ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2001
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2001
ΔΕΣΜΗ ΠΡΩΤΗ (1η)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : ΤΡΕΙΣ (3)

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Α. Έστω δειγματικός χώρος Ω και Α ένα ενδεχόμενό του. Αν Α΄ είναι το αντίθετο ενδεχόμενο του Α, να αποδείξετε ότι

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Β. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} x - 2y + 3\omega - \varphi = \kappa \\ 3x + y + 2\omega + 4\varphi = \lambda \\ 5x + 4y + \omega + 9\varphi = \mu \end{cases}$$

όπου $\kappa, \lambda, \mu \in R$.

α. Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να αποδείξετε ότι

$$\mu+\kappa-2\lambda=0$$

β. Αν $(x, y, \omega, \varphi) = (1, 2, 1, 1)$ είναι μία λύση του συστήματος, να βρείτε όλες τις λύσεις του.

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι ευθείες

$$\varepsilon_\alpha: \alpha x - y = 0 \quad \text{και} \quad \zeta_\alpha: x+\alpha y=2, \ \alpha\in R.$$

α. Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in R$, οι ευθείες ε_α διέρχονται από σταθερό σημείο Α και οι ευθείες ζ_α διέρχονται από σταθερό σημείο Β, τα οποία και να προσδιορίσετε.

β. Αν Μ(x, y) είναι το σημείο τομής των ε_α και ζ_α, να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in R$ το Μ κινείται σε κύκλο, του οποίου να βρείτε την εξίσωση.

Β. Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(z) = z^2 - 2z + 2$ και $Q(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z - 2$, όπου $\alpha, \beta \in R$.

α. Να βρείτε τις ρίζες z_1, z_2 του P(z) και να αποδείξετε ότι $z_1^{12} + z_2^{12} = -2^7$.

β. Αν μια ρίζα του πολυωνύμου P(z) είναι και ρίζα του πολυωνύμου Q (z), να προσδιορίσετε τις τιμές των α και β.

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to R$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1)\, f'(\xi_2) = 4.$$

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Α. Έστω η συνάρτηση

$f(x) = x^3 - 3x^2συν2α + 2xσυν^2 2α + ημ^2 2α$, $x \in R$ και $α \in R$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

Β. Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0) = 1$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}, \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0,f(0)).

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, δέσμη, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα να μην τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε τα φωτοαντίγραφα μαζί με το τετράδιο.
3. Να απαντήσετε σε όλα τα ζητήματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης : τρεις (3) ώρες.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : μία (1) ώρα μετά την έναρξη της εξέτασης.

ΑΠΟ ΤΗΝ Κ.Ε.Γ.Ε

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ