

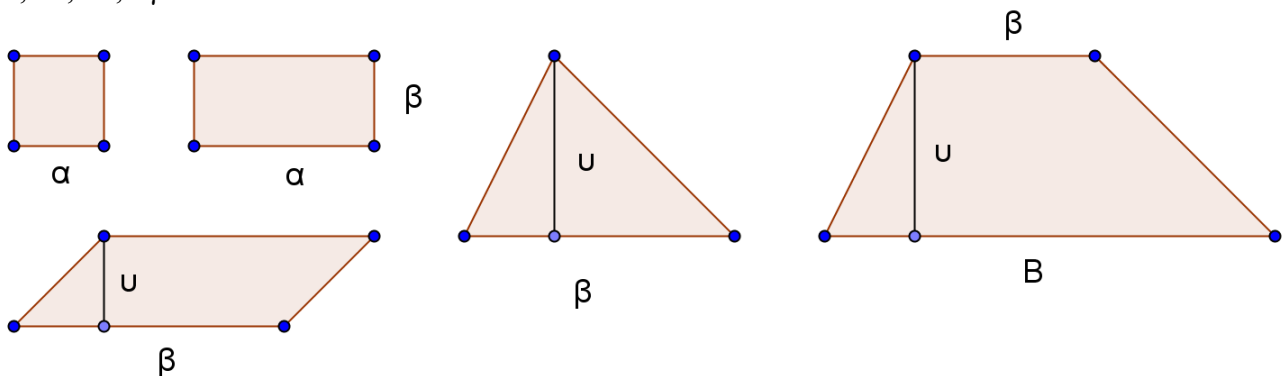
## ΘΕΩΡΙΑ 1

Α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της πρώτης στήλης με το αντίστοιχο στοιχείο της δεύτερης στήλης ώστε να προκύψουν οι γνωστοί τύποι εμβαδού των διαφόρων σχημάτων. Να κάνετε τα αντίστοιχα σχήματα και να εξηγήσετε τα σύμβολα που εμφανίζονται σε κάθε τύπο.

1	$E = a^2$	Εμβαδόν παραλληλογράμμου	α
2	$E = \frac{1}{2} \beta \cdot \upsilon$	Εμβαδόν τετραγώνου	β
3	$E = a \cdot \beta$	Εμβαδόν τραπεζίου	γ
4	$E = \beta \cdot \upsilon$	Εμβαδόν ορθογωνίου	δ
5	$E = \frac{(B + \beta) \cdot \upsilon}{2}$	Εμβαδόν τριγώνου	ε

ΛΥΣΗ:

1β, 2ε, 3δ, 4α, 5γ



Β. (α) Να γράψετε τον τύπο του μήκους κύκλου και τον τύπο του εμβαδού του κυκλικού δίσκου. Να εξηγήσετε τα σύμβολα που εμφανίζονται σε κάθε τύπο.

(β) Τι είναι το π; (ορισμός και όχι η προσεγγιστική τιμή)

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ:**

Το μήκος του κύκλου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$L = \pi \delta$$

ή

$$L = 2\pi\rho$$

όπου δ η διάμετρος του κύκλου και ρ η ακτίνα του.

Το  $L$  υποδηλώνει το μήκος του κύκλου.

**Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας  $\rho$ , ισούται με  $E = \pi\rho^2$**

Το  $E$  υποδηλώνει το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και το  $\rho$  την ακτίνα του κύκλου.

Το  $\pi$  είναι ο αριθμός που μας λέει πόσες φορές χωράει η διάμετρος οποιουδήποτε κύκλου στο μήκος του.

## ΘΕΩΡΙΑ 2

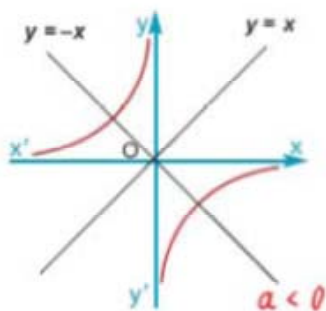
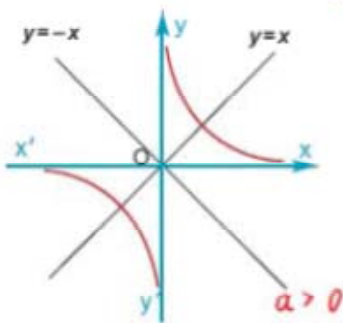
**A. Ποια συνάρτηση εκφράζει αντιστρόφως ανάλογα ποσά; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

**B. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{a}{x}$  με  $a \neq 0$  και  $x \neq 0$ .**

(α) Πώς ονομάζεται η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης;

(β) Να κάνετε πρόχειρα σχήματα για τις περιπτώσεις όπου  $a > 0$  και  $a < 0$ .

(γ) Έχει κεντρική ή αξονική συμμετρία η γραφική παράσταση αυτής της συνάρτησης;



Οι γραφικές παραστάσεις που κάναμε λέγονται υπερβολές και οι δύο γραμμές που τις συνθέτουν λέγονται κλάδοι της υπερβολής.

Γενικά:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{a}{x}$ , όπου  $a \neq 0$  λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

- Στο 1ο και στο 3ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a > 0$ .
- Στο 2ο και στο 4ο τεταρτημόριο των αξόνων, όταν  $a < 0$ .

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O$  των αξόνων.
- Αξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις  $y = x$  και  $y = -x$ .

## ΑΣΚΗΣΗ 1

- Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 5 € για τη σημαία και 2 € για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.
- (α) Να βρείτε τη συνάρτηση που μας δίνει το ποσό  $y$  που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή  $x$  χιλιομέτρων.
- (β) Να σχεδιάσετε τη συνάρτηση σε ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων.
- (γ) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης αυτής της συνάρτησης με το άξονα  $y'$ .
- (δ) Αν πληρώσουμε 89 €, πόσα χιλιόμετρα διανύσαμε; Ποιο σημείο της γραφικής παράστασης εκφράζει αυτή την πληροφορία;

ΛΥΣΗ:

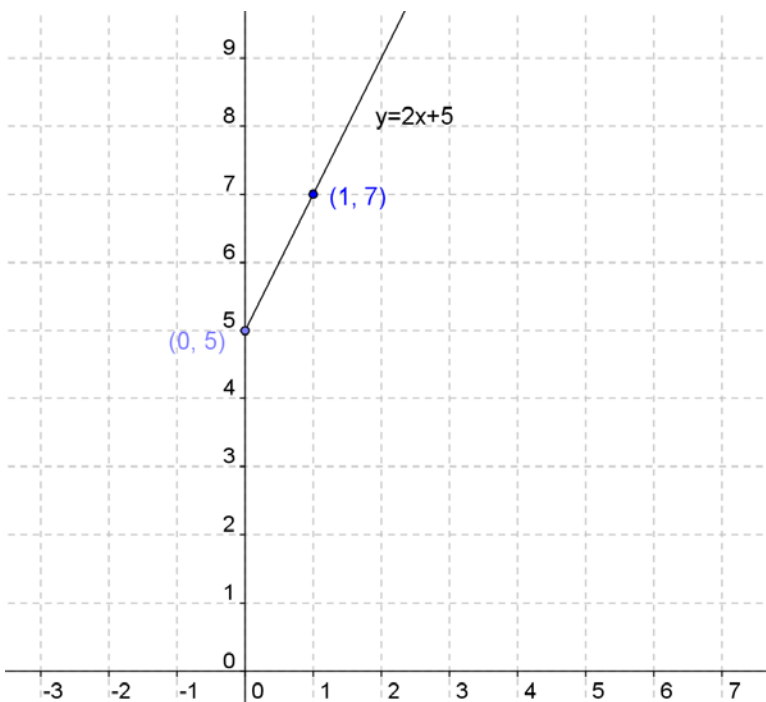
(α) Εφόσον κάθε χιλιόμετρο κοστίζει 2 €, τα  $x$  χιλιόμετρα κοστίζουν  $2x$  ευρώ. Σε αυτά προσθέτουμε τα 5 € της σημαίας, οπότε  $y = 2x + 5$ .

(β) Κατασκευάζουμε ένα πίνακα τιμών. Χρειαζόμαστε δυο σημεία εφόσον η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = ax + \beta$  γνωρίζουμε ότι είναι ευθεία γραμμή.

Αν  $x = 0$ , τότε  $y = 2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$

Αν  $x = 1$ , τότε  $y = 2 \cdot 1 + 5 = 2 + 5 = 7$

$x$	0	1
$y$	5	7



Η γραφική παράσταση είναι ημιευθεία εφόσον αποκλείουμε τις αρνητικές τιμές του  $x$ .

(γ) Για να βρούμε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης αυτής της συνάρτησης με το άξονα  $y'$ , θέτουμε  $x = 0$ . Επομένως, αν  $x = 0$ , τότε  $y = 2 \cdot 0 + 5 = 0 + 5 = 5$ , οπότε το σημείο τομής είναι το  $(0, 5)$ .

(δ)  $y = 89$ , άρα

$$89 = 2x + 5$$

$$89 - 5 = 2x$$

$$84 = 2x$$

$$\frac{84}{2} = x \text{ ή } x = 42.$$

Το σημείο της γραφικής παράστασης εκφράζει την πληροφορία ότι αν πληρώσουμε 89 €, τότε έχουμε διανύσει 42 χιλιόμετρα είναι το σημείο (42, 89)

## ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Delta\Gamma$ ) του

οποίου οι γωνίες  $\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  είναι ορθές. Επίσης, γνωρίζουμε ότι (α) Το μήκος της  $AB$  (σε cm) είναι η λύση της εξίσωσης

$$2x + 1 = 17$$

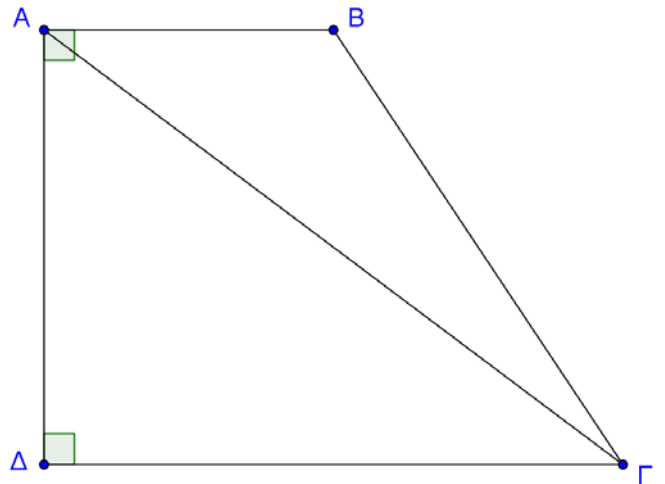
(β) Το μήκος της διαγωνίου  $A\Gamma$  (σε cm) είναι η λύση της εξίσωσης

$$3(y - 19) - 2 = 4 - 3(2y - 39)$$

(γ) Το μήκος της  $\Delta\Gamma$  (σε cm) είναι η λύση της εξίσωσης

$$\frac{\omega + 4}{5} - \frac{\omega - 4}{3} = \frac{2(\omega - 1)}{15} - 2$$

Να βρείτε το ύψος και το εμβαδόν του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$ .



$$2x + 1 = 17$$

$$2x = 17 - 1$$

$$2x = 16$$

$$x = \frac{16}{2}$$

$$x = 8$$

$$3(y - 19) - 2 = 4 - 3(2y - 39)$$

$$3y - 57 - 2 = 4 - 6y + 117$$

$$3y + 6y = 4 + 117 + 57 + 2$$

$$9y = 180$$

$$y = \frac{180}{9}$$

$$y = 20$$

$$\frac{\omega + 4}{5} - \frac{\omega - 4}{3} = \frac{2(\omega - 1)}{15} - 2$$

$$15 \cdot \frac{\omega + 4}{5} - 15 \cdot \frac{\omega - 4}{3} = 15 \cdot \frac{2(\omega - 1)}{15} - 15 \cdot 2$$

$$3(\omega + 4) - 5(\omega - 4) = 2(\omega - 1) - 30$$

$$3\omega + 12 - 5\omega + 20 = 2\omega - 2 - 30$$

$$3\omega - 5\omega - 2\omega = -2 - 30 - 12 - 20$$

$$-4\omega = -64$$

$$\omega = \frac{-64}{-4}$$

$$\omega = 16$$

Άρα  $AB = 4$  cm,  $A\Gamma = 20$  cm και  $\Delta\Gamma = 16$  cm.

$\hat{A}$  και  $\hat{\Delta}$  είναι ορθές, οπότε το  $A\Delta$  είναι ύψος του τραπεζίου. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$ , έχουμε  $A\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 = A\Gamma^2$

$$A\Delta^2 + 16^2 = 20^2$$

$$A\Delta^2 + 256 = 400$$

$$A\Delta^2 = 400 - 256$$

$$A\Delta^2 = 144$$

$$A\Delta = \sqrt{144}$$

$$A\Delta = 12$$

Το εμβαδόν του τραπεζίου θα είναι  $E = \frac{(16 \text{ cm} + 8 \text{ cm}) \cdot 12 \text{ cm}}{2} = 24 \text{ cm} \cdot 6 \text{ cm} = 144 \text{ cm}^2$

### ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο σε κύκλο (διπλανό σχήμα). Αν η  $B\Delta$  είναι διάμετρος του κύκλου,  $A\Delta = 5 \text{ cm}$ ,

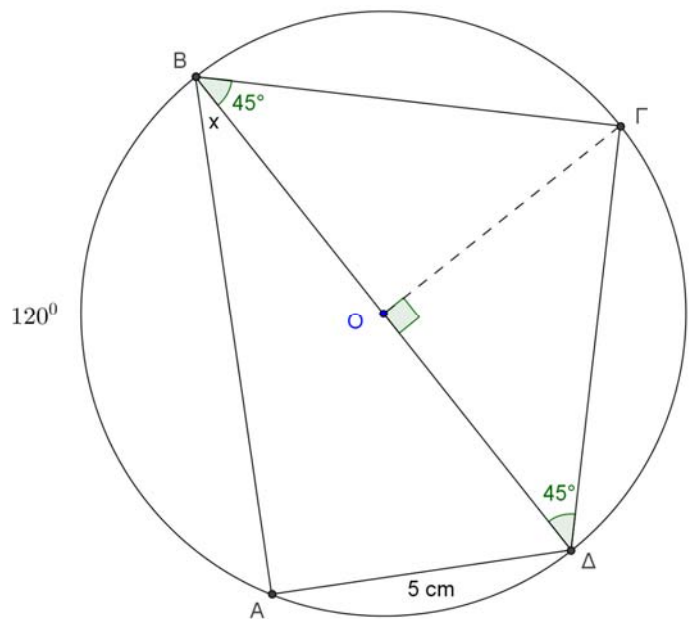
$$\hat{A}B = 120^\circ \text{ και } \hat{B}\Delta\Gamma = 45^\circ.$$

(α) Να βρείτε τη γωνία  $x$

(β) Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

(γ) Να βρείτε το μήκος του κύκλου και το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου.

(δ) Να αποδείξετε ότι  $\frac{E}{\kappa} = \pi$ , όπου  $E$  το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και  $\kappa$  το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$ .



(α) Η γωνία  $A\Delta B$  είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο και βαίνει στο  $AB$  το οποίο είναι  $120^\circ$  άρα το μέτρο της γωνίας είναι  $60^\circ$ . Η  $B\Delta$  είναι διάμετρος, οπότε η γωνία  $A$  είναι ορθή ως εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο. Στο ορθογώνιο λοιπόν τρίγωνο  $AB\Delta$  η γωνία  $x$  είναι συμπληρωματική με την  $A\Delta B$ , άρα  $x = 30^\circ$ .

(β) Στο ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Delta$ ,  $\eta\mu x = \frac{5}{B\Delta}$  ή  $\eta\mu 30^\circ = \frac{5}{B\Delta}$  οπότε  $\frac{1}{2} = \frac{5}{B\Delta}$  από το οποίο συμπεραίνουμε ότι  $B\Delta = 10 \text{ cm}$ . Άρα η ακτίνα  $\rho$  του κύκλου θα είναι  $\rho = 5 \text{ cm}$ .

(γ)  $L = 2\pi\rho = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} = 10\pi \text{ cm}$ .

$$E = \pi\rho^2 = \pi 5^2 = 25\pi \text{ cm}^2$$

(δ) Στο τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$ , η γωνία  $B\Gamma\Delta$  είναι ορθή ως εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο. Άρα το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ορθογώνιο. Και εφόσον η οξεία γωνία  $B\Delta\Gamma$  είναι  $45^\circ$  θα είναι και η γωνία  $B\Gamma\Delta$   $45^\circ$ . Αυτό σημαίνει ότι το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι και ισοσκελές. Αν φέρουμε την  $GO$ , αυτή θα είναι διάμεσος του τριγώνου εφόσον  $OB = OD$  ως ακτίνες κύκλου και εφόσον το τρίγωνο είναι ισοσκελές και η  $GO$  είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του θα είναι και ύψος. Επομένως το ύψος  $GO$  είναι ίσο με την ακτίνα του κύκλου δηλαδή  $5 \text{ cm}$ . Έχουμε λοιπόν για το εμβαδόν  $E$  του τριγώνου  $B\Gamma\Delta$

$$E = \frac{B\Delta \cdot GO}{2} = \frac{10 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}}{2} = 25 \text{ cm}^2. \text{ Άρα, } \frac{E}{\kappa} = \frac{25\pi \text{ cm}^2}{25 \text{ cm}^2} = \pi.$$