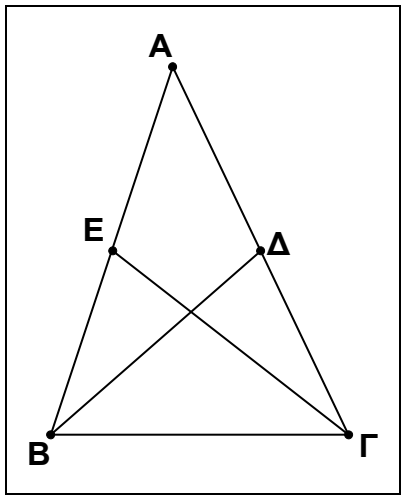
ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΤΟ ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ

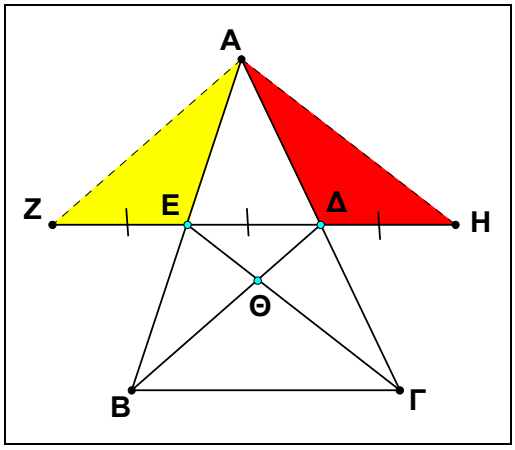
1. ***Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες και αντίστροφα αν δύο διάμεσοι ενός τριγώνου είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.***



Απόδειξη:
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΒΔ, ΓΕ οι διάμεσοί του προς τις ίσες πλευρές του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι ΒΔ=ΓΕ.
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1. ΒΓ κοινή πλευρά
2. ΒΕ=ΔΓ, μισά των ίσων πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και
3. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ) και επομένως θα είναι και ΕΓ=ΒΔ.

Αντίστροφα



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΒΔ και ΓΕ για τις οποίες ισχύει ότι ΒΔ=ΓΕ (1). Θα δείξουμε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

Απόδειξη 1η
Προεκτείνω την ΕΔ κατά ίσα τμήματα ΖΕ=ΕΔ=ΔΗ.
Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΕΒΔ είναι ίσα (ΑΕ=ΕΒ, ΕΖ=ΕΔ και $A\hat{E}Z = B\hat{E}\Delta$) και επομένως

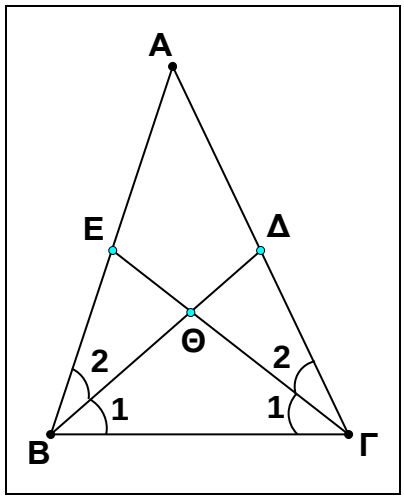
ΑΖ=ΒΔ (2)

Ομοίως από τη σύγκριση των τριγώνων ΑΔΗ και ΕΔΓ προκύπτει ότι

ΑΗ=ΕΓ (3)

Από (1),(2) και (3) προκύπτει ότι ΑΖ=ΑΗ.
Τα τρίγωνα ΑΖΕ και ΑΔΗ είναι ίσα (ΑΖ=ΑΗ, ΖΕ=ΔΗ και $A\hat{Z}E = A\hat{H}\Delta$ (τριγ ΑΖΗ ισοσκελές)) άρα ΑΕ=ΑΔ και επομένως και 2ΑΕ=2ΑΔ δηλαδή ΑΒ=ΑΓ.

Απόδειξη 2η



Αν Θ το σημείο τομής των διαμέσων τότε

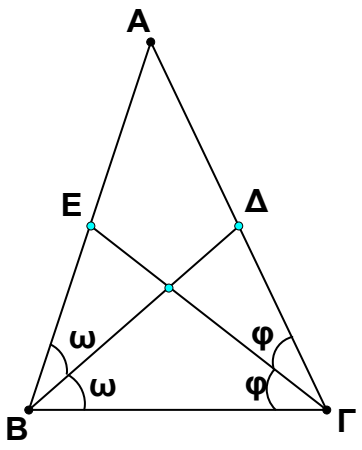
$$\Theta B = \frac{2}{3}B\Delta, \quad \Theta\Delta = \frac{1}{3}B\Delta \quad \text{και}$$

$$\Theta\Gamma = \frac{2}{3}\Gamma E, \quad \Theta E = \frac{1}{3}\Gamma E$$

Επειδή ΒΔ=ΓΕ θα έχουμε ΒΘ=ΓΘ και επομένως $\widehat{B_1} = \widehat{\Gamma_1}$. Επίσης τα τρίγωνα ΕΘΒ και ΔΘΓ είναι ίσα (ΕΘ=ΘΔ, ΒΘ=ΘΓ και $E\hat{\Theta}B = E\hat{\Theta}\Gamma$) άρα $\widehat{B_2} = \widehat{\Gamma_2}$. Έτσι τελικά προκύπτει ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα το ΑΒΓ είναι ισσκελές.

Επιμέλεια: Παππάς Αθανάσιος/ 2ο ΓΕΛ Υμηττού

2. ***Οι διχοτόμοι που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες και αντίστροφα αν δύο (εσωτερικές) διχοτόμοι ενός τριγώνου είναι ίσες τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.***



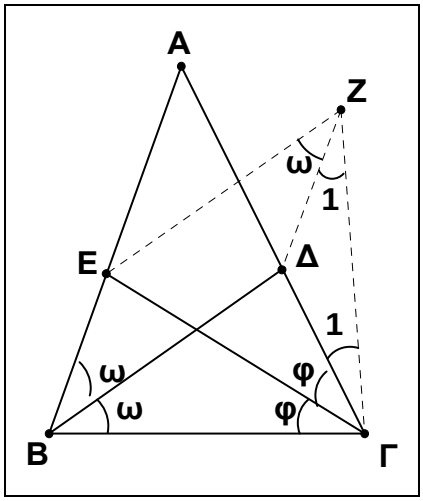
Απόδειξη:
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΒΔ, ΓΕ οι διχοτόμοι του προς τις ίσες πλευρές του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι ΒΔ=ΓΕ.
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:
1. ΒΓ κοινή πλευρά
2. $E\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{B}\Gamma$, μισά των ίσων γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
3. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ) και επομένως θα είναι και ΕΓ=ΒΔ.

Αντίστροφα
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι του για τις οποίες ισχύει ότι ΒΔ=ΓΕ. Θα δείξουμε ότι ΑΒ=ΑΓ.

1η Απόδειξη(εξανθρωπισμένη)

Από τα Ε και Δ φέρουμε παράλληλες προς τις ΒΔ και ΑΒ αντίστοιχα οι οποίες τέμνονται στο Ζ. Το τετράπλευρο ΒΕΖΔ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως θα είναι



$$E\hat{Z}\Delta = \hat{\omega} \quad (1)$$
$$\Delta Z = EB \quad (2)$$
$$EZ = B\Delta = E\Gamma \quad (3)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ τότε θα είναι και $\hat{\omega} = \frac{\hat{B}}{2} > \frac{\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\varphi}$ (4)

Επειδή λόγω της (3) το τρίγωνο ΕΖΓ είναι ισοσκελές θα έχουμε:

$$E\hat{Z}\Gamma = Z\hat{\Gamma}E \Rightarrow \hat{\omega} + \hat{Z}_1 = \hat{\varphi} + \hat{\Gamma}_1 \overset{(3)}{\Rightarrow} \hat{Z}_1 < \hat{\Gamma}_1 \overset{\text{τριγ ΖΔΓ}}{\Rightarrow} \Delta\Gamma < \Delta Z \overset{(3)}{\Rightarrow} \Delta\Gamma < EB \quad (5)$$

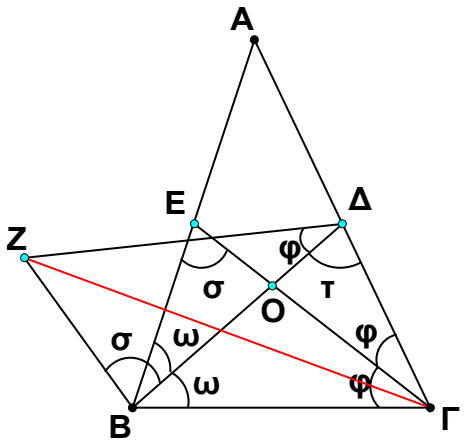
Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

$$\left.\begin{array}{l} \text{ΒΓ κοινή πλευρά} \\ \text{ΕΓ=ΒΔ από υπόθεση} \\ \text{ΕΒ>ΔΓ (5)} \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\varphi} > \hat{\omega} \Rightarrow 2\hat{\varphi} > 2\hat{\omega} \Rightarrow \hat{\Gamma} > \hat{B}$$

το οποίο είναι άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.
Ανάλογα αν υποθέσουμε ότι $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ καταλήγουμε σε άτοπο. Έτσι υποχρεωτικά θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Επιμέλεια: Παππάς Αθανάσιος/ 2ο ΓΕΛ Υμηττού

2η Απόδειξη:



Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ διχοτόμοι του για τις οποίες ισχύει ότι ΒΔ=ΓΕ. Θα δείξουμε ότι ΑΒ=ΑΓ.

Κατασκευάζουμε τις γωνίες $B\hat{\Delta}Z = \hat{\varphi} = \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ και $\Delta\hat{B}Z = B\hat{E}\Gamma = \hat{\sigma}$.

Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΖ έχουν:

i. ΒΔ=ΓΕ, από την υπόθεση,

ii. $B\hat{E}\Gamma = Z\hat{B}\Delta$, από την κατασκευή,

iii. $B\hat{\Gamma}E = B\hat{\Delta}Z$, από την κατασκευή

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (ΓΠΓ) και επομένως θα είναι ΔΖ=ΒΓ(1)

Τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΖΒΓ έχουν:

i. ΔΖ=ΒΓ, λόγω της (1)

ii. ΖΓ κοινή πλευρά

iii. $Z\hat{\Delta}\Gamma = Z\hat{B}\Gamma$, γιατί

$$Z\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\varphi} + \hat{\tau} \overset{\text{εξωτ στο τριγ ΔΟΓ}}{=} B\hat{O}\Gamma \overset{\text{εξωτ στο τριγ ΕΟΒ}}{=} \hat{\sigma} + \hat{\omega} = Z\hat{B}\Delta$$

Δηλαδή τα τρίγωνα έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μια και τις γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το ένα ζεύγος των ίσων πλευρών ίσες, άρα οι γωνίες που βρίσκονται απέναντι από το άλλο ζεύγος των ίσων πλευρών ή θα είναι ίσες ή παραπληρωματικές δηλαδή

$$Z\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{Z}\Gamma \text{ ή } Z\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{Z}\Gamma = 180^0 \quad (2)$$

Όμως $Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{B}\Delta + \hat{\omega} = \hat{\sigma} + \hat{\omega} = B\hat{O}\Gamma \overset{\text{γωνία δύο εσ διχ}}{=} 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} > 90^0$,

δηλαδή τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΖΒΓ είναι αμβλυγώνια και επομένως οι γωνίες $Z\hat{\Gamma}\Delta, B\hat{Z}\Gamma$ είναι οξείες δηλαδή

$$\left.\begin{array}{l} Z\hat{\Gamma}\Delta < 90^0 \\ B\hat{Z}\Gamma < 90 \end{array}\right\} \Rightarrow Z\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{Z}\Gamma < 180^0$$

Και από τη (2) προκύπτει ότι $Z\hat{\Gamma}\Delta = B\hat{Z}\Gamma$ άρα τα τρίγωνα ΖΔΓ και ΖΒΓ είναι ίσα και επομένως $\Delta\hat{Z}\Gamma = Z\hat{\Gamma}B$, οπότε $Z\Delta // B\Gamma$, άρα $\hat{\varphi}=\hat{\omega}$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΖΔ και ΒΓ τεμνομένων από την ΔΒ και επομένως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

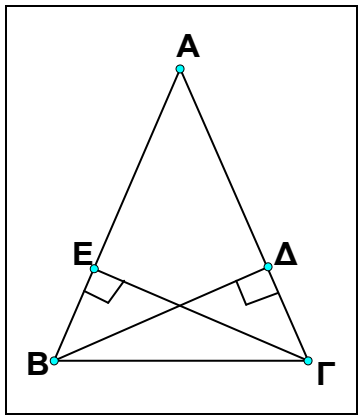
Παρατήρηση: Η πρόταση με τα κόκκινα γράμματα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω σε παλαιότερα σχολικά βιβλία αναφερόταν ως θεώρημα.

Επιμέλεια: Παππάς Αθανάσιος/ 2ο ΓΕΛ Υμηττού

3. ***Τα ύψη που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσα και αντίστροφα αν δύο ύψη ενός τριγώνου είναι ίσα τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.***

<u>Απόδειξη</u>:

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη του προς τις ίσες πλευρές του ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Θα δείξουμε ότι ΒΔ=ΓΕ.



Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1. ΒΓ κοινή πλευρά
2. $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, γωνίες προσκείμενες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως θα είναι και ΕΓ=ΒΔ.

<u>Αντίστροφα</u>

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ ύψηι του για τα οποία ισχύει ότι ΒΔ=ΓΕ. Θα δείξουμε ότι ΑΒ=ΑΓ.

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΕΓ και ΒΔΓ έχουν:

1. ΒΓ κοινή πλευρά
2. ΕΓ=ΒΔ

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα και επομένως θα είναι και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, δηλαδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

Ιούνιος 2010

Επιμέλεια: Παππάς Αθανάσιος/ 2ο ΓΕΛ Υμηττού