Ασκήσεις – Τριγωνομετρικοί Αριθμοί

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Ν.δ.ο. ημΒ σφΓ = $\frac{ΓΔ}{ΑΒ}$.
2. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 1125^o.
3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{25\pi}{3}$.
4. Αν ισχύει $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, ν.δ.ο.
   i) 2σφx – 3συνx > 0
   ii) ημx συνx + εφx > 0
5. Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$):
   i) Να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{B}$.
   ii) Ν.δ.ο. εφΒ + εφΓ = $\frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$.
6. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ. Ν.δ.ο. ΒΓ = ΑΓ συνΓ + ΑΒ συνΒ.
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $\hat{B} = 45^o$, $\hat{Γ} = 30^o$ και ΒΓ = $20(1 + \sqrt{3})$. Να βρείτε το ύψος ΑΔ.
8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) είναι $\hat{Γ} = 60^o$ και ΒΓ = 7cm. Να υπολογίσετε τα μήκη των καθέτων πλευρών του.
9. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 45^o$, $\hat{Γ} = 30^o$ και το ύψος ΑΔ έχει μήκος 3cm. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του.
10. Όταν βρισκόμαστε στην όχθη ενός ποταμού βλέπουμε στην απέναντι όχθη ένα δένδρο με γωνία ύψους 60^o. Αν όμως απομακρυνθούμε κατά 20 μέτρα, τότε βλέπουμε το δένδρο με γωνία ύψους 30^o. Να υπολογίσετε:
    i) Το ύψος του δένδρου.
    ii) Το πλάτος του ποταμού.

(Απ.: 10, $10\sqrt{3}$)

Ασκήσεις – Τριγωνομετρικές Ταυτότητες

1. Αν ημω = $-\frac{5}{13}$ και $180^o < ω < 270^o$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.
2. Αν γνωρίζετε ότι συνω = $-\frac{4}{5}$ και $90^o < ω < 180^o$, να υπολογίσετε τους άλλους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω.
3. Αν είναι εφω = $\frac{4}{3}$, $π < ω < \frac{3π}{2}$, να υπολογιστούν οι υπόλοιποι τριγωνομετρικοί αριθμοί.
4. Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία ω, για την οποία ισχύει ημω = 1 και συνω = 1.
5. i) Αν γνωρίζετε ότι εφθ = $-\sqrt{3}$ και $\frac{3π}{2} < θ < 2π$, να υπολογίσετε την παράσταση $Α = σφ^2θ + ημ^2θ + συνθ$.

   ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τόξο φ για το οποίο να ισχύει ημφ = Α.
6. i) Αν γνωρίζετε ότι σφθ = $\frac{\sqrt{3}}{3}$ και $π < θ < \frac{3π}{2}$, να υπολογίσετε την παράσταση $Α = σφ^2θ + ημ^2θ + συνθ + (εφθ\ σφθ)^{2001} + (συν^2θ + ημ^2θ)^{2004}$.

   ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει τόξο φ για το οποίο να ισχύει ημφ = Α.
7. Αν ισχύει $3ημ^2α = συν^2α$ και είναι $\frac{π}{2} < α < π$, να υπολογιστούν όλοι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί.
8. Αν γνωρίζετε ότι ισχύει ημx + $\sqrt{3}$συνx = 2, να υπολογίσετε τα ημx, συνx.
9. Αν γνωρίζετε ότι ισχύει 4εφω + 4σφω = 17, να υπολογίσετε τα εφω, σφω.
10. Ν.δ.ο. για τυχαία γωνία α ισχύει:

    i) $ημ^3α – συν^3α = (ημα – συνα)(1 + ημα\ συνα)$

    ii) $ημ^4α – συν^4α = (ημα – συνα)(ημα + συνα)$

    iii) $συν^4α + ημ^2α\ συν^2α + ημ^2α = 1$

    iv) $\frac{συν^2α}{1+ημα} = 1 – ημα$

    v) $\left(\frac{1}{συνα} - εφα\right)^2 = \frac{1-ημα}{1+ημα}$

    vi) $\frac{ημα}{1+συνα} + \frac{1+συνα}{ημα} = \frac{2}{ημα}$

Ασκήσεις – Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο

1. Να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 120^o, 135^o, 150^o, 210^o, 225^o, 240^o, 300^o, 315^o, 330^o, 750^o, 840^o, 960^o και των αντιθέτων τους.
2. Ν.δ.ο.:
   i) $ημ^2(45^o – ω) + ημ^2(45^o + ω) = 1$
   ii) $ημ^2(360^oκ + ω) + συν^2(360^oκ – ω) = 1, κ\in Z$
   iii) $εφ\left(\frac{π}{3} - x\right)εφ\left(\frac{π}{6} + x\right) = 1$
3. Αν $α + β = \frac{π}{2}$ ν.δ.ο.
   i) $ημ^2α + ημ^2β = 1$
   ii) $συν^2α + συν^2β = 1$
   iii) $εφα\ εφβ = 1$
   iv) $σφα\ σφβ = 1$
4. Αν Α, Β, Γ γωνίες τριγώνου ν.δ.ο.
   i) $ημΒ = ημ(Α + Γ)$
   ii) $ημ\frac{Γ}{2} = συν\frac{Α+Β}{2}$
   iii) $ημΑ = – ημ(2Α + Β + Γ)$
   iv) $εφ(3Α + 3Β) + εφ3Γ = 0$
5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$). Αν ισχύει $ημΒ\ συνΓ = \frac{1}{4}$, να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ. (Απ.: 60^o, 30^o)
6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$). Αν ισχύει $2ημβ\ συνΓ = 1$, ν.δ.ο. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.
7. Ν.δ.ο.:
   i) $εφ1^o\ εφ2^o\ εφ3^o \dots εφ87^o\ εφ88^o\ εφ89^o = 1$
   ii) $(ημ1^o – συν1^o) + (ημ2^o – συν2^o) + \dots + (ημ89^o – συν89^o) = 0$
8. Ν.δ.ο. $ημ^2α\ ημ^2\left(\frac{π}{2} - β\right) - συν^2\left(\frac{3π}{2} - β\right)συν^2(2π – α) = ημ^2α – ημ^2β$
9. Για ποιες τιμές των $x, y\in R$ η παράσταση:

   $$Α = x^2ημα – y^2ημ(5π + α) + 2xσυν\left(\frac{3π}{2} - α\right) + συν\left(\frac{13π}{2} - α\right) + 2004$$

   είναι ανεξάρτητη του α. (Απ.: x = 1, y =0)

Ασκήσεις – Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις

1. Ν.δ.ο.:
   i) Η f(x) = ημ2x + 5συν4x έχει περίοδο 3π.
   ii) Η f(x) = 4σφ3x + 5ημ4x έχει περίοδο 3π.
   iii) Η $f(x) = ημ(2x - \frac{π}{3})$ έχει περίοδο π.
   iv) Η f(x) = αημ(ωx + β) έχει περίοδο $\frac{2π}{ω}$, $α \neq 0$ και ω > 0.
   v) Η f(x) = αεφ(ωx + β) έχει περίοδο $\frac{π}{ω}$, $α \neq 0$ και ω > 0.
2. Αν η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο Τ ν.δ.ο.
   i) Η g με g(x) = f(x + α) έχει περίοδο Τ.
   ii) Η h με h(x) = f(αx), α > 0 έχει περίοδο $\frac{T}{α}$.
3. Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων:
   i) f(x) = 2ημx
   ii) f(x) = –2ημx
   iii) f(x) = ημ4x
   iv) $f(x) = 3ημ\frac{x}{2} - 1$
   v) $f(x) = συν(x + \frac{π}{4})$
   vi) f(x) = 2συν2x + 3
   vii) f(x) = 1 + εφ2x
4. Το διάγραμμα της f(x) = αημx + β περνάει από τα σημεία $Α\left(\frac{π}{2}, 2\right)$ και $Β\left(\frac{3π}{2}, 0\right)$.
   i) Να βρεθούν οι αριθμοί $α, β \in R$.
   ii) Να γίνει ο πίνακας μονοτονίας και να βρεθούν τα ακρότατα της f.
   iii) Να γίνει η γραφική παράσταση της f.
5. Η συνάρτηση $f(x) = αημ\frac{x}{2} + \frac{β}{4}$, $α, β \in R$, $x \in R$, έχει μέγιστο τον αριθμό 5 και η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο Α(π, 3). Να γίνει η γραφική παράσταση της f.

Ασκήσεις - Τριγωνομετρικές Εξισώσεις

1. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε τριγωνομετρική εξίσωση της στήλης Α τις κατάλληλες λύσεις από τη στήλη Β.

A	B
$\eta\mu x = -\frac{1}{2}$	$x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$, $\kappa \in Z$
$2\sigma\upsilon\nu x = \sqrt{3}$	$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in Z$
$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3}$	$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{6}$ ή $x = 2\kappa\pi + \frac{7\pi}{6}$, $\kappa \in Z$
$\sigma\varphi x = 0$	$x = \kappa\pi + \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in Z$
	$x = \kappa\pi - \frac{\pi}{3}$, $\kappa \in Z$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $-2\eta\mu 3x = \sqrt{3}$ ii) $\sigma\upsilon\nu\frac{x}{3} + 1 = 0$

iii) $\varepsilon\varphi(x - 20^o) = -\sqrt{3}$ iv) $\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi\frac{4x}{5} = 1$

v) $\eta\mu(x - 60^o) = \sigma\upsilon\nu(x + 20^o)$ vi) $\varepsilon\varphi(2x - \frac{\pi}{3}) = \sigma\varphi(x + \frac{\pi}{4})$

vii) $(\sqrt{2}\,\eta\mu x + 1)(\varepsilon\varphi^2 x - 1)(2\sigma\upsilon\nu x + \sqrt{3}) = 0$ viii) $4\sigma\upsilon\nu^3 x = 3\sigma\upsilon\nu x$

ix) $\eta\mu x\,\varepsilon\varphi x + 1 = \eta\mu x + \varepsilon\varphi x$ x) $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{\eta\mu x}$

xi) $\varepsilon\varphi(x - \frac{\pi}{4})\,\sigma\varphi(2x + \frac{\pi}{3}) = 1$ xii) $1 + \sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

xiii) $2\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ xiv) $\sigma\upsilon\nu(\eta\mu x) = 1$

xv) $\eta\mu^3 x + \sigma\upsilon\nu^3 x = \sigma\upsilon\nu x$ xvi) $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 2\varepsilon\varphi x = 4$

3. Να λυθούν στο $[0, 2\pi]$ οι εξισώσεις:

i) $2\eta\mu^2 x - 7\eta\mu x + 3 = 0$ ii) $\varepsilon\varphi x = \sigma\varphi x$

4. Ν.δ.ο. η εξίσωση $x^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$ έχει μια διπλή ρίζα. Να βρεθεί ο $\omega \in (0, 2\pi)$ ώστε η ρίζα αυτή να είναι $\rho = 1/2$.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3\varepsilon\varphi^2 x$ και $g(x) = 3 + 2\sqrt{3}\,\varepsilon\varphi x$. Να βρεθούν τα κοινά τους σημεία.