Αριθμητική Πρόοδος

1. Δίνονται οι ακολουθίες

   i) $\alpha_\nu = 2\nu - 3$ ii) $\alpha_\nu = 5\ 3^\nu$ iii) $\alpha_\nu = 1 + 2^\nu$

   Να βρεθεί ο αναδρομικός τους τύπος.

   (Απ.: i) $\alpha_{\nu+1} = 2 + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = -1$ ii) $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$, $\alpha_1 = 15$ iii) $\alpha_{\nu+1} = 2^\nu + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = 3$)

2. Να βρεθεί ο γενικός τύπος των ακολουθιών

   i) $\alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = -1$ ii) $\alpha_{\nu+1} = 3\alpha_\nu$, $\alpha_1 = 15$ iii) $\alpha_{\nu+1} = 2^n + \alpha_\nu$, $\alpha_1 = 3$

   (Απ.: i) $\alpha_\nu = \nu - 2$ ii) $\alpha_\nu = 5\ 3^\nu$ iii) $\alpha_\nu = 1 + 2^\nu$)

3. Η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\nu + 2$ είναι Α.Π. με διαφορά ω ίση με

   Α. 5   Β. 2   Γ. –1   Δ. 3   Ε. 10

4. Αν η ακολουθία (α_ν) είναι Α.Π. ν.δ.ο. $2\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \alpha_{\nu+2}$.

5. Η ακολουθία $\alpha_\nu = 4\nu - 5$, $\nu \in N^*$.

   i) Ν.δ.ο. η (α_ν) είναι Α.Π.

   ii) Να βρεθεί το άθροισμα των όρων της που είναι ανάμεσα στους αριθμούς 17 και 99.

6. Σε Α.Π. είναι $\alpha_8 = 40$ και $\alpha_{20} = -20$. Ν.δ.ο. $\alpha_{14} = 10$.

7. Αν οι αριθμοί 3κ, κ + 4, κ – 1 είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. ν.δ.ο. κ = 4,5.

8. Αν οι γ, α + β, α – β είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. ν.δ.ο. γ = α + 3β.

9. Σε Α.Π. είναι $\alpha_1 = 3$ και ω = 7.

   i) Να βρεθεί το πλήθος ν των πρώτων όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 679. (Απ.: ν = 14)

   ii) Ποιος θα είναι ο τελευταίος όρος α_ν τότε; (Απ.: $\alpha_{14} = 94$)

10. Σε Α.Π. 3, 7, 11, … δίνεται $S_\nu = 300$. Ν.δ.ο. ν = 12.

11. Σε Α.Π. είναι ω = 3 και $S_9 = 126$. Ν.δ.ο. $\alpha_3 = 8$.

12. Σε Α.Π. είναι $S_{20} = 610$ και $S_{12} = 222$. Ν.δ.ο. ω = 3 και $\alpha_1 = 2$.

13. Σε Α.Π. είναι $\alpha_2 + \alpha_6 = 16$ και $\alpha_4 + \alpha_7 = 22$. Ν.δ.ο. $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 = 18$.

14. Σε Α.Π. είναι $\frac{S_5}{S_2} = \frac{25}{4}$. Ν.δ.ο. $\frac{\alpha_5}{\alpha_2} = 3$.

15. Σε Α.Π. είναι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$. Ν.δ.ο. $\alpha_5 = 13$ και $S_{20} = 315$.

16. Να λύσετε τις εξισώσεις:

    i) $(x + 2) + (x + 5) + \ldots + (x + 29) = 165$ (Απ.: x = 1)

    ii) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$ με $x > 0$ (Απ. x = 55)

    iii) Ν.δ.ο. $100^2 + 98^2 + 96^2 + \ldots + 10^2 - 99^2 - 97^2 - \ldots - 9^2 = 5014$

Αριθμητική Πρόοδος

1. Μεταξύ των αριθμών 5 και 37 να βρεθούν άλλοι επτά, ώστε μαζί οι εννιά αυτοί αριθμοί να αποτελούν διαδοχικούς όρους Α.Π. (Απ.: 5, 9, 13, …, 33, 37)
2. Μεταξύ των αριθμών –6 και 48 να παρεμβάλουμε μ αριθμητικούς μέσους $x_1, x_2, \dots, x_\mu$ ώστε $x_7 = 2x_4$. Ν.δ.ο. το πλήθος των ενδιάμεσων αριθμών είναι 8.
3. Σε Α.Π. ο $2^{ος}$ και ο $8^{ος}$ όρος διαφέρουν κατά 24, ενώ το άθροισμα του $12^{ου}$ και του $4^{ου}$ όρου είναι 70.
   i) Να βρεθεί η πρόοδος αν είναι γνησίως φθίνουσα. (Απ.: $\omega = -4$ και $\alpha_1 = 63$)
   ii) Ποιο είναι το άθροισμα των όρων της που βρίσκονται μεταξύ του $8^{ου}$ και του $25^{ου}$ όρου της. (Απ.: S = 16)
4. Αν τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. ν.δ.ο. είναι ανάλογα των αριθμών 3, 4, 5.
5. Σε κάθε Α.Π. ν.δ.ο. οι όροι που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν άθροισμα ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων της προόδου.
6. Σε Α.Π. με 19 όρους, ο πρώτος είναι α και ο τελευταίος β. Ν.δ.ο. ο μεσαίος όρος είναι $\frac{\alpha+\beta}{2}$.
7. Α.Π. έχει 101 όρους και ο μεσαίος όρος της είναι λ, $\lambda \in R$ τότε $S_{101} = 101\lambda$;
8. Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων Α.Π. είναι 110 και το άθροισμα των 10 επομένων 310. Να βρεθεί η πρόοδος και το άθροισμα της $3^{ης}$ δεκάδας.
   (Απ.: $\alpha_1 = \omega = 2$ και S = 510)
9. Στις προόδους (α_ν): 17, 21, 25, … και (β_ν): 16, 21, 26, … εμφανίζονται κοινοί όροι (όπως ο 21).
   i) Να βρεθεί ο επόμενος κοινός τους όρος (Απ.: 41)
   ii) Να βρεθεί το άθροισμα των 20 πρώτων κοινών όρων τους. (Απ.: 4220)
10. Αν η ακολουθία (α_ν), $\nu \in N^*$ είναι Α.Π. ν.δ.ο.
    i) $\alpha_\nu = \alpha_{\nu-\mu} + \mu\omega$, $\mu < \nu$, $\mu \in N^*$ ii) $\omega = \dfrac{\alpha_\nu^2 - \alpha_1^2}{2S_\nu - \alpha_\nu - \alpha_1}$ iii) $\alpha_\nu = \dfrac{S_\nu}{\nu} + \dfrac{(\nu-1)\omega}{2}$
11. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έχουν άθροισμα 24 και γινόμενο 440. (Απ.: 5, 8, 11 ή 11, 8, 5)
12. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι Α.Π., έχουν άθροισμα 16 και άθροισμα τετραγώνων 84. (Απ. 1, 3, 5, 7 ή 7, 5, 3, 1)
13. Αν S_1, S_2, S_3 είναι τα αθροίσματα των ν, 2ν, 3ν πρώτων όρων Α.Π. ν.δ.ο. $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.

Γεωμετρική Πρόοδος

1. Αν $\alpha_1 = 3$ και $\alpha_{\nu+1} = 4\alpha_\nu$ ν.δ.ο. η (α_ν) είναι Γ.Π. και $\alpha_\nu = 3\cdot 4^{\nu-1}$.
2. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 3\cdot 2^\nu$.
   i) Να βρεθεί ο όρος $\alpha_{\nu+1}$. (Απ.: $\alpha_{\nu+1} = 3\cdot 2^{\nu+1}$)
   ii) Ν.δ.ο. η (α_ν) είναι Γ.Π. και να βρεθεί ο λ και ο α_1. (Απ.: $\alpha_1 = 6$, $\lambda = 2$)
   iii) Ποιος όρος της είναι ίσος με 3072; (Απ.: $\nu = 10$)
3. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι $S_\nu = 2(3^\nu - 1)$, $\nu\in N^*$. Ν.δ.ο. η (α_ν) είναι Γ.Π. και να βρείτε τους α_1 και λ. (Απ.: $\alpha_1 = 4$, $\lambda = 30$)
4. Σε Γ.Π. είναι $\alpha_1 = 2$, $\lambda = 3$ και $\alpha_\nu = 162$. Ν.δ.ο. $\nu = 5$.
5. Σε Γ.Π. είναι $\alpha_3 = 12$ και $\alpha_5 = 192$. Ν.δ.ο. $\lambda = \pm 4$.
6. Σε Γ.Π. είναι $\alpha_1 = 4$, $\lambda = 4$ και $S_\nu = 5460$. Ν.δ.ο. $\nu = 6$.
7. Σε Γ.Π. είναι $\dfrac{\alpha_9}{\alpha_6} = 64$. Ν.δ.ο. $\dfrac{\alpha_{12}}{\alpha_8} = 256$.
8. Σε Γ.Π. είναι $\alpha_1 = 2$, $\alpha_\nu = 128$ και $S_\nu = 254$. Ν.δ.ο. $\lambda = 2$ και $\nu = 7$.
9. Σε κάθε Γ.Π. ν.δ.ο. i) $\alpha_\mu = \lambda^{\mu-\kappa}\alpha_\kappa$, $\mu, \kappa \in N^*$ ii) $\lambda = \dfrac{S_\nu - \alpha_1}{S_\nu - \alpha_\nu}$
   iii) $\alpha_1 = \lambda\alpha_\nu - (\lambda - 1)S_\nu$ iv) $S_\nu = \dfrac{\lambda\alpha_\nu - \alpha_1}{\lambda - 1}$ v) $\alpha_\nu = \dfrac{\alpha_1 + (\lambda-1)S_\nu}{\lambda}$.
10. Αν οι αριθμοί $x - 1$, x, $x + 2$ αποτελούν διαδοχικούς όρους Γ.Π. ν.δ.ο. $x = 2$.
11. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. ν.δ.ο.
    i) $(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha - \beta + \gamma) = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$
    ii) $\alpha^2\beta^2\gamma^2(\dfrac{1}{\alpha^3} + \dfrac{1}{\beta^3} + \dfrac{1}{\gamma^3}) = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$
12. Αν α, β, γ, δ είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. ν.δ.ο.
    i) $(\alpha + \delta)(\beta + \gamma) - (\alpha + \gamma)(\beta + \delta) = (\beta - \gamma)^2$
    ii) $(\delta - \alpha)^2 - (\delta - \beta)^2 = (\gamma - \alpha)^2 + (\gamma - \beta)^2$
13. Μεταξύ του 5 και του 80 να παρεμβάλετε 3 γεωμετρικούς ενδιαμέσους.
    (Απ.: 10, 20, 40 ή –10, 20, –40)
14. Αν το γινόμενο τριών διαδοχικών όρων Γ.Π. είναι 512 και το άθροισμα τους 73 να βρεθούν οι όροι της προόδου. (Απ.: 1, 8, 64 ή 64, 8, 1)
15. Να βρεθούν 4 αριθμοί που είναι διαδοχικοί όροι Γ.Π. όταν το γινόμενο τους είναι 4096 και ο τέταρτος ισούται με το γινόμενο των δύο μεσαίων. (Απ.: 1, 4, 16, 64)
16. Αν α_κ, α_μ, α_ν είναι όροι τάξης κ, μ, ν μιας Γ.Π. ν.δ.ο. $\alpha_\kappa^{\mu-\nu}\cdot\alpha_\mu^{\nu-\kappa}\cdot\alpha_\nu^{\kappa-\mu} = 1$.

Γεωμετρική Πρόοδος

1. Γ.Π. έχει οκτώ όρους. Αν το άθροισμα των όρων άρτιας τάξης είναι 510 και το άθροισμα των όρων περιττής τάξης είναι 255 να βρεθεί η πρόοδος. (Απ.:3, 6,…)
2. Σε Γ.Π. είναι $\alpha_1 + \alpha_2 = 4$ και $\alpha_5 + \alpha_6 = 324$. Να βρεθεί ο λόγος λ και το άθροισμα των όρων που είναι ανάμεσα στον 5ο και τον 20ο όρο της. (Απ.: $\lambda = \pm 3$)
3. Αν οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Α.Π. και οι β, γ, α διαδοχικοί όροι Γ.Π. ν.δ.ο. $\alpha = \beta = \gamma$ ή $\alpha = 4\beta = -2\gamma$.
4. Ν.δ.ο. $(3 \cdot 9 \cdot 27 \cdot ... \cdot 3^{\nu})^2 = 3^{\nu^2+\nu}$.
5. Να λυθεί η εξίσωση $3 + 3^2 + \ldots + 3^x = 120$, $x \in R^*$. (Απ.: x = 4)
6. Να λυθεί η εξίσωση $x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x...}}}} = 16$. (Απ. $x = \pm 4$)
7. Σε Γ.Π. με $|\lambda| < 1$ ο πρώτος όρος της α_1 είναι τα 3/4 του αθροίσματος των απείρων όρων της. Αν το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι 15 να βρεθεί η πρόοδος. (Απ.: $\lambda = 1/4$, $\alpha_1 = 12$)
8. Το άθροισμα των απείρων όρων Γ.Π. με $|\lambda| < 1$ είναι 5 και το άθροισμα των τετραγώνων των απείρων όρων της είναι 80. Να βρεθεί η πρόοδος.
   (Απ.: $\lambda = -11/21$, $\alpha_1 = 160/21$)
9. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = 5(1 - 2x)^{\nu-1}$, $\nu \in N^*$ και $x \neq 1/2$.
   i) Ν.δ.ο. η (α_ν) είναι Γ.Π. (Απ.: $\lambda = 1 - 2x$, $\alpha_1 = 5$)
   ii) Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|\lambda| < 1$ και έπειτα να βρεθεί το άθροισμα των απείρων όρων της. (Απ.: $S = \frac{5}{2x}$)
10. Στο σαλόνι του σπιτιού μας έχουμε ένα φυτό εσωτερικού χώρου, ύψους 1m. Το ύψος του σαλονιού μας είναι 3m. Το φυτό την 1η ημέρα μεγαλώνει κατά 1/2m, την 2η ημέρα κατά 1/4m, την 3η ημέρα κατά 1/8m και αυτό συνεχίζεται καθημερινά. Το φυτό εξαιτίας της ανάπτυξης του μπορεί να παραμείνει στο σαλόνι μας επ'αόριστο ή πρέπει να απομακρυνθεί επειδή κάποια στιγμή θα αγγίξει το ταβάνι; (Απ.: S = 2)