

ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ (Β' ΜΕΡΟΣ)
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
13/12/2010

Επώνυμο-Όνομα:

Θέμα 1^ο

A. 1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο A λέγεται "1-1";

2. Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε τι ονομάζουμε σύνθεση της f με τη g και ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

(10 μονάδες)

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

1. Αν μια οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε δύο σημεία, τότε η f δεν είναι "1-1".

2. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ τότε το $x_0 \in A$, όπου A το πεδίο ορισμού της f .

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

4. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

5. Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$. (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

(10 μονάδες)

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} + 3^{x+1}, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x} + \sqrt{x^2 + 8(\alpha - 1)x + 3} - x, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

όπου $\alpha > 1$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β .

(30 μονάδες)

Θέμα 3^ο

Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει:

$$f(x) = \frac{2e^x}{1 + f^2(x)}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α. Να αποδείξετε ότι: $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5 μονάδες)

β. Να βρείτε την $f(0)$.

(5 μονάδες)

γ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

(15 μονάδες)

δ. Να λύσετε την ανίσωση: $\ln f(x) > 0$.

(10 μονάδες)

ε. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) + \ln f(x) + 2010$, $x \in \mathbb{R}$ είναι αντιστρέψιμη.

(15 μονάδες)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ