ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ 1 – ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

1. **Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν οι ιδιότητες των δυνάμεων. Στη συνέχεια να διατυπώσετε με λόγια τις ιδιότητες αυτές.**

$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

Για να πολλαπλασιάσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη το άθροισμα των εκθετών.

$\frac{\alpha^{\mu}}{\alpha^{\nu}} = \alpha^{\mu-\nu}$

Για να διαιρέσουμε δυνάμεις με την ίδια βάση, αφήνουμε την ίδια βάση και βάζουμε εκθέτη τη διαφορά του εκθέτη του διαιρέτη από τον εκθέτη του διαιρετέου.

$(\alpha \cdot \beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$

Για να υψώσουμε ένα γινόμενο σε εκθέτη, υψώνουμε κάθε παράγοντα του γινομένου στον εκθέτη αυτό.

Για να υψώσουμε ένα πηλίκο σε έναν εκθέτη, υψώνουμε καθένα από τους όρους του πηλίκου στον εκθέτη αυτό.

$$\boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}}$$

$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

Για να υψώσουμε μία δύναμη σε έναν εκθέτη, υψώνουμε τη βάση της δύναμης στο γινόμενο των εκθετών.

2. **Είναι σωστό ότι για κάθε πραγματικό αριθμό α, ισχύει $\alpha^0 = 1$; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.**

Όχι, διότι το α^0 δεν ορίζεται όταν $\alpha = 0$.

3. **Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων**

$\left(\frac{2}{3}\right)^{1453} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-1453} = \left(\frac{2}{3}\right)^{1453-1453} = \left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 1$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{2010} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2010} = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)^{2010} = (1)^{2010} = 1$

4. **Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις**

$x^3 \cdot x^{-2} = x^{3+(-2)} = x^{3-2} = x^1 = x$
$\frac{x^5}{x} = x^{5-1} = x^4$
$\frac{x^5}{x^{-4}} = x^{5-(-4)} = x^{5+4} = x^9$
$(x^3y^4w^{-1})^2 = (x^3)^2(y^4)^2(w^{-1})^2 = x^6y^8w^{-2}$

5. **Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις x και y. Αν αυξήσουμε τις πλευρές του κατά μια μονάδα, να γράψετε την αλγεβρική παράσταση που εκφράζει πόσο τις εκατό αυξάνει το εμβαδόν του.**

Αν αυξήσουμε τις πλευρές του κατά μια μονάδα, οι πλευρές του θα γίνουν $x + 1$ και $y + 1$. Το αρχικό εμβαδόν είναι xy ενώ το τελικό εμβαδόν θα είναι $(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1$. Η αύξηση του εμβαδού λοιπόν θα είναι $xy + x + y + 1 - xy = x + y + 1$.

Αρχικό εμβαδόν	xy	100
Αύξηση	$x + y + 1$	X

$\frac{xy}{x+y+1} = \frac{100}{\mathrm{X}}$ άρα $X = \frac{100(x+y+1)}{xy}$.

6. **Τι εκφράζει η αλγεβρική παράσταση $\frac{(B+\beta)\upsilon}{2}$ στη γεωμετρία; Να βρείτε τη αριθμητική τιμή της παράστασης αν $B = 10$, $\beta = 4$ και $\upsilon = 4$.**

Εκφράζει το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις B και β και ύψος υ. Αν $B = 10$, $\beta = 4$ και $\upsilon = 4$, έχουμε $\frac{(10+4)\cdot 4}{2} = 14 \cdot 2 = 28$.

7. **Να κάνετε τις πράξεις**

$(x-4)+(2x-x^2+1) = \mathrm{x} - 4 + 2\mathrm{x} - \mathrm{x}^2 + 1 = -x^2 + 3x - 3$

$((x^2-4x+5)-(-2x^2-x+1) = x^2-4x+5+2x^2+x-1 = 3x^2-3x+4$

$(2x-5)(-3x^2+2x-8)=-6x^3+4x^2-16x+15x^2-10x+40=-6x^3+19x^2-26x+40$
$(2x^2-3x)-(-2x^2-1)-x-(x-1)=2x^2-3x+2x^2+1-x-x+1=4x^2-5x+2$

8. Να βρείτε τα αναπτύγματα

(ι) $(4x-3)^2=(4x)^2-2\cdot 4x\cdot 3+3^2=16x^2-12x+9$

(ιι) $(-x+3)^2=(-x)^2+2(-x)3+3^2=x^2-6x+9$

(ιιι) $(x^3+3x)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot 3x+(3x)^2=x^6+6x^4+9x^2$

(ιν) $(2x-1)^3=(2x)^3-3(2x)^2\cdot 1+3(2x)\cdot 1^2-1^3=8x^3-12x^2+6x-1$

(ν) $(3x+2)^3=(3x)^3+3(3x)^2\cdot 2+3(3x)\cdot 2^2+2^3=27x^3+54x^2+36x+8$

(νι) $(-x-1)^3=(-x)^3-3(-x)^2\cdot 1+3(-x)\cdot 1^2-1^3=-x^3-3x^2-3x-1$

9. Να κάνετε τις πράξεις

(ι) $(2x-1)^2-x(3x-2)=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 1+1^2-3x^2+2x=$

$4x^2-4x+1-3x^2+2x=x^2-2x+1$

(ιι) $3x-(x^2-x+2)-2x(2x-1)^3=$
$3x-(x^2-x+2)-2x[(2x)^3-3(2x)^2\cdot 1+3(2x)\cdot 1^2-1^3]=$

$3x-(x^2-x+2)-2x(8x^3-12x^2+6x-1)=$

$3x-x^2+x-2-16x^4+24x^3-12x^2+2x=$

$-16x^4+24x^3-14x^2+6x-2$

(ιιι) $(x-1)(x-2)(x-3)-(x^2+2x)^2=$
$(x^2-2x-x+2)(x-3)-[(x^2)^2+2\cdot x^2\cdot 2x+(2x)^2]=$

$(x^2-3x+2)(x-3)-(x^4+4x^3+4x^2)=$

$(x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6)-(x^4+4x^3+4x^2)=$

$x^3-3x^2-3x^2+9x+2x-6-x^4-4x^3-4x^2=-x^4-3x^3-10x^2+11x-6$

(ιν) $-(-3-2x)^2+(2x+3)^2=$

$-[(-3)^2-2(-3)2x+(2x)^2]+[(2x)^2+2(2x)3+3^2=$

$$-(9+12x+4x^2)+(4x^2+12x+9)=-9-12x-4x^2+4x^2+12x+9=0$$

Πιο εύκολη (;) λύση

$$-(-3-2x)^2+(2x+3)^2=-[-(3+2x)]^2+(2x+3)^2=-(3+2x)^2+(2x+3)^2=0$$

10. Αν $P(x)=2x-3$, $Q(x)=x^2-2x+3$ και $R(x)=3x^2-1$, να βρείτε τα πολυώνυμα

(ι) $P(x)+Q(x) \;\; =2x-3 \;\; +x^2-2x+3=x^2$

(ιι) $P(x)+Q(x)-R(x)=x^2-(3x^2-1)=x^2-3x^2+1=-2x^2+1$

(ιιι) $Q(-1)=(-1)^2-2(-1)+3=1+2+3=6$

$$Q(-1)P(x)-(x+1)^2R(x)=6\ (2x-3)\ -(x+1)^2\ (3x^2-1)=$$

$$6\ (2x-3)\ -(x+1)^2\ (3x^2-1)=12x-18-(x^2+2x+1)(3x^2-1)=$$

$$12x-18-(3x^4-x^2+6x^3-2x+3x^2-1)=$$

$$12x-18-3x^4+x^2-6x^3+2x-3x^2+1=-3x^4-6x^3-2x^2+14x-17=$$

11. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ισότητες είναι ταυτότητες (ΕΓΙΝΕ ΣΤΗΝ ΤΑΞΗ)

(α) $(-x)^2=x^2$

(β) $(x^{1821}-x^{1940}+1453)^{2008}=(x^{1940}-x^{1821}-1453)^{2008}$

(γ) $(x-x)(2x-1)^{1789}=[(x+1)^2]^3-(1+x)^6$

12. Για ποιες τιμές των a και b ισχύει $(a+b)^2=(a-b)^2$

$(a+b)^2=(a-b)^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=a^2-2ab+b^2 \Leftrightarrow$
$2ab=-2ab \Leftrightarrow 2ab+2ab=0 \Leftrightarrow 4ab=0 \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow a=0$ ή $b=0$

13. Για ποιες τιμές των a και b ισχύει $(a+b)^2=a^2+b^2$

$(a+b)^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow a^2+2ab+b^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow$

$2ab=0 \Leftrightarrow 4ab=0 \Leftrightarrow ab=0 \Leftrightarrow \; a=0$ ή $b=0$

14. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=ab$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}-\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)}{4}=\frac{a^2+2ab+b^2-a^2+2ab-b^2)}{4}=\frac{4ab}{4}=ab$$