

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΔΕΥΤΕΡΟΒΑΘΜΙΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$3x^2 + 5x = 0$$

$$x(3x + 5) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } 3x + 5 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } 3x = -5$$

$$x = 0 \text{ ή } x = -\frac{5}{3}$$

$$8x^2 + 5 = 0$$

$$8x^2 = -5$$

$$x^2 = -\frac{5}{8} \text{ αδύνατη}$$

$$3x^2 - 6 = 0$$

$$3x^2 = 6$$

$$x^2 = \frac{6}{3}$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \pm\sqrt{2}$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0, \alpha = 4, \beta = -5 \text{ και } \gamma = 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8}$$

$$x = \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \text{ ή } x = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$-4x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$(2x + 1)^2 = 0$$

$$2x + 1 = 0$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$x^2 - x + 2012 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2012 = 1 - 8048 = -8047 < 0$$

Αδύνατη

$$x^2 - x - 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 1 + 12 = 13$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{13}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$x^2 - \sqrt{2}x - 1 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 2 + 4 = 6$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-\sqrt{2}) \pm \sqrt{6}}{2 \cdot 1} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{6}}{2}$$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις

$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$x^2 = -2x^2$$

$$x^2 + 2x^2 = 0$$

$$3x^2 = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

$$2x - (2x - 1)^2 = (3x - 1)(2x + 1) - 5x$$

$$2x - [(2x)^2 - 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2] = 6x^2 + 3x - 2x - 1 - 5x$$

$$2x - (4x^2 - 4x + 1) = 6x^2 + 3x - 2x - 1 - 5x$$

$$2x - 4x^2 + 4x - 1 = 6x^2 + 3x - 2x - 1 - 5x$$

$$2x - 4x^2 + 4x - 1 - 6x^2 - 3x + 2x + 1 + 5x = 0$$

$$-10x^2 + 10x = 0$$

$$-10x(x - 1) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x - 1 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 1$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3) - (x - 1)(x - 2)(x - 4) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)[(x - 3) - (x - 4)] = 0$$

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3 - x + 4) = 0$$

$$(x - 1)(x - 2) \cdot 1 = 0$$

$$x - 1 = 0 \text{ ή } x - 2 = 0$$

$$x = 1 \text{ ή } x = 2$$

$$(2x - x^2 - 1)^2 + 1 = 0$$

Αδύνατη διότι $(2x - x^2 - 1)^2 \geq 0$ και $1 > 0$ άρα

$$(2x - x^2 - 1)^2 + 1 > 0 \text{ δηλαδή } (2x - x^2 - 1)^2 + 1 \neq 0$$

$$(2x - x^2 - 1)^2 - 4 = 0$$

$$(2x - x^2 - 1)^2 = 4$$

$$2x - x^2 - 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$2x - x^2 - 1 = \pm 2$$

$$2x - x^2 - 1 = 2 \text{ ή } 2x - x^2 - 1 = -2$$

$$-x^2 + 2x - 3 = 0 \text{ ή } -x^2 + 2x + 1 = -2$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0 \text{ ή } x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 - 12 = -8$$

Αδύνατη

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = (1 \pm \sqrt{2})$$

$$(2x + 1)^2 = (3x - 1)^2$$

$$(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 1 + 1^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 9x^2 - 6x + 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 - 9x^2 + 6x - 1 = 0$$

$$-5x^2 + 10x = 0$$

$$5x(-x + 2) = 0$$

$$5x = 0 \text{ ή } -x + 2 = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 2$$

$$(x + 1)^2 + x^2 = -1$$

$$(x + 1)^2 \geq 0 \text{ και } x^2 \geq 0 \text{ άρα}$$

$(x + 1)^2 + x^2 \geq 0$ δηλαδή $(x + 1)^2 + x^2 \neq -1$ οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

3. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα

$$-3x^2 - 2x + 5$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 5 = 4 + 60 = 64$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2 \cdot (-3)} = \frac{2 \pm 8}{-6}$$

$$x = \frac{2-8}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1 \text{ ή } x = \frac{2+8}{-6} = \frac{10}{-6} = -\frac{5}{3} \text{ ή}$$

Άρα

$$-3x^2 - 2x + 5 = -3 \left(x + \frac{5}{3} \right) (x - 1) = (-3x - 5)(x - 1)$$

$$4x^2 - 2x - 2 = 2(x^2 - x - 1)$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Άρα

$$4x^2 - 2x - 2 = 2(x^2 - x - 1) = 2 \left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

$$x^2 - 2x + 5$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

Άρα το τριώνυμο δεν παραγοντοποιείται

4. Να γράψετε μια δευτεροβάθμια εξίσωση η οποία δεν έχει λύσεις.

Η εξίσωση $x^2 = -1$ (ή οποιοδήποτε τριώνυμο δευτέρου βαθμού με $\Delta < 0$)

5. Αφού βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζονται οι παρακάτω παραστάσεις να τις απλοποιήσετε

$$(A) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \cdot \frac{2 - 2x^3}{3x^2 - 2x - 1}$$

$$(B) \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{-3x^2 - x + 4}{3x^2 - 3}$$

(A)

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2) \text{ [με άθροισμα γινόμενο]}$$

$$2 - 2x^3 = 2(1 - x^3) = 2(1 - x)(1 + x + x^2) \text{ [διαφορά κύβων]}$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$$

$$3x^2 - 2x - 1$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$\text{Άρα } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{1}{3}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) = (3x + 1)(x - 1)$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} \cdot \frac{2 - 2x^3}{3x^2 - 2x - 1} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} \cdot \frac{2(1 - x)(1 + x + x^2)}{(3x + 1)(x - 1)} =$$

$$\frac{2(1 - x)(1 + x + x^2)}{(x + 2)(3x + 1)}$$

(B)

$$2x^2 - 3x + 1 = 2x^2 - 2x - x + 1 = 2x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(2x - 1)$$

(Φυσικά γίνεται και με τον τύπο. Εδώ απλά σας θυμίζω τη μέθοδο της διάσπασης)

$$-3x^2 - x + 4$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot (-3) \cdot 4 = 1 + 48 = 49$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot (-3)} = \frac{1 \pm 7}{-6}$$

$$\text{Άρα } x = 1 \text{ ή } x = -\frac{4}{3} \text{ οπότε}$$

$$-3x^2 - x + 4 = -3\left(x + \frac{4}{3}\right)(x - 1) = (-3x - 4)(x - 1)$$

$$2x - 2 = 2(x - 1)$$

$$3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{2x - 2} \cdot \frac{-3x^2 - x + 4}{3x^2 - 3} = \frac{(x - 1)(2x - 1)}{2(x - 1)} \cdot \frac{(-3x - 4)(x - 1)}{3(x + 1)(x - 1)} =$$

$$\frac{(2x - 1)(-3x - 4)}{6(x + 1)}$$

6. Να γράψετε μια εξίσωση η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς 3 και $-\frac{1}{2}$.

$$\text{Η εξίσωση } (x - 3)\left(x + \frac{1}{2}\right) = 0$$

7. Να γράψετε μια πολυωνυμική εξίσωση η οποία έχει λύσεις τους αριθμούς 1, 2 και 3.

$$\text{Η εξίσωση } (x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \text{ ή } (x^2 - 2x - 1x + 2)(x - 3) = 0$$

$$(x^2 - 3x + 2)(x - 3) = 0 \text{ ή } x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6 = 0 \text{ ή}$$

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

8. Να αποδείξετε ότι αν η εξίσωση $ax^2 + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι αδύνατη, τότε οι αριθμοί a και γ είναι ομόσημοι.

$\Delta = 0^2 - 4a\gamma = 0 - 4a\gamma = -4a\gamma$. Εφόσον η εξίσωση είναι αδύνατη $\Delta < 0$, δηλαδή $-4a\gamma < 0$, οπότε $a\gamma > 0$ που σημαίνει ότι οι αριθμοί a και γ είναι ομόσημοι.

9. Να βρείτε δυο αριθμούς με άθροισμα 7 και γινόμενο 12.

Έστω x ο ένας αριθμός. Τότε ο άλλος θα είναι $7-x$.

$$x \cdot (7-x) = 12$$

$$7x - x^2 = 12$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 3 \end{array} \right.$$

Αν $x = 4$, τότε $7-4 = 3$

Αν $x = 3$, τότε $7-3 = 4$

10. Να βρείτε δυο αριθμούς με διαφορά 13 και γινόμενο 264.

Έστω x ο ένας αριθμός. Τότε ο άλλος θα είναι $x + 13$. Επειδή το γινόμενο των δυο αριθμών είναι 264, θα έχουμε $x(x + 13) = 264$.

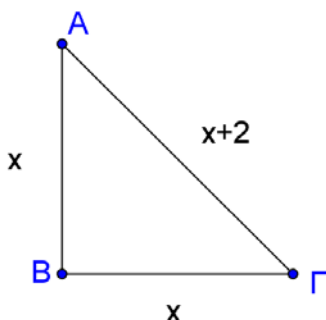
$$x^2 + 13x = 264 \text{ ή } x^2 + 13x - 264 = 0.$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 13^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-264) = 169 + 1056 = 1225$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-13 \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 1} = \frac{-13 \pm 35}{2}$$

Άρα $x = -24$ ή $x = 11$.

11. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η υποτεινούσα είναι μεγαλύτερη από την κάθετη πλευρά κατά 2 cm. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου.



Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα $x^2 + x^2 = (x + 2)^2$ οπότε
 $2x^2 = x^2 + 4x + 4$ άρα $2x^2 - x^2 - 4x - 4 = 0$ ή $x^2 - 4x - 4 = 0$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 16 + 16 = 32$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{32}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 \pm 2\sqrt{2})}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

Επειδή η ρίζα $x = 2 - 2\sqrt{2}$ δεκτή είναι η ρίζα $x = 2 + 2\sqrt{2}$

Επομένως, το εμβαδόν του τριγώνου θα είναι

$$E = \frac{AB \cdot B\Gamma}{2} = \frac{x \cdot x}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{(2+2\sqrt{2})^2}{2} = \frac{[2(1+\sqrt{2})]^2}{2} = \frac{4(1+\sqrt{2})^2}{2} = 2(1 + \sqrt{2})^2$$

12. Να βρείτε δυο διαδοχικούς περιττούς που το άθροισμα τετραγώνων τους είναι 130.

Έστω v και $v+2$ οι ζητούμενοι περιττοί. Τότε $v^2 + (v + 2)^2 = 130$.

$$v^2 + v^2 + 4v + 4 = 130 \text{ ή } 2v^2 + 4v + 4 - 130 = 0 \text{ ή } 2v^2 + 4v - 126 = 0 \text{ ή}$$

$$v^2 + 2v - 63 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63) = 4 + 252 = 256$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm 16}{2}. \text{ Άρα } x = -9 \text{ ή } x = 7.$$

Αν ο ένας αριθμός είναι ο -9 , ο άλλος είναι ο -7 .

Αν ο ένας αριθμός είναι ο 7 , ο άλλος είναι ο 9 .

13. Να βρείτε δυο διαδοχικούς ακέραιους που το άθροισμά τους είναι ίσο με το γινόμενό τους.

Έστω v και $v+1$ οι ζητούμενοι ακέραιοι. Τότε $v + v + 1 = v(v + 1)$.

$$2v + 1 = v^2 + v \text{ ή } 0 = v^2 + v - 2v - 1 \text{ δηλαδή } v^2 - v - 1 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$v = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Οι ρίζες δεν είναι ακέραιοι αριθμοί άρα δεν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι που το άθροισμά τους είναι ίσο με το γινόμενό τους.

14. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 20 m και εμβαδόν 24 m². Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου του.

Η περίμετρος είναι 20 m άρα οι διαστάσεις του παραλληλογράμμου έχουν άθροισμα 10. Αν η μια διάσταση είναι x , τότε η άλλη θα είναι $10 - x$. Επειδή το εμβαδόν του παραλληλογράμμου είναι 24, θα έχουμε $x(10 - x) = 24$ ή

$$10x - x^2 = 24 \text{ ή } x^2 - 10x + 24 = 0.$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24 = 100 - 96 = 4$$

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 2}{2}. \text{ Άρα } x = 6 \text{ ή } x = 4.$$

Αν $x = 6$, οι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι 6 και 4, οπότε η διαγώνιος είναι $\delta^2 = 6^2 + 4^2$ ή $\delta^2 = 36 + 16 = 52$, άρα $\delta = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

Αν $x = 4$, οι πλευρές του παραλληλογράμμου είναι 4 και 6, οπότε η διαγώνιος είναι $\delta^2 = 4^2 + 6^2$ ή $\delta^2 = 16 + 36 = 52$, άρα $\delta = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$.

15. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει διαστάσεις 5 m και 4 m. Πόσο πρέπει να αυξήσουμε κάθε πλευρά του (κατά το ίδιο ποσό) ώστε να διπλασιαστεί το εμβαδόν του;



$$(5+x)(4+x) = 2 \cdot 5 \cdot 4$$

$$20 + 5x + 4x + x^2 = 40$$

$$x^2 + 9x - 20 = 0$$

$$\Delta = 9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20) = 81 + 80 = 161$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{161}}{2 \cdot 1}$$

$\frac{-9 - \sqrt{161}}{2}$ απαρρισταται
 $\frac{-9 + \sqrt{161}}{2}$ δεκτη

16. Πόσα ορθογώνια τρίγωνα υπάρχουν των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι διαδοχικοί φυσικοί;



$$(v+2)^2 = (v+1)^2 + v^2$$

$$v^2 + 4v + 4 = v^2 + 2v + 1 + v^2$$

$$v^2 + 2v + 1 - 4v - 4 = 0$$

$$v^2 - 2v - 3 = 0$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$v = \frac{2 \pm 4}{2} \quad / \quad 3$$

-1 απαρρισταται

για $v=3$



17. Κόβουμε ένα σύρμα μήκους 60 cm σε δυο κομμάτια και φτιάχνουμε με κάθε κομμάτι ένα τετράγωνο. Αν το άθροισμα των εμβαδών των δυο τετραγώνων είναι 117 m^2 , να βρείτε το μήκος κάθε κομματιού του σύρματος.

60 cm
 $4x$ $60-4x$
 x $15-x$
 $\frac{60-4x}{4} = \frac{4(15-x)}{4} = 15-x$
 $x^2 + (15-x)^2 = 117$
 $x^2 + 225 - 30x + x^2 - 117 = 0$
 $2x^2 - 30x + 108 = 0$
 $x^2 - 15x + 54 = 0$
 $\Delta = 225 - 216 = 9$
 $x = \frac{15 \pm 3}{2} < 9$
 Αν $x = 9$, $4 \cdot 9 = 36$
 $60 - 36 = 24$
 Αν $x = 6$, $4 \cdot 6 = 24$
 $60 - 24 = 36$

18. Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι 52 m^2 . Αν αυξήσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 4 m και το πλάτος κατά 2 m, το εμβαδόν του ορθογωνίου αυξάνεται κατά 50 m^2 . Να βρείτε το μήκος και το πλάτος του αρχικού ορθογωνίου.

Αν το μήκος της μιας πλευράς είναι x , τότε το μήκος της άλλης πλευράς είναι $\frac{50}{x}$.

Αν αυξήσουμε το μήκος του ορθογωνίου κατά 4 θα γίνει $x + 4$. Αν αυξήσουμε το πλάτος του ορθογωνίου κατά 2 θα γίνει $\frac{50}{x} + 2$. Το τελικό εμβαδόν θα είναι $52 \text{ m}^2 + 50 \text{ m}^2 = 102 \text{ m}^2$.

Επομένως $(x + 4) \left(\frac{50}{x} + 2 \right) = 102$. Άρα,

$$50 + 2x + \frac{200}{x} + 8 = 102. \text{ Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη με το } x.$$

$$50x + 2x^2 + 200 + 8x = 102x \text{ άρα } 2x^2 + 50x + 8x - 102x + 200 = 0 \text{ ή}$$

$$2x^2 - 44x + 200 = 0 \text{ ή } x^2 - 22x + 100 = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-22)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100 = 484 - 400 = 84$$

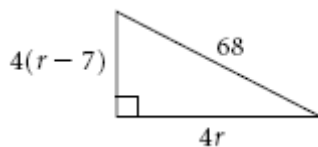
$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-22) \pm \sqrt{84}}{2 \cdot 1} \cong \frac{22 \pm 9,16}{2}$$

$$\text{Άρα } x \cong \frac{22+9,16}{2} = \frac{31,16}{2} = 15,58 \text{ ή } x \cong \frac{22-9,16}{2} = \frac{12,84}{2} = 6,42.$$

Αν $x = 15,58$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 15,58 και $\frac{50}{15,58} = 3,21$

Αν $x = 6,42$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 6,42 και $\frac{50}{6,42} = 7,79$.

19. Δυο ποδηλάτες, ο Γιώργος και η Ελένη, αφήνουν μια κατασκήνωση, ο πρώτος κατευθυνόμενος βόρεια και η δεύτερη ανατολικά. Ο Γιώργος έχει ταχύτητα μικρότερη κατά 7 km/h της ταχύτητας της Ελένης. Μετά από 4 ώρες οι ποδηλάτες απέχουν 68 km. Να βρείτε την ταχύτητα κάθε ποδηλάτη.



Έστω r η ταχύτητα της Ελένης. Τότε η ταχύτητα του Γιώργου είναι $r - 7$. Εφόσον η Ελένη κινείται με r km/h θα διανύσει $4r$ χιλιόμετρα σε 4 ώρες. Επίσης, εφόσον ο Γιώργος κινείται με $r - 7$ km/h θα διανύσει $4(r - 7)$ χιλιόμετρα σε 4 ώρες. Οι διευθύνσεις προς βοράν και προς ανατολές είναι κάθετες, άρα το τρίγωνο KNE είναι ορθογώνιο. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα έχουμε

$$\begin{aligned} (4r)^2 + [4(r - 7)]^2 &= 68^2 \\ 16r^2 + 16(r^2 - 14r + 49) &= 4624 \\ 16r^2 + 16r^2 - 224r + 784 &= 4624 \\ 32r^2 - 224r - 3840 &= 0 \\ r^2 - 7r - 120 &= 0 \\ (r + 8)(r - 15) &= 0 \end{aligned}$$

$$r + 8 = 0$$

$$r - 15 = 0$$

Άρα $r = -8$ που απορρίπτεται εφόσον η ταχύτητα δεν μπορεί να έχει αρνητικό μέτρο και $r = 15$ km/h. Επομένως η ταχύτητα της Ελένης είναι 15 km/h και η ταχύτητα του Γιώργου είναι $(15 - 7)$ km/h = 8 km/h.