\nu x.$$

α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g''(x) + g(x) = 0$.
β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\left(g'(x)\right)^2 + \left(g(x)\right)^2 = c$, όπου c θετική σταθερά.
γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = f'(0)\eta\mu x + f(0)\sigma\upsilon\nu x$.

2.89. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = e^x + x^2$ και $f(0) = 5$.
β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) - 2\eta\mu x = 0$ και $f(\pi) = 3$, $f'(\pi) = 2$.
γ) Για κάθε $x > 0$ ισχύει $xf'(x) + f(x) = 1/x$ και $f(1) = 5$.
δ) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $f'(x)\eta\mu x - f(x)\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu^2 x$ και $f(\pi/2) = \pi/2$.

2.90. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Για κάθε $x \in (0, \pi)$ ισχύει $f'(x)e^{f(x)} = \sigma\upsilon\nu x$ και $f(\pi/2) = 0$.
β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)f^2(x) = 8x^2$ και $f(0) = 0$.
γ) Για κάθε $x \in (-1/4, +\infty)$ ισχύει $f'(x) + f^5(x) = 0$, $f'(x) \neq 0$, $f(0) = -1$.

2.91. Να βρείτε τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:
α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) + 5f(x) = 1$ και $f(0) = 6/5$.
β) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = 2f(x)$ και $f(0) = 3$.
γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) + f(x)\sigma\upsilon\nu x = -\sigma\upsilon\nu x$ και $f(0) = 1$.

2.92. Έστω η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Να βρείτε τον τύπο της f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 1 \\ e^x, & x < 1 \end{cases}, \ f(1) = 0$ β) $f'(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x > 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \end{cases}, \ f(0) = 5$

2.93. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ το οποίο περιέχει το 0, για τις οποίες υποθέτουμε ότι έχουν ίσες δεύτερες παραγώγους στο Δ και ακόμη $f(0) = g(0)$.
α) Να δείξετε ότι υπάρχει πραγματική σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει

$$f(x) - g(x) = cx.$$

β) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ετερόσημες ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $[x_1, x_2]$.

2.94. Έστω συνάρτηση f με $f(0) \neq 0$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)f(y) = f'(y)f(x)$.
β) Να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f'(x) = cf(x)$.
γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = e^{cx}$.

2.95. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(0) = g(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x)g(x) = 1 \quad \text{και} \quad f(x)g'(x) = -1.$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)g(x) = 1$.
β) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g.

2.96. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $(0, +\infty)$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f(1) = g(1) = 1$ και για κάθε $x \in (0, +\infty)$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) = 2x^3 \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0.$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
β) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g.

2.97. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε $f'(0) = f(0) = 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) + g(x) = e^x + x \quad \text{και} \quad f(x) + g'(x) = e^x + 1.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) = f(x)$.
β) Να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων f, g.

2.7 Μονοτονία με χρήση παραγώγων

2.98. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^3 - 3x$ β) $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$ γ) $f(x) = \sqrt{x - x^2}$ δ) $f(x) = ln(1 - x^2)$

2.99. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^3 + x^2 + 5x$ β) $f(x) = e^{-x} + 2^{-x} - x$ γ) $f(x) = -2\sigma\upsilon\nu x - x^2 + 2ln\dfrac{1}{x}$

2.100. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \geq 0 \\ x^3 + 2x, & x < 0 \end{cases}$ β) $f(x) = \begin{cases} \eta\mu x + 2x + 1, & x \geq 0 \\ x^2 + 4x - 1, & x < 0 \end{cases}$

2.101. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt{ln^2 x - lnx}$ β) $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$ γ) $f(x) = e^{2x} - 4e^x - 5$

2.102. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + ax^2 - x + 3$, όπου $a \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

2.103. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ και για κάθε $x \in [1, e]$ ισχύουν οι σχέσεις $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 lnx_0 = x_0$.

2.104. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + a$, όπου $a \in (0, 1)$. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

2.105. Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις $f'(x) = g(x)$ και $g'(x) = -f(x)$. Αν x_1, x_2 είναι δύο ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ με $x_1 < x_2$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, να δείξετε ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2).

2.106. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 1 - \eta\mu(2x)$.
α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = \eta\mu(2x)$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

2.107. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $(x - 20)^{20} = x^{20} + 20^{20}$ β) $lnx = 1 - x^2$ γ) $2e^x + 2x = x^2 + 2$

2.108. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x - \eta\mu x + x^5$.
α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
β) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

2.109. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = a^x - x$, όπου $0 < a < 1$.
α) Να μελετηθεί συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = \lambda^2 - \lambda - 2$.

2.110. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = lnx - x$.
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
β) Να λυθεί η ανίσωση $ln\left(x^2+2\right) - x^2 - 2 < ln\left(x^2 + e^x + 1\right) - \left(x^2 + e^x + 1\right)$.
γ) Αν $0 < a < \beta < 1$, να δείξετε ότι $ae^{\beta} < \beta e^{a}$.
δ) Αν κ, λ είναι αριθμοί μεγαλύτεροι του 1 και ισχύει $ln\kappa - ln\lambda = \kappa - \lambda$, να δείξετε ότι $\kappa = \lambda$.

2.111. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x - 3e^x$.
α) Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
β) Να λυθεί η ανίσωση $\left(x^2 + x^4 + 5\right) e^{x^2+x^4+5} - 3e^{x^2+x^4+5} > \left(x^4+9\right) e^{x^4+9} - 3e^{x^4+9}$.
γ) Αν $a < \beta < 2$, να δείξετε ότι $a - 3 > (\beta - 3)e^{\beta - a}$.
δ) Αν κ, λ είναι αριθμοί μεγαλύτεροι του 2 και ισχύει $\kappa e^{\kappa} - 3e^{\kappa} = \lambda e^{\lambda} - 3e^{\lambda}$, να δείξετε ότι $\kappa = \lambda$.

2.112. Να λύσετε την εξίσωση

$$\left(x^2+x+1\right)^{11} - \left(2x^2-x+1\right)^7 + \left(x^2+x+1\right)^7 - \left(2x^2-x+1\right)^{11} = x^2 - 2x.$$

2.113. α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2lnx + 5x$ ως προς τη μονοτονία.
β)Να λύσετε την ανίσωση

$$2ln\frac{2x^2+x+9}{x^2+4x+7} + 5\left(x^2-3x+2\right) < 0.$$

2.114. Για κάθε $x > 0$, να αποδείξετε τις ανισότητες:

α) $\eta\mu x < 2x$ β) $\eta\mu x > x - \dfrac{x^3}{3}$

2.115. α) Να δείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}.$$

β) Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία για κάθε $x \geq 0$ ισχύει

$$f^5(x) + 2f^3(x) + 3f(x) = (x+1)ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

2.8 Ακρότατα με χρήση παραγώγων

2.116. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^7 - 7x + 2$ β) $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$ γ) $h(x) = \sqrt{x^2 - 25}$

2.117. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \begin{cases} 2x^3 - 3x^2 + 5, & x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1, & x < -1 \end{cases}$ β) $g(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

2.118. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = |e^x - 1|$ β) $g(x) = \sqrt{ln^2 x - 2lnx + 1}$ γ) $h(x) = x^x$, με $x > 0$

2.119. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}(2lnx - 1) - 2x(lnx - 1)$ β) $g(x) = \eta\mu^2 x - \sqrt{2}\eta\mu x + 2\sqrt{2},\ x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

2.120. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 5$ β) $g(x) = xlnx - x + e^x - ex$

2.121. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2 + x$ β) $g(x) = \dfrac{xlnx}{1-x}$ γ) $h(x) = \dfrac{ln(1+x)}{x}$

2.122. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $e^{2x} \geq 2x + 1,\ x \in \mathbb{R}$ β) $lnx \leq \dfrac{x}{e},\ x > 0$ γ) $x^2 \geq 3 - \dfrac{2}{x},\ x > 0$

2.123. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $e^x \geq x^e,\ x > 0$ β) $x^x(4-x)^{4-x} \geq 16,\ x \in (0, 4)$

2.124. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2a/x + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Η f παρουσιάζει στη θέση 2 τοπικό ακρότατο και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$.
α) Να βρείτε τους αριθμούς a, β.
β) Να βρείτε το είδος του ακροτάτου και την τιμή του.

2.125. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - \beta x^2 + x + 2$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Η f παρουσιάζει στις θέσεις -1 και 1 τοπικά ακρότατα.
α) Να βρείτε τους αριθμούς a, β.
β) Να βρείτε το είδος κάθε ακροτάτου και την τιμή του.

2.126. Θεωρούμε συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση
$$f^3(x) + f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$
Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

2.127. Δίνεται ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση
$$1 + alnx \leq x$$
όπου a πραγματική σταθερά. Αποδείξτε ότι $a = 1$.

2.128. Δίνεται ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει η σχέση
$$a^x + \beta^x + \gamma^x \geq 3x + 3$$
όπου a, β, γ θετικές πραγματικές σταθερές. Αποδείξτε ότι $a\beta\gamma = e^3$.

2.129. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f(e) = 1$ και για κάθε $x > 0$ να ισχύει η σχέση $f(x) \leq lnx$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(e, f(e))$.

2.130. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε $f(\pi) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει η σχέση $f(x) \geq \eta\mu x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\pi, f(\pi))$.

2.131. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $[0, 2]$, τέτοιες ώστε
$$g(0) = g(2) = 0 \quad \text{και} \quad g(x)f'(x) + f(x) = 4\,,\ x \in [0, 2].$$
Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [0, 2]$ ισχύει $f(x) = 4$.

2.132. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f και g παραγωγίσιμες στο $[-3, 3]$, τέτοιες ώστε
$$g(-3) = g(3) = 0 \quad \text{και} \quad g^2(x)f'(x) - f(x) = -2\,,\ x \in [-3, 3].$$
Να δείξετε ότι για κάθε $x \in [-3, 3]$ ισχύει $f(x) = 2$.

2.133. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

2.134. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 1$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

2.135. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 3x/(x^2 + 1)$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 2011/2012$.

2.136. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a.

2.137. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - |x| - 2$.
α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = a$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του a.

2.138. Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κέρδος που δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - ax^3/4$, όπου το x διατρέχει το ανοικτό διάστημα $(0, +\infty)$ και η παράμετρος a παίρνει τιμές στο κλειστό διάστημα $[2/9, 9/2]$.
α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος, το οποίο συμβολίζουμε με $M(a)$.
β) Να βρείτε την τιμή του $a \in [2/9, 9/2]$ για την οποία το $M(a)$ γίνεται μέγιστο, καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

2.139. Μία ώρα μετά τη λήψη x mgr ενός αντιπυρετικού, η μείωση της θερμοκρασίας ενός ασθενούς σε $^\circ C$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$T(x) = \frac{1}{5}\left(x^2 - \frac{x^3}{12}\right),\ 0 < x < 10.$$

Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η δόση του αντιπυρετικού ώστε:
α) Η μείωση της θερμοκρασίας ως προς x να είναι μέγιστη.
β) Ο ρυθμός μεταβολής της μείωσης της θερμοκρασίας ως προς x να είναι μέγιστος.

2.140. Με 200 μέτρα συρματόπλεγμα θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με σκοπό να κατασκευαστεί σ' αυτή ένα θερμοκήπιο. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε το εμβαδό του να είναι το μέγιστο δυνατό.

2.141. Η ημερήσια παραγωγή μιας περιοχής με 30 πηγάδια άντλησης πετρελαίου είναι 6000 βαρέλια. Όλα τα πηγάδια έχουν την ίδια ημερήσια παραγωγή. Για κάθε νέο πηγάδι που ανοίγεται η ημερήσια παραγωγή κάθε πηγαδιού μειώνεται κατά 5 βαρέλια.
α) Να εκφράσετε την ολική παραγωγή ως συνάρτηση του αριθμού x των νέων πηγαδιών.
β) Να βρείτε τον αριθμό των νέων πηγαδιών ώστε να έχουμε τη μέγιστη ημερήσια παραγωγή.

2.142. Θεωρούμε κύκλο (K, R), ένα σημείο του Α και την εφαπτόμενη του κύκλου στο Α. Έστω ακόμη χορδή ΒΓ του κύκλου παράλληλη στην παραπάνω εφαπτόμενη. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η απόσταση της χορδής ΒΓ από την εφαπτόμενη στο Α, ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ να είναι μέγιστο.

2.9 Κοίλα και σημεία καμπής

2.143. Να μελετήσετε ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^4 - 6x^2$ β) $f(x) = -e^x + lnx$ γ) $f(x) = 2x + ln\left(x^2 + 1\right)$

2.144. Δίνονται οι $a, \beta \in \mathbb{R}$ με $a < \beta$ και η συνάρτηση $f(x) = (x-a)^5(x-\beta)^3$.
α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \neq a$ και $x \neq \beta$ ισχύει η σχέση

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x-a} + \frac{3}{x-\beta}.$$

β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $g(x) = ln\,|f(x)|$ είναι κοίλη στο διάστημα (a, β).

2.145. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + \beta x^2 - 1$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τους αριθμούς a, β ώστε το $M(1, 3)$ να είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

2.146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2x^3 + 6ax^2$, όπου a πραγματικός αριθμός. Να βρείτε για ποιες τιμές του a η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

2.147. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β), τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(3)}(x_0) < 0.$$

Να δείξετε ότι το $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της της γραφικής παράστασης της f.

2.148. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο (a, β), τρεις φορές παραγωγίσιμη στο $x_0 \in (a, \beta)$, τέτοια ώστε

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(3)}(x_0) > 0.$$

Να δείξετε ότι το $M(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της της γραφικής παράστασης της f.

2.149. α) Δίνεται η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(-3, 3)$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in (-3, 3)$ να ισχύει η σχέση $f^2(x) - 4f(x) = 5 - x^2$.
α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημείο καμπής.
β) Αν για τη συνάρτηση του ερωτήματος (α) γνωρίζουμε ότι $f(0) < 0$, να βρείτε τον τύπο της.

2.150. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - 2xlnx$, όπου a θετική σταθερά.
α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να προσδιορίσετε το a, ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

2.151. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και τη συνάρτηση g, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{και} \quad g(x)f'(x) = 2f(x).$$

Η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(\xi, f(\xi))$. Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(\xi, g(\xi))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $-2x + y + 5 = 0$.

2.152. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι σχέσεις

$$f''(x) = (e^x + x^2)g(x) \quad \text{και} \quad g(x) \neq 0.$$

α) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημείο καμπής.
β) Αν $g(1) = -3$, να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα κάτω στο $\mathbb{R}$.

2.153. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν οι σχέσεις

$$f(x) > 0 \quad \text{και} \quad f''(x)f(x) - (f'(x))^2 > 0.$$

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = ln\,(f(x))$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
β) Να δείξετε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f\left(\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2}\right) \leq \sqrt{f(x_1)f(x_2)}.$$

2.154. Θεωρούμε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, στο $x_0 \in \mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$f''(x) > 4\left(f'(x) - f(x)\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 0$.

2.155. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + e^x - 3x$.
α) Αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$.
β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f(x) \geq -2x + 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + e^x = x + 1$.

2.156. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(lnx)$.
α) Αποδείξτε ότι η f είναι κοίλη στο $(1, +\infty)$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(e, f(e))$.
β) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει η σχέση $f(x) \leq e^{-1}x - 1$.
γ) Να λυθεί η εξίσωση $eln(lnx) = x - e$.

2.10 Κανόνες de L' Hospital

2.157. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8^x-4^x}{x^2+x}$ β) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{21}-x^5+x-1}{x^2-1}$ γ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+e^x}{2x^2+5}$ δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+5}{e^x+x}$

2.158. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x\cdot \eta\mu(2x)+(e^x-4)\eta\mu(2x)}{x^2+x}$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\eta\mu^2 x+3)\,(e^x-1)}{(2x\cdot\eta\mu x+x)\,(x^4+x^3+x^2-5)}$

2.159. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(2x)+x}{\eta\mu(5x)+x^2}$ β) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\eta\mu(\sigma\upsilon\nu x)}{2\sigma\upsilon\nu x}$ γ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x lnx}{e^x+x}$ δ) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{xlnx-1}{e^x+x^2}$

2.160. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(5x^2-3lnx+5\right)$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(3e^x-x^2-4\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\eta\mu x}\right)$

2.161. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(e^{-x}ln(x+1)-2\right)$ β) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\cdot lnx+e^{x+2}\right)$ γ) $\lim\limits_{x\to 0}\left((e^x-1)lnx\right)$

2.162. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ β) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+1)^{2/x}$ γ) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ δ) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu(1/x)}{\eta\mu x}$

2.163. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=lnx-x+5$. Να βρείτε τα όρια της f στο 0 και στο $+\infty$ και το σύνολο τιμών της f.

2.164. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε να είναι

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}^\star \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(xf'(x)+f(x))=4.$$

Να δείξετε ότι το όριο της $f(x)$ όταν $x\to+\infty$ είναι ίσο με 4.

2.165. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, τέτοια ώστε να ισχύουν

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=a\in\mathbb{R}^\star \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}(f'(x)+f(x))=2.$$

Να δείξετε ότι το όριο της $f(x)$ όταν $x\to+\infty$ είναι ίσο με 2.

2.166. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(2)=g(2)=0$, $f'(2)=g'(2)=0$. Αν υπάρχουν οι δεύτερες παράγωγοι των f, g στο 2 και ισχύει $f''(2)=4g''(2)\neq 0$, να βρείτε το όριο της $f(x)/g(x)$ όταν $x\to 2$.

2.167. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, με $f(0)=f'(0)=0$. Αν υπάρχει η δεύτερη παράγωγος της f στο 0 και ισχύει $f''(0)=-4$, να βρείτε το όριο της $f(x)/x^2$ όταν $x\to 0$.

2.11 Ασύμπτωτες

2.168. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-3}$ β) $f(x) = \dfrac{4x^2-5x+6}{x^2+x+1}$ γ) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ 5/x, & x < 0 \end{cases}$

2.169. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x-1}$ β) $f(x) = \dfrac{lnx}{e^x}$ γ) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{lnx}}$ δ) $f(x) = \dfrac{x}{lnx}$

2.170. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x+2$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2f(x)+3x-2}{xf(x)-5x^2-x+7}$ β) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2xf(x)-10x^2-8}{f(x)+3x+2}$

2.171. Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g τέτοιες ώστε να ισχύει $f(x) - g(x) = x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται ότι η ευθεία $y = 3x - 7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.
α) Να βρείτε τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)+3x+\eta\mu(2x)}{xf(x)-3x^2+1}.$$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x - 3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g στο $+\infty$.

2.172. Η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και ισχύει

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mu f(x)+4x}{xf(x)-2x^2+3x} = 1$$

όπου μ πραγματική σταθερά. Να βρείτε τον αριθμό μ.

2.173. Η ευθεία $y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη στο $+\infty$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{ax^2+\beta x}{x-2}$$

όπου a, β πραγματικές σταθερές. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων a, β.

2.174. Οι ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ είναι κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+\lambda x+\mu}$$

όπου λ, μ πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ, μ.

3 Ολοκληρωτικός λογισμός

3.1 Αρχική συνάρτηση

3.1. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \sqrt[5]{x^9}$ β) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{2x^2}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}}$

3.2. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 e^x + 2xe^x$ β) $f(x) = \dfrac{xe^x - e^x}{x^2}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}$

3.3. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = (2x+1)\sigma\upsilon\nu\left(x^2 + x\right)$ β) $f(x) = x\left(2x^2 - 1\right)^3$ γ) $f(x) = xe^{x^2}$

3.4. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4 + 1}$ β) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^5}$ γ) $f(x) = \dfrac{3x+6}{\sqrt[3]{x^2 + 4x + 8}}$

3.5. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{1}{xlnx}$ β) $f(x) = \dfrac{1}{x(lnx)^2}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{\epsilon\phi x}$ δ) $f(x) = \epsilon\phi^3 x$

3.6. Να βρείτε μια αρχική για τη συνάρτηση f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ β) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$ γ) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ δ) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - 1}$

3.7. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις (οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για κάθε $x > 0$):

α) $f'(x)f(x) + \dfrac{1}{x} = 1\,,\ f(1) = \sqrt{2}$ β) $(x - \eta\mu x)f'(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu x\,,\ f(\pi) = ln\pi$

3.8. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις (οι αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για κάθε $x > 0$):

α) $f'(x) = lnx + 1\,,\ f(1) = -2$ β) $f''(x) = e^{-x} + \dfrac{1}{x}\,,\ f(1) = e^{-1}\,,\ f(e) = e^{-e} + e$

3.2 Ορισμένο ολοκλήρωμα και ιδιότητες

3.9. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 2x + 4$ και $g(x) = 2$ και με τη βοήθεια αυτών να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{-2}^{1} f(x)dx$ β) $\displaystyle\int_{-2}^{1} g(x)dx$ γ) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \left(2f(x) - 5g(x)\right)dx$

3.10. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x + 1$ και $g(x) = -x + 2$ και με τη βοήθεια αυτών να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{0}^{2} f(x)dx$ β) $\displaystyle\int_{0}^{2} g(x)dx$ γ) $\displaystyle\int_{0}^{2} \left(2g(x) - 3f(x)\right)dx$

3.11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx$ β) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx$ γ) $\displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{2} \sqrt{4 - x^2}dx$

3.12. Αποδείξτε ότι

α) $\displaystyle\int_{1}^{e} ln\frac{e}{x}\,dx = \int_{e}^{1} (lnx - 1)dx$ β) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2e^x}{e^x + 1}dx + \int_{0}^{1} \frac{2}{e^x + 1}dx = 2$

3.13. Αποδείξτε ότι

α) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\,dx = \frac{1}{2}$ β) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3 - 5x^2 + 10x - 3}{x^2 + x + 1}dx - 3\int_{1}^{0} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}dx = \frac{1}{2}.$

3.14. Θεωρούμε τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f, για την οποία είναι γνωστό ότι

$$\int_{1}^{5} f(x)dx = 2, \quad \int_{7}^{10} f(x)dx = 3, \quad \int_{10}^{1} f(x)dx = -4.$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\displaystyle\int_{5}^{10} f(x)dx$ β) $\displaystyle\int_{1}^{7} f(x)dx$ γ) $\displaystyle\int_{5}^{7} f(x)dx$

3.15. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

α) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \eta\mu x\,dx$ β) $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sigma\upsilon\nu x\,dx$ γ) $\displaystyle\int_{0}^{3} (-x + 1)dx$ δ) $\displaystyle\int_{0}^{3} (x - 2)dx$

3.3 Το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού

3.16. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 (\sqrt{x}+x)dx$ β) $\int_{-1}^0 \frac{3x}{x^2+1}dx$ γ) $\int_0^1 x^2\left(x^3+1\right)^2 dx$ δ) $\int_1^2 \frac{x+2}{x^2}dx$

3.17. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$ β) $\int_0^1 x\sqrt[3]{x^2+4}\,dx$ γ) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \epsilon\phi x\,dx$ δ) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \sigma\phi x\,dx$

3.18. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^2 |x-1|\,dx$ β) $\int_{-2}^2 \left|1-x^2\right| dx$ γ) $\int_0^1 \left|x^3-1\right| dx$ δ) $\int_0^2 \frac{|x-2|}{|x-1|+1}dx$

3.19. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x+e^x, & x\le 0\\ \sigma\upsilon\nu x, & x>0 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{\pi} f(x)dx.$$

3.20. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} xe^x+e^x, & x\le -1\\ e^{x+1}-1, & x>-1 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-2}^{0} f(x)dx.$$

3.21. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^1 \frac{3x-2}{x^2+5x+6}dx$ β) $\int_0^1 \frac{x+2}{x^2+4x+3}dx$ γ) $\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^2-3x+2}dx$

3.22. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x=a$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\pi/3$, ενώ στο σημείο με τετμημένη $x=\beta$ γωνία $\pi/4$. Αν η f'' είναι συνεχής στο $[a,\beta]$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^{\beta} f''(x)dx.$$

3.23. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο διάστημα $[0, \pi]$, $f(\pi) = e^{-\pi}$ και

$$\int_0^{\pi} \left(f(x) + f'(x)\right) e^x dx = 2.$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $(0, -1)$.

3.24. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[a, \beta]$ και ικανοποιεί την ισότητα

$$\int_a^{\beta} f'(x) e^{f(x)} dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει μία τουλάχιστον εφαπτόμενη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

3.25. Θέτουμε

$$I_\nu = \int_0^{\pi/4} \epsilon\phi^\nu x dx$$

όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι $I_{\nu+2} = \frac{1}{\nu+1} - I_\nu$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το I_5.

3.26. Να βρείτε τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f(x) = x^2 + x^3 \cdot \int_0^1 f(t) dt.$$

3.27. Να βρείτε τη συνεχή στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$\int_0^1 e^{1-t} f(t) dt = f(x) + e^x.$$

3.28. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_1^2 \left(e^{xt} + 1\right) dt$ β) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu\left(x^2 t\right) dt$ γ) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^1 \frac{x+3}{2x^2 + x + 5} e^t dt$

3.4 Μέθοδοι ολοκλήρωσης

3.29. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_1^e \left(x^2+1\right) lnx\,dx$ β) $\int_0^1 x\eta\mu(3x)dx$ γ) $\int_0^1 x^2e^{3x}dx$ δ) $\int_1^e ln^2(3x)dx$

3.30. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi/2} e^x\eta\mu(2x)dx$ β) $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\eta\mu^2 x}dx$ γ) $\int_0^{\pi} \sigma\upsilon\nu^2 x\,dx$ δ) $\int_0^{\pi} \eta\mu^2 x\,dx$

3.31. Θεωρούμε τη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το $f(1)=0$, να δείξετε ότι

$$\int_0^1 x^2 f''(x)dx = 2\int_0^1 f(x)dx.$$

3.32. Θέτουμε

$$I_\nu = \int_1^e x^4(lnx)^\nu dx$$

όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός. Να δείξετε ότι $5I_{\nu+1} = e^5 - (\nu+1)I_\nu$.

3.33. Έστω μια συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο 2 και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$. Αν ισχύει

$$\int_0^2 \left[xf''(x)+3f'(x)\right]dx = -\frac{8}{3}$$

να υπολογίσετε το $f(2)$.

3.34. Έστω μια συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_0^1 xf'(x)dx = 3 - \int_0^1 f(x)dx.$$

Να βρείτε την τιμή της συνάρτησης f στο 1.

3.35. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx$ β) $\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}dx$ γ) $\int_0^{ln3} \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ δ) $\int_0^1 \frac{x}{(x+1)^3}dx$

3.36. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{(\eta\mu x-1)(\eta\mu x+3)}dx$ β) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu x}dx$ γ) $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\eta\mu x\sigma\upsilon\nu x}dx$

3.37. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(x^5 + x^3) = 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 f(x)dx.$$

3.38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x$. Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 f^{-1}(x)dx.$$

3.39. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \geq 0$:

α) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{1 + e^{2t}}dt = \int_1^{e^a} \sqrt{\frac{1 + t^2}{t^2}}dt$ β) $\displaystyle\int_{-a}^a \frac{t^2}{e^t + 1}dt = \int_{e^{-a}}^{e^a} \frac{(lnt)^2}{t^2 + t}dt$

3.40. Θεωρούμε τη συνεχή στο διάστημα $[a, \beta]$ συνάρτηση f. Να δείξετε ότι ισχύουν

α) $\displaystyle\int_a^\beta f(x)dx = \int_a^\beta f(a + \beta - x)dx$ β) $\displaystyle\int_a^\beta \frac{f(x)}{\beta - a}dx = \int_0^1 f\left(a + (\beta - a)x\right)dx$

3.41. α) Θεωρούμε την περιττή και συνεχή στο διάστημα $[-a, a]$ συνάρτηση f, όπου a θετικός πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$

β) Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$$I_1 = \int_{-1}^1 \frac{3\eta\mu x}{x^4 + x^2 + 1}dx \quad \text{και} \quad I_2 = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{5\eta\mu^3 x + 3x^5 + 2}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx.$$

3.42. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(x) + f(a + \beta - x) = c$, για κάθε $x \in [a, \beta]$, όπου c πραγματικός αριθμός. Να δείξετε ότι

$$\int_a^\beta f(x)dx = (\beta - a)f\left(\frac{a + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - a}{2}\left(f(a) + f(\beta)\right).$$

3.43. Θεωρούμε τη συνεχή στο $[a, \beta]$ συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$. Θέτουμε

$$I_1 = \int_a^\beta \frac{f(x)}{f(a + \beta - x) + f(x)}dx \quad \text{και} \quad I_2 = \int_a^\beta \frac{f(a + \beta - x)}{f(a + \beta - x) + f(x)}dx.$$

α) Να δείξετε ότι $I_1 = I_2$.
β) Να υπολογίσετε συναρτήσει των a, β το ολοκλήρωμα I_1.

3.5 Ανισοτικές σχέσεις στα ολοκληρώματα.

3.44. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sqrt{x^2-4x}\,dx \leq \sqrt{5}$ β) $\displaystyle\int_{-1}^{2} ln\left(x^2+e^2\right)dx \geq 6$ γ) $\displaystyle\int_{0}^{3} e^{x^2-2x}\,dx \leq 3e^3$

3.45. Αποδείξτε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{2}{1+\sigma\upsilon\nu^{10}x}dx \leq 2\pi$ β) $\displaystyle\int_{1}^{2} e^{\sigma\upsilon\nu x}dx \leq e$ γ) $\displaystyle\frac{3}{2} \leq \int_{1}^{2} \frac{2x}{1+\eta\mu^4 x}dx \leq 3$

3.46. Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έστω a, β πραγματικοί αριθμοί με $a < \beta$.
α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει η σχέση $f(x) - f(a) \leq f'(\beta)(x-a)$.
β) Να δείξετε ότι

$$2\int_{a}^{\beta} f(x)dx \leq f'(\beta)(\beta-a)^2 + 2f(a)(\beta-a).$$

3.47. Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f. Για κάθε πραγματικό αριθμό a να δείξετε ότι:

α) $\displaystyle\int_{a}^{a+2} f(x)dx > \int_{a+2}^{a+4} f(x)dx$ β) $\displaystyle\int_{a-1}^{a} f(x)dx < \int_{a-4}^{a-3} f(x)dx$

3.48. Θεωρούμε τις συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g, τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) \leq g(x) + 4x$. Επιπλέον η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και έχει εφαπτομένη σε κάποιο σημείο της γραφικής της παράστασης την ευθεία $y = 2x+1$. Να δείξετε ότι

$$2 \leq \int_{0}^{1} f(x)dx \leq \int_{0}^{1} g(x)dx + 2\,.$$

3.49. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \sqrt{x}$. Αποδείξτε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό $a \in [1, +\infty)$ ισχύει

$$\int_{a-1}^{a} f(x)dx \leq \sqrt{a} \leq \int_{a}^{a+1} f(x)dx.$$

3.50. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{1} t^x e^{t^2}dt$ β) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{1}^{2} \left(x^2+t^2\right)^5 dt$ γ) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{1+t^4+x^4}}dt$

3.51. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, 1]$. Να βρείτε τον τύπο της f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\displaystyle\int_{0}^{1} f^2(x)\,dx + \frac{1}{3} = \int_{0}^{1} 2xf(x)\,dx$ β) $\displaystyle\int_{0}^{1} f^2(x)\,dx + \frac{e^2-1}{2} = \int_{0}^{1} 2e^x f(x)\,dx$

3.6 Εμβαδά επιπέδων χωρίων.

3.52. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται:
α) από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 2$, $x = 3$
β) από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$
γ) από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 4$
δ) από τη C_f και τον άξονα $x'x$.

3.53. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \sqrt{x} - \frac{lnx}{2\sqrt{x}}.$$

Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 4$.

3.54. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^x - e, & x < 1 \\ \dfrac{\sqrt{lnx}}{x}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = e$.

3.55. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x^2 + 5x$, $g(x) = x^2 + 8x - 2$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται:
α) από τη C_f, τη C_g και τις ευθείες $x = 0$, $x = 4$
β) από τη C_f, τη C_g και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$
γ) από τη C_f και τη C_g.

3.56. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x - 1$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g και την ευθεία $x = 0$.

3.57. Οι συναρτήσεις f, g είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, $f'(1) = g'(1)$, $f(2) = g(2)$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x) - g''(x) = 4$. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις C_f, C_g.

3.58. Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$, τον άξονα $y'y$ και τις ευθείες $y = x$, $y = e$.

3.59. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = lnx$.
α) Αποδείξτε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) > g(x)$.
β) Να βρείτε εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από το μεικτόγραμμο τετράπλευρο που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, της ευθείας με εξίσωση $y = 1/2$ και τον άξονα $x'x$.

3.60. Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi/4, \pi/4] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \eta\mu\,(2x + \pi/2)$.
α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο $x_0 = \pi/8$.
β) Να βρείτε το εμβαδό του που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτόμενη, τη γραφική παράσταση της f και τους ημιάξονες Ox, Oy.

3.61. α) Να βρείτε το εμβαδό $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = 3x + \frac{1}{2x^2}$$

και τις ευθείες $y = 3x$, $x = 1$, $x = a$, όπου $a > 1$.
β) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το a τείνει στο $+\infty$.

3.62. Έστω $E(a)$ το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 1/x^2$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = a$, όπου $a > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια του $E(a)$ όταν $a \to +\infty$ και όταν $a \to 0^+$.

3.63. Θεωρούμε μια άρτια συνάρτηση f και μια περιττή συνάρτηση g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x) + g(x) = e^x.$$

α) Να βρείτε το εμβαδό $E(a)$ του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g και τις ευθείες $x = 0$, $x = a$, όπου $a > 0$.
β) Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού $E(a)$ του ανωτέρου χωρίου όταν το a τείνει στο $+\infty$.

3.64. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x$.
α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = ln(2e - 1)$.
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η ευθεία $x = \lambda$ να χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3.65. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 6x^2, & x \geq 0 \\ -3x^2, & x < 0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$, $x = 1$.
β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε η ευθεία $x = \lambda$ να χωρίζει το παραπάνω χωρίο σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

3.66. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2}$. Αποδείξτε ότι το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ είναι μεγαλύτερο του $4/3$.