2^{Ο} ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΚΕΡΚΥΡΑΣ
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2010
ΤΑΞΗ: Γ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΩΡΙΑ 1

Α. **Πότε μια ισότητα ονομάζεται ταυτότητα;**

Ταυτότητα λέγεται κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές και αληθεύει για όλες τις τιμές των μεταβλητών της.

Β. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(a-\beta)(a^2+a\beta+\beta^2)=a^3-\beta^3$

Απόδειξη:

$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3+\cancel{\alpha^2\beta}+\cancel{\alpha\beta^2}-\cancel{\beta\alpha^2}-\cancel{\alpha\beta^2}-\beta^3=\alpha^3-\beta^3$$

Γ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες
$(a-\beta)^3=\ldots$
$a^2-\beta^2=\ldots$

Απάντηση:

$(a-\beta)^3=a^3-3a^2+3a\beta^2-\beta^3$
$a^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(a-\beta)$

ΘΕΩΡΙΑ 2

Α. **Πότε δυο τρίγωνα είναι ίσα;**

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, τότε είναι ίσα.

Β. **Να διατυπώσετε ένα κριτήριο ισότητας ορθογωνίων τριγώνων.**

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν
- δύο αντίστοιχες πλευρές ίσες μία προς μία ή
- μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση.

(ένα από τα δυο)

Γ. Να διατυπώσετε το ένα κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων.

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την περιεχόμενη γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.

Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

(οποιοδήποτε από τα τρία)

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $y = x^2$ και $y = 3x - 2$.
Α. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.
Β. Να βρείτε τα κοινά σημεία των δυο γραφικών παραστάσεων γραφικά.
Γ. Να βρείτε τα κοινά σημεία των δυο γραφικών παραστάσεων αλγεβρικά λύνοντας την κατάλληλη εξίσωση.

Α. Κατασκευάζουμε έναν πίνακα τιμών για κάθε συνάρτηση

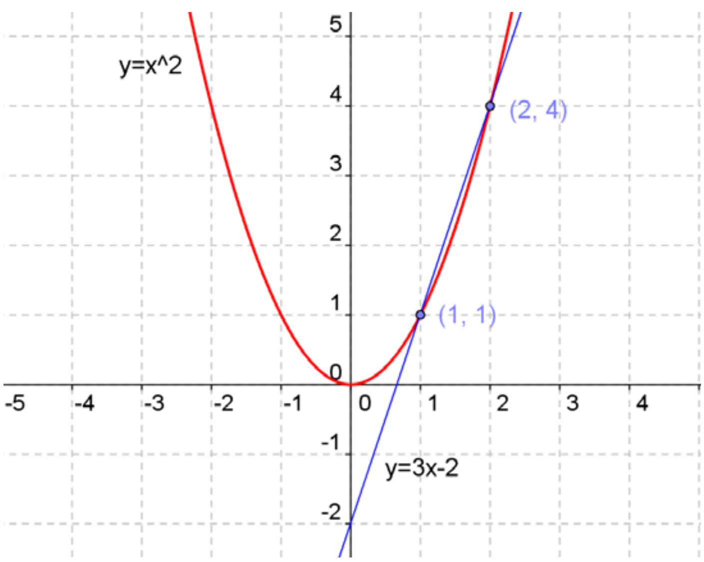
Για την $y = x^2$

x	0	1	2	-1	-2
y	0	1	4	1	4

Για την $y = 3x - 2$

x	1	2
y	1	4

Οι γραφικές παραστάσεις των δυο συναρτήσεων φαίνονται παρακάτω.



Β. Από τις γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$ με τη ευθεία $y = 3x - 2$ είναι τα σημεία (1, 1) και (2, 4).

Γ. Λύνουμε την εξίσωση $x^2 = 3x - 2$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Αναζητούμε δυο αριθμούς με άθροισμα -3 και γινόμενο +2.

Γινόμενο +2 έχουν τα ζεύγη

+1 +2
-1 -2

Άθροισμα -3 έχουν οι αριθμοί -1 και -2, άρα $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

οπότε

$(x-1)(x-2) = 0$

$x - 1 = 0$ ή $x - 2 = 0$

$x = 1$ $x = 2$

Για $x = 1$ έχουμε $y = 1^2 = 1$

Για $x = 2$ έχουμε $y = 2^2 = 4$

Οπότε

τα σημεία τομής της παραβολής $y = x^2$ με τη ευθεία $y = 3x - 2$ είναι τα σημεία (1, 1) και (2, 4).

Σημείωση: Η εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$ λύνεται και με τη βοήθεια του τύπου (διακρίνουσα κλπ)]

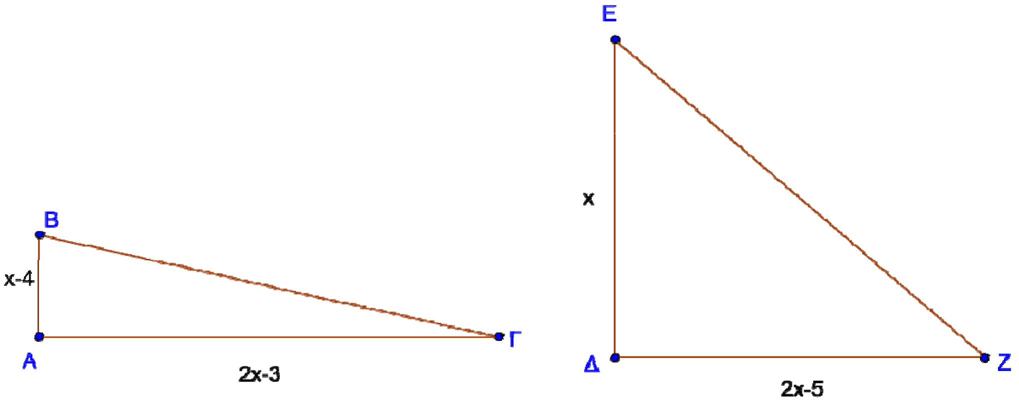
$x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = \beta^2 - 4a\gamma = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2}$ άρα $x = \frac{2}{2} = 1$ ή $x = \frac{4}{2} = 2$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = x-4 και ΑΓ = 2x-3 και ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ με κάθετες πλευρές ΔΕ = x και ΔΖ = 2x-5. Να αποδείξετε ότι οι υποτείνουσες ΒΓ και ΕΖ των δυο ορθογωνίων τριγώνων είναι ίσες (x > 4).



$$\mathrm{B\Gamma}^2 = (x-4)^2 + (2x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 4 + 4^2 + (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 =$$
$$x^2 - 8x + 16 + 4x^2 - 12x + 9 = 5x^2 - 20x + 25$$

$$\mathrm{EZ}^2 = x^2 + (2x-5)^2 = x^2 + (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 5 + 5^2 =$$
$$x^2 + 4x^2 - 20x + 25 = 5x^2 - 20x + 25$$

Άρα $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{EZ}^2$.

Ισχύει $\mathrm{B\Gamma}^2 = \mathrm{EZ}^2$ άρα ΒΓ = ΕΖ εφόσον για $x > 4$
$\mathrm{B\Gamma}^2 = (x-4)^2 + (2x-3)^2 > 0$ και $\mathrm{EZ}^2 = x^2 + (2x-5)^2 > 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ του παρακάτω σχήματος έχουν ΑΒ = Α΄Β΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν τα ύψη τους ΑΔ και Α΄Δ΄ είναι ίσα,

1. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\hat{B} = \hat{B}'$
(β) τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

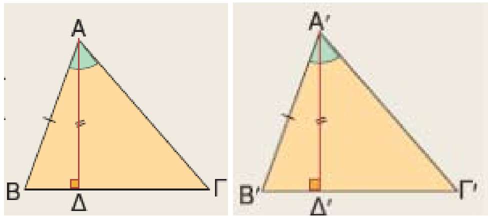
1. (α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄. Αυτά έχουν
ΑΒ = Α΄Β΄ από τη υπόθεση.
ΑΔ = Α΄Δ΄ από τη υπόθεση.
Είναι ορθογώνια.
Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα ως ορθογώνια με δυο αντίστοιχες πλευρές ίσες μια προς μια. Επομένως θα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$

(β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Αυτά έχουν
ΑΒ = Α΄Β΄ από τη υπόθεση.
$\hat{B} = \hat{B}'$ από την προηγούμενη απόδειξη.

$\hat{A} = \hat{A}'$ από την υπόθεση.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα διότι έχουν μια πλευρά ίση και τις προσκείμενες στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μια προς μια.

2. Αν ΑΓ = $3x+y$**, ΒΓ =** $x+2y$**, Α΄Γ΄= 7 και Β΄Γ΄= 4, να προσδιορίσετε τα** x **και** y **(x >0 και y >0).**



Εφόσον τα τρίγωνα αποδείχτηκαν ίσα θα έχουν όλες τις αντίστοιχες πλευρές τους ίσες άρα ΑΓ = Α΄Γ΄ και ΒΓ = Β΄Γ΄, δηλαδή

$$3x+y=7$$
$$x+2y=4$$

Λύνουμε το σύστημα των δυο γραμμικών εξισώσεων.

$$\begin{cases}3x+y=7\\x+2y=4\end{cases}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\x+2y=4\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\x+2(7-3x)=4\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\x+14-6x=4\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\x-6x=4-14\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\-5x=-10\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}y=7-3x\\x=\dfrac{-10}{-5}\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3x\\x=2\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=7-3\cdot 2\\x=2\end{matrix}\quad \begin{matrix}y=1\\x=2\end{matrix}$$

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ: ΑΡΙΣΤΕΙΔΗΣ ΜΟΥΖΑΚΙΤΗΣ και ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΣΠΙΓΓΟΥ