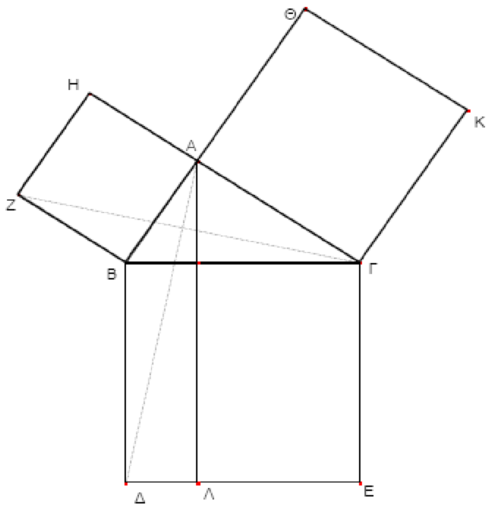
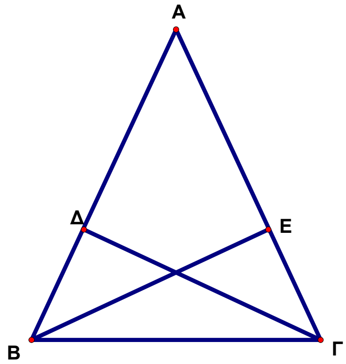
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΔΥΣΚΟΛΟΥΣ ΛΥΤΕΣ

1. Έστω οι θετικοί αριθμοί α και x για τους οποίους ισχύει $x\sqrt{x}=\alpha$. Να δείξετε ότι ισχύει $x^3=\alpha^2$.
2. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^8$ είναι ρητός.
3. Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός. (Υπόδειξη. Κάθε περιττός α γράφεται στην μορφή $\alpha=2\kappa+1$, όπου κ ακέραιος)
4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{20}$ και $A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{20}$. Να αποδείξετε ότι $A=B^{-1}$.
5. Να αποδείξετε ότι $16(x^2+x+1)^4=(2x^2+2x+2)^4$
6. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^3=2012$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=(x-1)(x^2+x+1)$.
7. Να εξετάσετε αν η ισότητα $(x^{1452}+x^{1821}-2)^{2012}+(1789x-1789)^{1958}=x$ είναι ταυτότητα.
8. Να βρείτε τη διαφορά $123456789123456789^2-123456789123456788^2$.
9. Να αποδείξετε ότι $999999999^2+2\cdot 999999999=10^9-1$.
   ΔΙΟΡΘΩΣΗ: $999999999^2+2\cdot 999999999=10^{\mathbf{18}}-1$.
10. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α ορθή) κατασκευάζουμε τα τετράγωνα των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα.



11. Δίνεται το παρακάτω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ. Να εφαρμόσετε μια σειρά μετασχηματισμών έτσι ώστε το τρίγωνο ΒΔΓ να ταυτιστεί με το τρίγωνο ΒΕΓ. (Χρησιμοποιήστε όποιους από τους τρεις μετασχηματισμούς μάθαμε, ανάκλαση, στροφή, μεταφορά για να τοποθετήσετε το ΒΔΓ πάνω στο ΒΕΓ έτσι ώστε να ταυτιστούν. Πώς θα το κάνατε αν αποτυπώνατε το τρίγωνο ΒΔΓ σε ριζόχαρτο;)



Καλή έμπνευση και καλές γιορτές!