

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ Α΄ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Απόδειξη μιας πρότασης είναι η διαδικασία με την οποία καταλήγουμε στην αλήθεια της πρότασης, χρησιμοποιώντας άλλες αληθείς προτάσεις όπως ορισμούς, θεωρήματα πορίσματα αξιώματα.

Οι σπουδαιότεροι τρόποι απόδειξης είναι οι εξής:

- Η ευθεία απόδειξη
- Η ισοδυναμία
- Της απαγωγής σε άτοπο.

A. Χρησιμοποιώντας την ευθεία απόδειξη να αποδείξετε ότι:

A1. Αν $\alpha < 2 < \beta$ τότε $(\alpha - 2)(\beta - 2)(\alpha - \beta) > 0$

A2. Αν $0 < x \leq 2$ και $1 \leq y < 3$ τότε:

i. $-3 < 2x - y \leq 3$ ii. $0 < \frac{x}{y} \leq 2$

A3. Αν ο αριθμός α είναι άρτιος ακέραιος τότε ο α^2 είναι άρτιος.

B. Χρησιμοποιώντας την απόδειξη με ισοδυναμία να αποδείξετε ότι:

B1. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2$

B2. Αν $\alpha > \beta > 0$ τότε: $\frac{\alpha + 2}{\alpha} < \frac{\beta + 2}{\beta}$

Γ. Χρησιμοποιώντας την απαγωγή σε άτοπο να αποδείξετε ότι:

Γ1. Αν ο αριθμός α είναι ακέραιος και ο α^2 είναι άρτιος τότε ο α είναι άρτιος.

Γ2. Ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

2. Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

Οι σπουδαιότεροι τρόποι απόδειξης μιας ταυτότητας είναι οι εξής:

- Παίρνουμε το πιο σύνθετο μέλος και με κατάλληλους μετασχηματισμούς (πράξεις, παραγοντοποίηση, εφαρμογή ταυτοτήτων) καταλήγουμε στο άλλο μέλος.
- Αν και τα δύο μέλη είναι πολύπλοκα παίρνουμε το κάθε μέλος χωριστά κάνουμε μετασχηματισμούς και καταλήγουμε σε μια παράσταση Α.
- Παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε και με ισοδυναμίες, αφού κάνουμε μετασχηματισμούς, καταλήγουμε σε μια ισότητα η οποία ή είναι προφανής από τη θεωρία ή ισχύει από την υπόθεση.

Για να αποδείξουμε ότι μια ισότητα δεν είναι ταυτότητα χρησιμοποιούμε ένα αντιπαράδειγμα.

A. Χρησιμοποιώντας μια από τις παραπάνω μεθόδους να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

A1. $(\alpha - \beta)^2 - 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta)^2 = 4\beta^2$

A2. $\alpha^2 - (\alpha + 2)(\alpha - 2) = 4$

A3. $x^2 - (x + 2)(x - 2) = y^2 - (y + 2)(y - 2)$

A4. Αν $\alpha \cdot \beta = 1$ να αποδείξετε ότι: $\frac{\alpha^3}{1+\alpha^2} - \frac{\beta^3}{1+\beta^2} = \alpha - \beta$

B. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ισότητες δεν είναι ταυτότητες:

B1. $\alpha + 3 = 10$

B2. $\sqrt{\alpha^2} = \alpha^2$

B3. $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$

3. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{(xy^{-2})^3 (x^2y)^{-1}}{(y^{-1})^7 : (-y)}$ αν $x = 743$ και $y = -2^4$.

4. Να δείξετε ότι η παράσταση $A = (x+1)(x^2 - x + 1) - (x+1)^3 + 3x(x+1)$ είναι ανεξάρτητη του x .

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

i. $\frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$

ii. $\frac{x^3 - 2x + x}{x^2 - x}$

iii. $\frac{x(x-2)+1}{x^2 - 3x + 2}$

iv. $\frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1 - \beta^2}{\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha}$

6. Αν $1 < x \leq 3$ και $2 \leq y < 5$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

$2x + y$ $x - 3y$ xy $\frac{x}{y}$ $x^2 - y^3$

7. Να δείξετε ότι για κάθε τιμή των μεταβλητών x, y ισχύει:

i. $x^2 - 4x + 5 > 0$

ii. $2x^2 + 2x + 3 > 0$

iii. $x^2 - x + 1 > 0$

iv. $x^2 + y^2 - 4x + 6y \geq -13$. Πότε ισχύει το ίσον;

8. Να βρείτε τις τιμές των x, y σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $x^2 + y^2 - 10x + 4y = -29$

ii. $2x^2 + 1 + 2xy - 2x + y^2 = 0$

9. Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x-3|$

10. Αν $-2 < \alpha < 2$ να δείξετε ότι $|4 - |\alpha - 2|| = \alpha + 2$

11. Να δείξετε ότι $\left| \frac{x}{1+x^2} \right| \leq \frac{1}{2}$

12. Αν $x = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} - \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$

i. Να αποδείξετε ότι $x < 0$

ii. Να αποδείξετε ότι $x^2 = 4$

iii. Να βρείτε το x .

13. Να βρείτε τους αριθμούς x σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i. $|x| = 10$

ii. $|x-2| = 15$

iii. $||x-2|-7| = 10$

iv) $|x| > 12$

v. $|x-12| > 7$

vi. $|x-2| < 3$

14. Να μετατρέψετε τις παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή.

i. $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$

ii. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}-1}$

iii. $\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

ΓΙΑ ΝΑ ΔΕΙΤΕ ΤΙΣ ΛΥΣΕΙΣ ΠΑΤΗΣΤΕ ΣΤΟΝ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΥΝΔΕΣΜΟ

<http://users.sch.gr/apappas/askhseis.files/lyseis/lyseisa11.pdf>