ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΓΙΑ ΔΥΣΚΟΛΟΥΣ ΛΥΤΕΣ

1. **Έστω οι θετικοί αριθμοί α και x για τους οποίους ισχύει $x\sqrt{x}=\alpha$. Να δείξετε ότι ισχύει $x^3=\alpha^2$.**

   $\alpha = x\sqrt{x}$ άρα $\alpha^2=(x\sqrt{x})^2=x^2(\sqrt{x})^2=x^2x=x^3$

2. **Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^8$ είναι ρητός.**

   $\left(\sqrt{2}-1\right)^4\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)^8\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^8=\left[(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1\right]^4+\left[(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]^8$

   $\left[(\sqrt{2})^2-1^2\right]^4+\left[(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2\right]^8=(2-1)^4+(3-2)^8=1^4+1^8=1+1=2$ που είναι ρητός.

3. **Να αποδείξετε ότι το τετράγωνο κάθε περιττού αριθμού είναι περιττός αριθμός. (Υπόδειξη. Κάθε περιττός α γράφεται στην μορφή $\alpha=2\kappa+1$, όπου κ ακέραιος)**

   Έστω οποιοσδήποτε περιττός αριθμός α. Τότε $\alpha=2\kappa+1$, όπου κ ακέραιος. Επομένως $\alpha^2=(2\kappa+1)^2=(2\kappa)^2+2\cdot\kappa\cdot 1+1^2=4\kappa^2+2\kappa+1=2(2\kappa^2+\kappa)+1$. Ο αριθμός $(2\kappa^2+\kappa)$, όπου κ ακέραιος είναι κάποιος ακέραιος έστω λ. Τότε $\alpha^2=2\lambda+1$ άρα α^2 είναι περιττός.

4. **Δίνονται οι παραστάσεις: $A=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{20}$ και $A=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{20}$. Να αποδείξετε ότι $A=B^{-1}$.**

   $A=B^{-1}$ άρα $A=\frac{1}{B}$ οπότε $AB=1$. Είναι πιο εύκολο να αποδείξουμε την τελευταία σχέση.

   $AB=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{20}\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{20}=[(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})]^{20}=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{2})^2)^{20}=$ $(3-2)^{20}=1^{20}=1$.

5. **Να αποδείξετε ότι $16(x^2+x+1)^4=(2x^2+2x+2)^4$**

   $16(x^2+x+1)^4=2^4(x^2+x+1)^4=[2(x^2+x+1)]^4=(2x^2+2x+2)^4$

6. **Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $x^3=2012$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=(x-1)(x^2+x+1)$.**

   $A=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1=2012-1=2011$.

7. **Να εξετάσετε αν η ισότητα $(x^{1452}+x^{1821}-2)^{2012}+(1789x-1789)^{1958}=x$ είναι ταυτότητα.**

   Για $x=0$ (η πιο εύκολη τιμή) η σχέση γίνεται

   $(0^{1452}+0^{1821}-2)^{2012}+(1789\cdot 0-1789)^{1958}=0$
   $(0+0-2)^{2012}+(0-1789)^{1958}=0$
   $(-2)^{2012}+(-1789)^{1958}=0$
   $2^{2012}+1789^{1958}=0$ η οποία δεν ισχύει. Άρα η ισότητα δεν ισχύει για κάθε τιμή του x οπότε δεν είναι ταυτότητα.

8. **Να βρείτε τη διαφορά $\mathbf{123456789123456789^2 - 123456789123456788^2}$.**

$123456789123456789^2 - 123456789123456788^2 =$

$(123456789123456789 + 123456789123456788)(123456789123456789 - 123456789123456788 =$

$246913578246913577 \cdot 1 = 246913578246913577.$

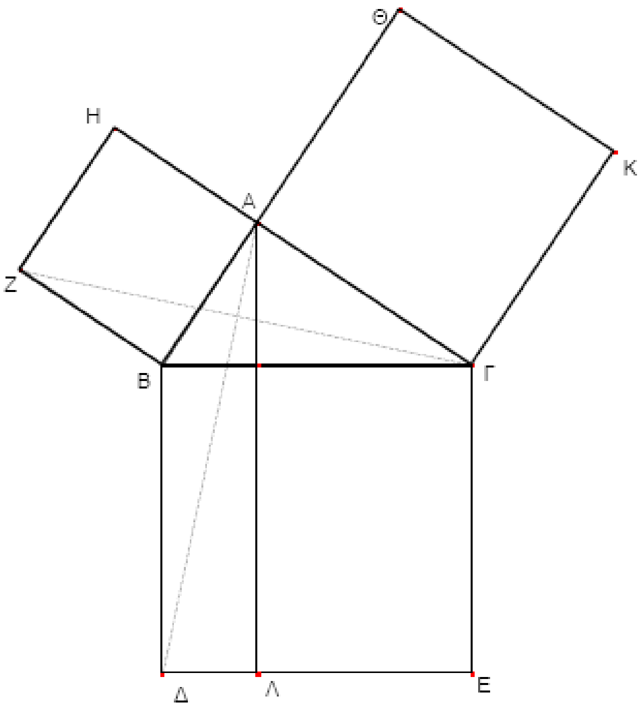
9. **Να αποδείξετε ότι $\mathbf{999999999^2 + 2 \cdot 999999999 = 10^{18} - 1}$.**

Η σχέση $999999999^2 + 2 \cdot 999999999 = 10^9 - 1$ μπορεί να γραφεί

$999999999^2 + 2 \cdot 999999999 + 1 = 10^9$. Η τελευταία σχέση είναι πιο εύκολο να αποδειχθεί.
Πράγματι, $999999999^2 + 2 \cdot 999999999 + 1 = 999999999^2 + 2 \cdot 999999999 \cdot 1 + 1 =$
$(999999999 + 1)^2 = (1000000000)^2 = (10^9)^2 = 10^{18}$

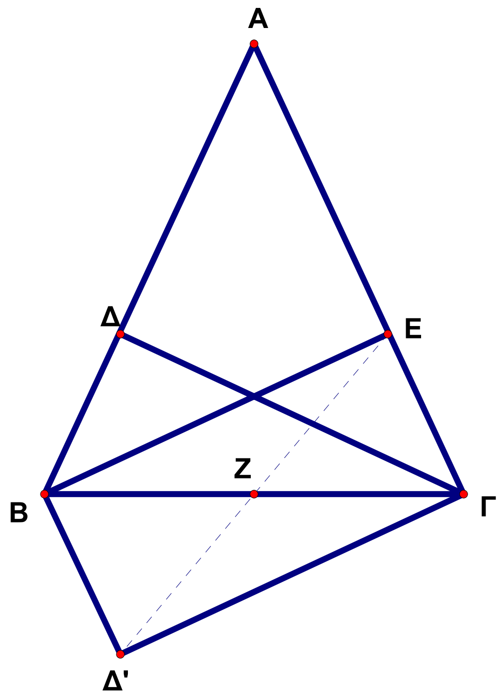
Σημείωση: Η αρχική εκφώνηση «*Να αποδείξετε ότι* $999999999^2 + 2 \cdot 999999999 = 10^9 - 1$» ήταν λανθασμένη.

10. **Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α ορθή) κατασκευάζουμε τα τετράγωνα των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ είναι ίσα.**



Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΖΒΓ και ΑΒΔ. Αυτά έχουν
(α) ΒΓ = ΒΔ ως πλευρές του τετραγώνου ΒΔΕΓ
(β) ΒΖ = ΑΒ ως πλευρές του τετραγώνου ΒΔΕΓ
(γ) $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{AB\Delta}$
διότι $\widehat{ZB\Gamma} = \widehat{ZBA} + \widehat{AB\Gamma} = 1\ o\rho\theta ή + \widehat{AB\Gamma}$ και $\widehat{AB\Delta} = \widehat{\Gamma B\Delta} + \widehat{AB\Gamma} = 1\ o\rho\theta ή + \widehat{AB\Gamma}$
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα διότι έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και τις περιεχόμενες σε αυτές τις πλευρές γωνίες ίσες.

11. Δίνεται το παρακάτω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΒΕ και ΓΔ. Να εφαρμόσετε μια σειρά μετασχηματισμών έτσι ώστε το τρίγωνο ΒΔΓ να ταυτιστεί με το τρίγωνο ΒΕΓ. (Χρησιμοποιήστε όποιους από τους τρεις μετασχηματισμούς μάθαμε, ανάκλαση, στροφή, μεταφορά για να τοποθετήσετε το ΒΔΓ πάνω στο ΒΕΓ έτσι ώστε να ταυτιστούν. Πώς θα το κάνατε αν αποτυπώνατε το τρίγωνο ΒΔΓ σε ριζόχαρτο;)



Η ταύτιση του τριγώνου ΒΔΓ με το τρίγωνο ΒΕΓ επιτυγχάνεται με δυο διαδοχικούς μετασχηματισμούς: ανάκλαση του τριγώνου ΒΔΓ ως προς την ευθεία που ορίζεται από τα Β και Γ και στη συνέχεια στροφή του τριγώνου ΒΔ΄Γ γύρω από το μέσο Ζ της πλευράς ΒΓ κατά 180^0. Υπάρχουν και άλλες λύσεις στο πρόβλημα.

ήταν δύσκολες τελικά οι ασκήσεις;

αν ναι, πού έγκειται η δυσκολία τους;