ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ ΚΑΙ ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Περιεχόμενα :

Σημείωση :

Η παρούσα εργασία απευθύνεται σε μαθητές που ξεκινούν την πρώτη τάξη του λυκείου. Επομένως η συγκεκριμένη παρουσίαση δεν στοχεύει στην όσο το δυνατόν αυστηρή παρουσίαση των παραπάνω θεμάτων , αλλά στην κατανόηση κάποιων βασικών στοιχείων από τους μαθητές τα οποία και θα τους βοηθήσουν στην πορεία τους στα μαθηματικά του λυκείου. Για παράδειγμα η έννοια της συνεπαγωγής δεν παρουσιάζεται όπως σε ένα μάθημα μαθηματικής λογικής αλλά αντιθέτως παρουσιάζεται μόνο ως σύμβολο για την έκφραση « αν … τότε » αφού έτσι θα χρησιμοποιηθεί από τους μαθητές.

Ανέστης Τσομίδης - Μαθηματικός

Α) Προτάσεις-Σύνθεση προτάσεων

$Α_1$)Τι είναι πρόταση

Στην καθημερινή μας ομιλία χρησιμοποιούμε προτάσεις όπως π.χ.

$Π_1$: Φτιάξε ένα καφέ.

$Π_2$: Το Έβερεστ είναι το υψηλότερο βουνό της Γης.

$Π_3$: Η Γη είναι επίπεδη.

Οι παραπάνω προτάσεις $Π_1$, $Π_2$, $Π_3$ αν και από συντακτική και γραμματική άποψη είναι ορθές , στα μαθηματικά δεν είναι όλες αποδεκτές. **Πρόταση** στα μαθηματικά είναι κάθε έκφραση η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί αποκλειστικά ως αληθής ή ψευδής. Έτσι για τα μαθηματικά η $Π_1$ δεν είναι πρόταση, η $Π_2$ είναι αληθής πρόταση ενώ η $Π_3$ ψευδής πρόταση.

$Α_2$)Συνεπαγωγή

Πολλές φορές συμβαίνει το εξής: η αλήθεια μιας πρότασης $Π_1$ να έχει ως συνέπεια την αλήθεια μιας άλλης πρότασης $Π_2$. Αυτό γράφεται :

«Αν $Π_1$ τότε $Π_2$» ή $Π_1 \Rightarrow Π_2$ (διαβάζουμε : η $Π_1$ **συνεπάγεται** την $Π_2$) .

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις προτάσεις :

$Π_1$: «Ο Αλέξανδρος είναι κάτοικος Κατερίνης »,

$Π_2$: « Ο Αλέξανδρος είναι κάτοικος του νομού Πιερίας» .

Παρατηρούμε εδώ ότι αν η $Π_1$ είναι αληθής τότε και η $Π_2$ αναγκαστικά θα είναι αληθής, δηλαδή : $Π_1 \Rightarrow Π_2$. Όμως αν υποθέσουμε ότι η $Π_2$ είναι αληθής τότε δεν προκύπτει αναγκαστικά ότι και η $Π_1$ θα είναι αληθής, δηλαδή : $Π_2 \not\Rightarrow Π_1$.

$Α_3$)Ισοδυναμία

Υπάρχουν όμως περιπτώσεις στις οποίες : $Π_1 \Rightarrow Π_2$ και $Π_2 \Rightarrow Π_1$.Αυτό γράφεται: « $Π_1$ αν και μόνο αν $Π_2$ » ή $Π_1 \Leftrightarrow Π_2$ (διαβάζουμε η $Π_1$ είναι **ισοδύναμη** με την $Π_2$).

Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε τις προτάσεις :

$Π_1$: « Ο Νίκος αγόρασε τρεις σοκολάτες των 50 λεπτών »

$Π_2$: « Ο Νίκος αγόρασε σοκολάτες των 50 λεπτών και πλήρωσε 1,5 ευρώ ».

Παρατηρούμε εδώ ότι $Π_1 \Rightarrow Π_2$ και $Π_2 \Rightarrow Π_1$,δηλαδή $Π_1 \Leftrightarrow Π_2$.

A_4)Άρνηση μιας πρότασης

Έστω μια πρόταση Π. Ονομάζουμε **άρνηση της Π** μια πρόταση η οποία είναι αληθής όταν η Π είναι ψευδής και ψευδής όταν η Π είναι αληθής. Την άρνηση μιας πρότασης Π τη συμβολίζουμε **Π΄**.

Για παράδειγμα έστω οι προτάσεις :

Π_1: « ο αριθμός 2 είναι μικρότερος του 5» ,

Π_2: «η Θεσσαλονίκη είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδας» .

Είναι φανερό ότι η Π_1 είναι αληθής και η Π_2 ψευδής. Οι αρνήσεις αυτών είναι :

Π_1': «ο αριθμός 2 είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 5», η οποία είναι ψευδής πρόταση,

Π_2': «η Θεσσαλονίκη δεν είναι η πρωτεύουσα της Ελλάδας» ,η οποία είναι αληθής.

A_5)Ο σύνδεσμος «και»

Ο Αλέξανδρος είπε : «έχω πάει διακοπές στην Κρήτη **και** στην Ρόδο ». Είναι φανερό ότι η παραπάνω πρόταση είναι αληθής μόνο στην περίπτωση που αληθεύουν συγχρόνως οι προτάσεις : «έχω πάει διακοπές στην Κρήτη », «έχω πάει διακοπές στην Ρόδο».

Έστω δύο προτάσεις Π_1,Π_2. Λέμε ότι η πρόταση «Π_1 **και** Π_2 »**είναι αληθής όταν οι Π_1,Π_2 είναι και οι δύο αληθείς και ψευδής σε κάθε άλλη περίπτωση**.

A_6) Ο σύνδεσμος « ή »

Ρωτάει ο Γιώργος τον Ηλία : Έχεις πάει διακοπές στην Κέρκυρα ή στην Κύπρο;

Ο Ηλίας απάντησε : Ναι. Η απάντηση του Ηλία σημαίνει ότι έχει πάει διακοπές σε ένα τουλάχιστον από τα δύο αυτά νησιά .

Έστω δύο προτάσεις Π_1,Π_2.Λέμε ότι η πρόταση «Π_1 **ή** Π_2» **είναι αληθής όταν μία τουλάχιστον από τις Π_1,Π_2 είναι αληθής και ψευδής όταν και οι δύο είναι ψευδείς.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Θεωρούμε τις προτάσεις :Π_1: «ο Γιώργος βράχηκε» , Π_2: «ο Γιώργος έκανε μπάνιο» .

α)Μπορούμε να γράψουμε $\Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$;

β) Μπορούμε να γράψουμε $\Pi_2 \Rightarrow \Pi_1$;

γ) Μπορούμε να γράψουμε $\Pi_1 \Leftrightarrow \Pi_2$;

2) Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α (αληθής) :

Π	**Π΄**
Α	
Ψ	

3) Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α (αληθής) :

$Π_1$	**$Π_2$**	**$Π_1$και$Π_2$**
Α	Α	
Α	Ψ	
Ψ	Α	
Ψ	Ψ	

4) Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α (αληθής) :

$Π_1$	**$Π_2$**	**$Π_1$ή $Π_2$**
Α	Α	
Α	Ψ	
Ψ	Α	
Ψ	Ψ	

5) Θεωρούμε τις προτάσεις :

$Π_1$: « ο αριθμός 7 είναι περιττός» , $Π_2$: « ο αριθμός 8 είναι άρτιος»,

$Π_3$: « ο αριθμός 11 είναι άρτιος», $Π_4$: «ο αριθμός 12 είναι περιττός ».

Να συμπληρωθεί ο πίνακας με Ψ (ψευδής) ή Α (αληθής) :

$Π_1$και$Π_2$	$Π_2$και$Π_3$	$Π_3$και$Π_4$	$Π_1$ή $Π_2$	$Π_2$ή $Π_3$	$Π_3$ή $Π_4$

6) Θεωρούμε τις προτάσεις : $Π_1$: «Ο Νίκος είναι ποδοσφαιριστής »,

$Π_2$: «Ο Γιάννης είναι ποδοσφαιριστής» .

α)Να διατυπώσετε την πρόταση $Π_1$**και**$Π_2$ και την άρνηση αυτής ($Π_1$**και**$Π_2$)΄

β) Να διατυπώσετε την πρόταση $Π_1$΄ **ή** $Π_2$΄ .

γ) Η πρόταση ($Π_1$**και**$Π_2$)΄ έχει το ίδιο νόημα με την πρόταση $Π_1$΄ **ή** $Π_2$΄ ;

7)Για τις προτάσεις $Π_1$,$Π_2$ της άσκησης **6** :

α)Να διατυπώσετε την πρόταση $Π_1$ **ή** $Π_2$ και την άρνηση αυτής ($Π_1$ **ή** $Π_2$)΄

β) Να διατυπώσετε την πρόταση $Π_1΄$ **και** $Π_2΄$.

γ)Η πρόταση ($Π_1$ **ή** $Π_2$)΄ έχει το ίδιο νόημα με την πρόταση $Π_1΄$ **και** $Π_2΄$;

8)Θεωρούμε τις προτάσεις $Π_1$: « **για κάθε** $x \in \Re$ είναι $x^2 \geq 0$ » .

$Π_2$: « **υπάρχει ένας τουλάχιστον** $x \in \Re$,ώστε $x^2 = -1$» .

α) Να διατυπώσετε τις αρνήσεις των παραπάνω προτάσεων.

β)Τι παρατηρείτε;

9)Συμπληρώστε τα κενά με το «**ή**» ή το «**και** » :

α)Αν $αβ=0$ τότε $α=0$ …… $β=0$.

β)Αν $αβ \neq 0$ τότε $α \neq 0$ …..$β \neq 0$.

Β)Απόδειξη μιας πρότασης

$Β_1$) Ορισμός μιας μαθηματικής έννοιας είναι η περιγραφή της έννοιας αυτής με πληρότητα και ακρίβεια. Π.χ. Ευθύγραμμο τμήμα με άκρα δύο διαφορετικά σημεία Α,Β ονομάζεται το σύνολο με στοιχεία τα Α,Β και τα σημεία της ευθείας ΑΒ που είναι μεταξύ των Α,Β.

Για τον ορισμό μιας έννοιας, χρειάζονται λέξεις που αναφέρονται σε άλλες απλούστερες γνωστές έννοιες. Υπάρχουν όμως και έννοιες που δεν μπορούν να περιγραφούν με άλλες απλούστερες. Οι έννοιες αυτές λέγονται **αρχικές.** Π.χ. οι έννοιες : σημείο , ευθεία , επίπεδο είναι αρχικές.

Απόδειξη μιας πρότασης είναι μια σειρά ορθών συλλογισμών με την οποία διαπιστώνουμε την αλήθεια της πρότασης.

Αξίωμα είναι μια πρόταση η οποία δεχόμαστε ότι αληθεύει , χωρίς αυτό να μπορεί να αποδειχθεί. Τα αξιώματα πηγάζουν από την κοινή διαίσθηση και την εμπειρία μας. Π.χ. η πρόταση «από δύο διαφορετικά σημεία διέρχεται μόνο μία ευθεία » αποτελεί αξίωμα της Γεωμετρίας. Ακόμη η πρόταση «για κάθε $α,β \in \Re$ ισχύει $α+β=β+α$ » αποτελεί αξίωμα της Άλγεβρας.

Θεώρημα είναι μια πρόταση η οποία μπορεί να αποδειχθεί. Για την απόδειξη ενός θεωρήματος μπορούν να χρησιμοποιηθούν άλλες αληθείς προτάσεις (αξιώματα και θεωρήματα).

Πόρισμα είναι ένα θεώρημα που προκύπτει ως άμεσο συμπέρασμα κάποιου θεωρήματος. Π.χ. ένα θεώρημα της Γεωμετρίας είναι το εξής : « Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $Α+Β+Γ=180^0$ ». Ένα πόρισμα αυτού είναι: «Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $Α=Β=Γ=60^0$ ».

$Β_2$)Βασικές μέθοδοι για την απόδειξη προτάσεων της μορφής :

Αν « δεδομένα » τότε να δείξετε ότι «συμπέρασμα ».

<u>$1^η$ ΜΕΘΟΔΟΣ:ΕΥΘΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗ.</u>

Ξεκινάμε από τα δεδομένα και με μια σειρά λογικών βημάτων φτάνουμε στο συμπέρασμα.. Σε αυτή τη σειρά των λογικών βημάτων λαμβάνουμε υπόψη γνωστά θεωρήματα , ορισμούς και αξιώματα..

<u>παράδειγμα:</u>Αν $α<β$ να δείξετε ότι : $α<\frac{\alpha+\beta}{2}<β$.

Έχουμε: $α<β \Rightarrow α+α<α+β \Rightarrow 2α<α+β \Rightarrow α<\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Ακόμη: $α<β \Rightarrow α+β<β+β \Rightarrow α+β<2β \Rightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}<β$. Άρα θα ισχύει: $α<\frac{\alpha+\beta}{2}<β$.

<u>$2^η$ ΜΕΘΟΔΟΣ:ΑΠΑΓΩΓΗ ΣΕ ΑΤΟΠΟ.</u>

Υποθέτουμε ότι δεν ισχύει αυτό που θέλουμε να αποδείξουμε και χρησιμοποιώντας αληθείς προτάσεις , φτάνουμε σε ένα συμπέρασμα που έρχεται σε αντίθεση με αυτό που γνωρίζουμε ότι ισχύει.

<u>παράδειγμα:</u>Αποδείξτε ότι η εξίσωση $x^7+x^5+x^3=x^6+x^4+2$ δεν έχει ως λύση τον αριθμό 1 .

Έστω ότι ο 1 είναι λύση της εξίσωσης. Τότε θα την επαληθεύει , δηλαδή θα έχουμε $1^7+1^5+1^3=1^6+1^4+2 \Rightarrow 3=4$,άτοπο. Άρα ο 1 δεν είναι λύση της εξίσωσης .

$3^η$ ΜΕΘΟΔΟΣ: ΜΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΕΣ.

Μετασχηματίζουμε τον ισχυρισμό που θέλουμε να αποδείξουμε σε ένα ισοδύναμό του , ο οποίος αληθεύει .

παράδειγμα:Αν x,y θετικοί αριθμοί αποδείξτε ότι : $\frac{x}{x+1}<\frac{x+y+3}{x+y+2}$.

Έχουμε διαδοχικά : $\frac{x}{x+1}<\frac{x+y+3}{x+y+2} \Leftrightarrow$ (οι x+1 , x+y+2 είναι θετικοί)

$(x+1)(x+y+2)\frac{x}{x+1}<(x+1)(x+y+2)\frac{x+y+3}{x+y+2} \Leftrightarrow$ (απλοποίηση)

$(x+y+2)x<(x+1)(x+y+3) \Leftrightarrow$ (επιμεριστική ιδιότητα)

$x^2+yx+2x<x^2+xy+3x+x+y+3 \Leftrightarrow$ (αναγωγή όμοιων όρων)

$0<2x+y+3$,το οποίο είναι αληθές αφού $x>0$ και $y>0$.

$4^η$ ΜΕΘΟΔΟΣ: ΜΕ ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ .

Για να δείξουμε ότι ένας ισχυρισμός δεν αληθεύει πάντα , αρκεί να δείξουμε ότι δεν αληθεύει σε μια ειδική περίπτωση (αντιπαράδειγμα) .

παράδειγμα:Αποδείξτε ότι ο ισχυρισμός $\frac{2\nu+1}{7}\in\mathbf{N}$ δεν είναι δυνατόν να ισχύει για κάθε $\nu\in\mathbf{N}$ (**N**: το σύνολο των φυσικών αριθμών) .

Παρατηρούμε ότι για ν=2 : $\frac{2\nu+1}{7}=\frac{5}{7}$,το οποίο δεν είναι φυσικός .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) α)Αν ο x είναι ακέραιος να δείξετε ότι ο αριθμός $x(x+1)$ είναι άρτιος .

(υπόδειξη : να διακρίνετε τις περιπτώσεις x άρτιος , x περιττός)

β)Αν x, y είναι ακέραιοι να δείξετε ότι το κλάσμα $\frac{x^2+x}{y^2+y}$ απλοποιείται .

2) Αν γ είναι ο μέσος όρος των αριθμών α , β να δείξετε ότι η διαφορά του γ από τον β είναι ίση με $\frac{\beta-\alpha}{2}$.

3) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $Β>90^0$.

4) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών 1 , 2 , 3 .

5) Έχουμε 7 κουτιά και 64 μπαλάκια . Τοποθετούμε τυχαία τα 64 μπαλάκια στα 7 κουτιά . Αποδείξτε ότι σε ένα τουλάχιστον κουτί τα μπαλάκια είναι τουλάχιστον 10 .

6) Είναι γνωστό ότι η διαφορά δύο ρητών είναι ρητός .Αποδείξτε ότι αν ο αριθμός χ είναι ρητός και ο αριθμός ψ άρρητος τότε ο χ+ψ είναι άρρητος .

7) Αν $x^2+1=y^2$ και $x\neq 0$, $y\neq 1$ να δείξετε ότι $\frac{1+y}{x}=\frac{x}{y-1}$.

8) Με την βοήθεια της ισότητας $(\alpha-1)^2=\alpha^2-2\alpha+1$ αποδείξτε ότι :
Αν $\alpha+\beta=2$ τότε $\alpha\beta\leq 1$.

9) Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο αριθμών δεν είναι πάντα μεγαλύτερο από το άθροισμά τους .

10) Αποδείξτε ότι η ισότητα $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2$, $\alpha,\beta \in \Re$,δεν αληθεύει πάντα .

11) α)Αρχή του Dirichlet ή αρχή της περιστεροφωλιάς .

Αποδείξτε ότι αν νχ+1 αντικείμενα τοποθετηθούν σε χ θέσεις (τυχαία) τότε σε μία τουλάχιστον θέση θα υπάρχουν ν+1 τουλάχιστον αντικείμενα .

β)Σε μια συνάντηση υπάρχουν εκπρόσωποι από 4 χώρες . Αν το πλήθος των εκπροσώπων είναι 45 , αποδείξτε ότι υπάρχουν 12 τουλάχιστον άτομα τα οποία εκπροσωπούν την ίδια χώρα .

γ)Δύο φίλοι ο Γιώργος και ο Νίκος παίζουν « βελάκια » σε ένα πίνακα σχήματος ορθογωνίου και διαστάσεων 3 dm X 4 dm .Ο Νίκος στοιχημάτισε ότι αν ρίξει 13 βελάκια στον πίνακα 2 τουλάχιστον θα απέχουν μεταξύ τους λιγότερο από 2 dm .Αποδείξτε ότι ο Νίκος θα κερδίσει σίγουρα το στοίχημα .

12)α)Αντιθετοαντιστροφή .

Έστω ότι αν η πρόταση Π_1 είναι αληθής τότε και η πρόταση Π_2 είναι αληθής, δηλαδή $\Pi_1 \Rightarrow \Pi_2$.Αποδείξτε ότι αν η Π_2' είναι αληθής τότε και η Π_1' θα είναι αληθής δηλαδή $\Pi_2' \Rightarrow \Pi_1'$.

β)Με δεδομένο ότι αν ο Αλέξανδρος πει την αλήθεια τότε και ο Γιώργος λέει την αλήθεια για κάποιο θέμα , να δείξετε ότι αν ο Γιώργος λέει ψέματα τότε οπωσδήποτε και ο Αλέξανδρος λέει ψέματα .