ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 1999
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΛΙΟΥ 1999
ΔΕΣΜΗ ΤΕΤΑΡΤΗ (4η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Β.

α) Να αποδείξετε ότι

$$\ln(x+1) > x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty).$$

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύει

$$[f(x)]^5 + 2[f(x)]^3 + 3f(x) = (x+1)\ln(x+1) - \frac{4}{5}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + 182$$

για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνονται τα σημεία του επιπέδου

Α (1,3), Β (-1,0), Γ (3,-1).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στην ευθεία ΒΓ.

β) Έστω C ο κύκλος με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα (ΑΒ).

Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της ευθείας ΒΓ με τον παραπάνω κύκλο.

Β. Έστω $\Omega = \{0, 1, 2\}$ ένας δειγματικός χώρος με $P(0) = 2P(2) = \frac{1}{3}$

α) Να βρείτε το P (1).

β) Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - \frac{\lambda}{2}x^2 + 118, \qquad x \in R \text{ και } \lambda \in \Omega.$$

Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$E = \{\lambda \in \Omega$ / η γραφική παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $(0, f(0))\}$.

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε.

ΖΗΤΗΜΑ 3°

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ημ^2(αx)$, $x \in R$ και $α \in R$

Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει

$f''(x) + 4α^2 f(x) = 2$ για κάθε $x \in R$

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, $x \in R$.

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [1, 3]$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x'x και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$.

ΖΗΤΗΜΑ 4°

Α. Έστω Α ένας $ν \times ν$ πίνακας για τον οποίο ισχύει

$(A - I)^{-1} = A + 2I$, όπου I ο $ν \times ν$ μοναδιαίος πίνακας.

α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = 3I - A$

β) Έστω X $ν \times ν$ πίνακας για τον οποίο ισχύει

$AX - A = 4I - X$.

Να αποδείξετε ότι $X = A + I$.

Β. Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R και το σύστημα με αγνώστους x, y, ω.

$$\begin{cases} f(1)x + y + ω = 0 \\ f(2)x + 2y + 2ω = 0 \\ 2x + f(2)y + 2f(1)ω = 0 \end{cases}$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις.

Να αποδείξετε ότι

α) $\dfrac{f(2)}{2} = \dfrac{f(1)}{1}$

β) Η εξίσωση $x f'(x) - f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1, 2),