

Εκθετική Συνάρτηση

1. Να βρεθούν τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $f(x) = \left(\frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1}\right)^x$
 - i) Ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Απ.: $\alpha < -1$ ή $\alpha > 1/2$)
 - ii) Είναι γνησίως αύξουσα (Απ.: $\alpha < -1$ ή $\alpha > 2$)
 - iii) Είναι γνησίως φθίνουσα (Απ.: $1/2 < \alpha < 2$)
 - iv) Ορίζεται στο \mathbb{R} και είναι '1-1'. (Απ.: $\alpha < -1$ ή $1/2 < \alpha \neq 2$)

2. Να βρεθούν τα $\alpha \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $f(x) = \left(\frac{1 - 2\alpha}{1 + 2\alpha}\right)^x$
 - i) Ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Απ.: $-1/2 < \alpha < 1/2$)
 - ii) Είναι γνησίως αύξουσα (Απ.: $-1/2 < \alpha < 0$)
 - iii) Είναι γνησίως φθίνουσα (Απ.: $0 < \alpha < 1/2$)
 - iv) Είναι '1-1'. (Απ.: $-1/2 < \alpha < 0$ ή $0 < \alpha < 1/2$)

3. Δίνεται η $f(x) = a^x + x$, $a > 1$.
 - i) Ν.δ.ο. η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
 - ii) Να λυθεί η ανίσωση $a^{x^2+2} - a^{3x} < -x^2 + 3x - 2$ (Απ.: $1 < x < 2$)

4. Δίνεται $f(x) = a^x - x$, $x \in \mathbb{R}$ και $0 < a < 1$.
 - i) Ν.δ.ο. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .
 - ii) Να βρείτε τα $\lambda \in \mathbb{R}$ αν $a^{\lambda^2-4} - a^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$ (Απ.: $\lambda = -1$ ή $\lambda = 2$)

5. Αν $a > 0$ να συγκρίνετε τους αριθμούς A και B αν:
 - i) $A = a^{1+\sqrt{3}}$ και $B = a^{2-\sqrt{2}}$ ii) $A = a^{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ και $B = a^{2+\sqrt{3}}$

6. Έστω $f(x) = 10^x - 10^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
 - i) Ν.δ.ο. η f είναι γνησίως αύξουσα.
 - ii) Να λυθεί η εξίσωση $10f(x) = 99$ (Απ.: $x = 1$)

7. Αν $f(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ ν.δ.ο.
 - i) $f(x + y) = g(x)g(y) + f(x)f(y)$
 - ii) $f(x - y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$
 - iii) Η f είναι άρτια και η g περιττή

8. Αν $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ και $g(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$ ν.δ.ο. $[f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 1$.

9. Έστω $0 < a < 1$ και $f(x) = a^x + (1 - a)^x$. Ν.δ.ο.
 - i) αν $x > 1$ τότε $f(x) < 1$ ii) αν $x < 1$ τότε $f(x) > 1$

Εκθετική Συνάρτηση

1. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $2^{x^2-2x} < 8^{x-2}$ (Απ.: $2 < x < 3$)

ii) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{3-7x}$ (Απ.: $x \leq 1$)

iii) $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^3+x-\frac{3}{2}} \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$ (Απ.: $x \geq 1$)

iv) $3^{2\sqrt{x}} \leq 9$ (Απ.: $0 \leq x \leq 1$)

v) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x-1} \leq 2$ (Απ.: $x \leq 2$)

vi) $16^x - 17 \cdot 4^x + 16 > 0$ (Απ.: $x < 0$ ή $x > 2$)

vii) $2^{2x+3} + 7 \cdot 2^x \leq 3 \cdot 2^{x+3} - 2$ (Απ.: $-3 \leq x \leq 1$)

viii) $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} < 3^{x+4} - 5^{x+3}$ (Απ.: $x < -1$)

ix) $27^x + 12^x > 2 \cdot 8^x$ (Απ.: $x > 0$)

x) $(\sqrt{2}-1)^x \leq (3-\sqrt{8})^{x-6}$ (Απ.: $x \leq 12$)

xi) $4^{\eta\mu^2x} + 2 \cdot 4^{\sigma\upsilon\nu^2x} \leq 6, x \in (0, \pi/2)$ (Απ.: $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$)

2. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $2^{x-2y} = 8$ και $3^{\frac{x}{2}+y} = 3\sqrt{3}$ (Απ.: $x = 3, y = 0$)

ii) $3 \cdot 2^{x+1} - 2 \cdot 3^{y-1} = 6$ και $2^{x+2} + 3^y = 17$ (Απ.: $x = 1, y = 2$)

iii) $3^x \cdot 4^y = 36$ και $4^x \cdot 3^y = 48$ (Απ.: $x = 2, y = 1$)

iv) $5^x \cdot 7^y = 175$ και $x + y = 3$ (Απ.: $x = 2, y = 1$)

v) $3 \cdot 2^{x+y} - 5 \cdot 2^{x-y} = 172$ και $5 \cdot 2^{x+y} - 4 \cdot 2^{x-y} = 304$ (Απ.: $x = 4, y = 2$)

vi) $\sqrt[5]{2^{2x}} \cdot \sqrt[3]{4^y} = 2^{y+5}$ και $\sqrt[3]{3^y} \cdot \sqrt[5]{9^x} = 3^{2y+1}$ (Απ.: $x = 15, y = 3$)

vii) $x^y = y^x$ και $x = y^2$ (Απ.: $(x, y) = (1, 1)$ ή $(x, y) = (4, 2)$)

Λογαριθμική Συνάρτηση

1. Να προσδιοριστεί ο x όταν:

i) $\log_3 x = 4$ ii) $\log x = -1$ iii) $\ln x = 2$ iv) $\log_x 27 = 3$

v) $\log_x 5 = 1/4$ vi) $\log_x 4 = x$ vii) $\log_x x = 2$

(Απ.: i) $x = 81$ ii) $x = 1/10$ iii) $x = e^2$ iv) $x = 3$ v) $x = 625$ vi) $x = 2$ vii) $x = 1$)

2. Αν $2(\log_x 8)^2 + \log_x 64 + \log_x 8 = 9$ να βρεθεί ο x . (Απ.: $x = 4$ ή $x = 1/2$)

3. Ν.δ.ο. i) $2\log 2 + 3\log 3 - \log 12 = 2\log 3$

ii) $3^{\log_3 8 - \log_3 2} = 4$

iii) $\frac{7}{16} \ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(1 + \sqrt{2}) = \frac{25}{8} \ln(\sqrt{2} - 1)$

4. Αν $f(x) = \ln x$ με $x_1 \neq x_2$ και $x_1, x_2 > 0$ ν.δ.ο. $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$.

5. Αν α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. ν.δ.ο. και οι αριθμοί $\ln \alpha, \ln \beta, \ln \gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και αντίστροφα.

6. Έστω ότι η ακολουθία (α_n) έχει θετικούς όρους. Αν η (α_n) είναι Γ.Π. ν.δ.ο. η ακολουθία $\beta_n = \log \alpha_n$ είναι Α.Π. και αντίστροφως.

7. Αν $0 < \alpha, \beta \neq 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 7\alpha\beta$ ν.δ.ο. $\log \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{1}{2}(\log \alpha + \log \beta)$.

8. Αν $x, y > 0$ ν.δ.ο. $\log \frac{x+y}{3} = \frac{1}{2}(\log x + \log y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$.

9. Αν $0 < \beta < \alpha$ με $\alpha, \beta \neq 1$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 11\alpha\beta$ ν.δ.ο. $\log \alpha + \log \beta = 2\log \frac{\alpha - \beta}{3}$.

10. Αν ισχύουν $\frac{\ln \alpha}{\beta - \gamma} = \frac{\ln \beta}{\gamma - \alpha} = \frac{\ln \gamma}{\alpha - \beta}$ ν.δ.ο. $\alpha^\alpha \cdot \beta^\beta \cdot \gamma^\gamma = 1$.

11. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\log(1 - 4x), 2\log(x - 2)$.

12. Να συγκριθούν οι αριθμοί $\log_\alpha 4, \log_\alpha 3$.

13. Αν $\log_{25} 3 = \alpha$ ν.δ.ο. $\log_{25} 45 = 2\alpha + \frac{1}{2}$.

14. Αν $\log 3 = \alpha$ και $\log 2 = \beta$ ν.δ.ο. $\log_5 6 = \frac{\alpha + \beta}{1 - \beta}$.

15. Αν μία Α.Π. έχει πρώτο όρο $\alpha_1 = \log \alpha$ και δεύτερο όρο $\alpha_2 = \log \beta$ ν.δ.ο. το

άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι $S_n = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^{n(n-1)}}{\alpha^{n(n-3)}}$.

Λογαριθμική Συνάρτηση

1. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $2^{\ln x} + 2^{2-\ln x} = 5$ (Απ.: $x = 1$ ή $x = e^2$)

ii) $3^{2\log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$ (Απ.: $x = 10$)

iii) $\log(x-1) + \log(x-2) = \log x$ (Απ.: $x = 2 + \sqrt{2}$)

iv) $\log(4^x + 26) = 1 + \log(2^x + 1)$ (Απ.: $x = 1$ ή $x = 3$)

v) $\log x \cdot \log(10x) = 6$ (Απ.: $x = 100$)

vi) $x \log 5 - \log(1 + 2^x) = x - \log 6$ (Απ.: $x = 1$)

vii) $2x - \log(5^{2x} + 4x - 16) = \log 4^x$ (Απ.: $x = 4$)

viii) $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10$ (Απ.: $x = 100$ ή $x = 0,01$)

ix) $10x^{\log x} = x^2 \sqrt{x}$ (Απ.: $x = 100$ ή $x = \sqrt{10}$)

x) $\log_8(x+14) + \log_8(x+2) = 2$ (Απ.: $x = 2$)

xi) $\log_x(x^2 + 3x + 2) = \log_x(8x - 2)$ (Απ.: $x = 4$)

2. i) Ν.δ.ο. $\log 5 = 1 - \log 2$

ii) Να λυθεί η εξίσωση $x^{\log(2x)} = 5$ (Απ.: $x = 5$ ή $x = 1/10$)

3. Να λυθούν οι ανισώσεις:

i) $\log(5 - |x|) > \log 2$

ii) $\log_{0,5} x < \log_{0,5} 2$

iii) $(\log_3 x)^2 - 5 \log_3 x + 4 \leq 0$ (Απ.: $3 \leq x \leq 81$)

iv) $100^{\frac{1}{2} \log(x^2 - 5x + 7)} > 1$ (Απ.: $x < 2$ ή $x > 3$)

v) $x^{\log x} < 10$ (Απ.: $1/10 < x < 10$)

4. Να λυθούν τα συστήματα:

i) $x + y = 65$ και $\log x + \log y = 3$ (Απ. $(x, y) = (40, 25)$ ή $(25, 40)$)

ii) $3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y^2} = 77$ και $3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_4 y^2} = 17$

iii) $x^{\log y} = 100$ και $x \cdot y = 1000$ (Απ.: $(x, y) = (100, 10)$ ή $(10, 100)$)

iv) $x^y = y^x$ και $2^x = 4^y$ (Απ.: $(x, y) = (4, 2)$)

5. Αν η ημιζωή ενός ραδιενεργού υλικού είναι 20 χρόνια, ν.δ.ο. η συνάρτηση που

εκφράζει την εκθετική απόσβεση αυτού είναι $Q(t) = Q_0 2^{-\frac{1}{20}t}$.

6. Μια πόλη έχει πληθυσμό α_0 κατοίκους. Ο πληθυσμός δίνεται συναρτήσει του

χρόνου t (σε έτη) από τη σχέση $\alpha = \alpha_0 \cdot 10^{0,01t}$. Να βρεθεί μετά από πόσα έτη ο

πληθυσμός της πόλης θα διπλασιαστεί. Δίνεται $\log 2 = 0,3$. (Απ.: 30 έτη)