

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει ότι:

$$f(x) = |x - 2|g(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $g(2) = 0$ και $f'(2) = 0$.

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) + 2f(x)}{x^2 - 4}$.

2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + \alpha x}{x - 3}, & \text{αν } x < 3 \\ x^2 + x + \beta, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases}$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής:

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -9$ και $\beta = 6$.

ii. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(2012x)}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot \eta\mu \frac{2011}{x} \right]$.

3. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(x) - 2f(x) + \sin^2 x \leq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 10}{|f(x) + 1| - |f^2(x) - 3f(x)|}$

4. Δίνεται μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι το όριο

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\alpha x^2 - (2\beta + 6)x + \alpha - \beta}{x^2 - 5x + 4}$$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του z κινούνται σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

β. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του $|z|$.

γ. Αν $z = \alpha + \beta i$ είναι ο μιγαδικός με το ελάχιστο μέτρο, να υπολογίσετε το αρχικό όριο.

5. Δίνεται συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f^2(2) + f^2(3) - 2f(2) + 6f(3) + 10 = 0$$

α. Να βρείτε τις $f(2)$ και $f(3)$.

β. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει με τον άξονα $x'x$ μόνο ένα κοινό σημείο.
