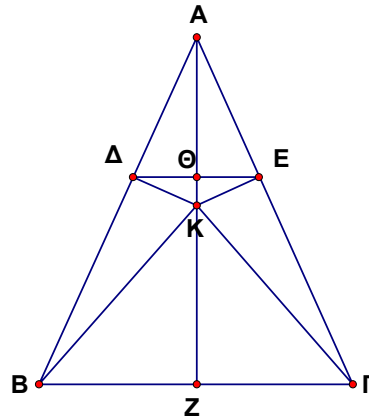


ΘΕΜΑ 2^ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$. Επίσης η AZ είναι διχοτόμος του τριγώνου. Αν K τυχαίο σημείο της διχοτόμου και $K\Delta$, KE οι αποστάσεις του από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι
 (α) το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές (β) $K\Delta = KE$ (γ) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές (δ) το τρίγωνο $K\Delta E$ είναι ισοσκελές και (ε) η AK είναι κάθετη στην ΔE .



(α) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα AKB και $AK\Gamma$. Αυτά έχουν AK κοινή πλευρά

$\angle 1 = \angle 2$ διότι $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$
 $AB = A\Gamma$ από την υπόθεση.

Άρα τρίγωνο $AKB =$ τρίγωνο $AK\Gamma$ διότι έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση. Εφόσον τα τρίγωνα είναι ίσα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Επομένως απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. Αυτό σημαίνει ότι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle 1$ και $\angle 2$ βρίσκονται ίσες πλευρές.

Άρα $KB = K\Gamma$

[Πιο γρήγορη λύση: Η $A\Delta$ διχοτόμος στο ισοσκελές $AB\Gamma$ είναι και διάμεσος και ύψος. Αυτό σημαίνει ότι η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος της $B\Gamma$ και επειδή κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του τμήματος, θα ισχύει $KB = K\Gamma$]

(β) Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $AK\Delta$ και AKE . Αυτά έχουν AK κοινή πλευρά

$\angle 1 = \angle 2$ διότι $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$

Τα τρίγωνα είναι ορθογώνια στο E και Δ διότι $K\Delta$, KE αποστάσεις.

Άρα τρίγωνο $AK\Delta =$ τρίγωνο AKE διότι είναι ορθογώνια και έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίση. Εφόσον τα τρίγωνα είναι ίσα έχουν όλα τα αντίστοιχα στοιχεία τους ίσα. Επομένως απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές. Αυτό σημαίνει ότι απέναντι από τις ίσες γωνίες $\angle 1$ και $\angle 2$ βρίσκονται ίσες πλευρές.

Άρα $K\Delta = KE$.

[Πιο γρήγορη λύση: Η $A\Delta$ διχοτόμος της γωνίας A και επειδή γνωρίζουμε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μια γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της, ισχύει $K\Delta = KE$.]

(γ) Προηγουμένως αποδείξαμε ότι τρίγωνο $AK\Delta =$ τρίγωνο AKE , άρα $A\Delta = AE$ (γιατί είναι αντίστοιχες πλευρές;), οπότε το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(δ) Προηγουμένως αποδείξαμε ότι $K\Delta = KE$, άρα το τρίγωνο $K\Delta E$ είναι ισοσκελές.

(ε) Παραπάνω αποδείξαμε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές και επειδή η $A\Theta$ είναι διχοτόμος του (εφόσον η AZ διχοτομεί τη γωνία A) θα είναι και ύψος, οπότε AK κάθετη με την ΔE .