Ασκήσεις – Πράξεις Διανυσμάτων

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{x}, \vec{y}$ για τα οποία ισχύουν:

   $\vec{x} + \vec{y} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $4\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Ν.δ.ο. τα διανύσματα $\vec{x}, \vec{y}$ είναι ομόρροπα.

2. Αν ισχύει η ισότητα $\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{PA} = 3\overrightarrow{PM} + 2\overrightarrow{PB} - 4\overrightarrow{\Gamma M}$ ν.δ.ο τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ το μέσο της ΑΒ, Ε σημείο της ΒΓ ώστε να είναι $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{B\Gamma}$ και Ζ σημείο της ΑΓ τέτοιο ώστε $5\overrightarrow{AZ} = 3\overrightarrow{A\Gamma}$. Ν.δ.ο τα σημεία Δ,Ε,Ζ είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ρ του επιπέδου του τέτοια ώστε να είναι: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{B\Gamma}$.

   i) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{AP}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$.

   ii) Ν.δ.ο. τα σημεία Ρ, Δ, Ε είναι συνευθειακά.

   iii) Να προσδιορίσετε σημείο Μ του επιπέδου ώστε να ισχύει: $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{M\Gamma} = \vec{0}$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Ν.δ.ο. τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΚΛΜ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο.

6. Να βρείτε σημείο Ρ του επιπέδου ενός τριγώνου ΑΒΓ, ώστε να ισχύει: $2\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{P\Gamma} = \vec{0}$. (Απ. $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$)

7. Έστω Α, Β, Γ τρία σημεία του επιπέδου Οxy. Αν ισχύει $\overrightarrow{O\Gamma} = (1-x)\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{OB}$, $x \in R$, ν.δ.ο. τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

8. Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο και Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ. Ν.δ.ο. υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε: $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda)\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma}$.

9. Έστω Α και Β δύο σταθερά σημεία του επιπέδου. Να βρείτε σημεία Γ και Δ, ώστε να ισχύουν: $\overrightarrow{\Gamma A} + 2\overrightarrow{\Gamma B} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{\Delta A} - 2\overrightarrow{\Delta B} = \vec{0}$. Στη συνέχεια για ένα τυχαίο σημείο Μ ν.δ.ο. ισχύουν οι σχέσεις:

   i) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{M\Gamma}$ ii) $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{\Delta M}$

10. Δίνεται ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε και Ζ τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{A\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ} = 3\overrightarrow{AB}$. Ν.δ.ο. τα σημεία Ε, Γ, Ζ είναι συνευθειακά.

Ασκήσεις – Συντεταγμένες στο Επίπεδο

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, -3)$, $\vec{\beta} = (-1, 2)$, $\vec{\gamma} = (-1, 1)$. Να γράψετε το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

(Απ: $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$)

2. Δίνονται τα σημεία Α(3, 1), Β(4, 2), Γ(2, 0).

i) Ν.δ.ο. τα Α, Β, Γ είναι συνευθειακά ii) Να βρείτε τους λ, $\mu \in R$ ώστε να ισχύουν $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{AB} = \mu\overrightarrow{A\Gamma}$

(Απ: $\lambda = -1/2$, $\mu = -1$).

3. Δίνονται τα σημεία Α(1, 1), Β(–3, 3) και Γ(3, 1).

i) Ν.δ.ο. τα Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

ii) Να βρείτε την απόσταση του κέντρου βάρους του τριγώνου από την κορυφή Α.

(Απ: (GA) = $2\sqrt{2}/3$)

4. Δίνονται τα σημεία Α(1, 3) και Β(3, 1). Να βρείτε:

i) το μέτρο του ΑΒ και τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΒ.

ii) το διάνυσμα θέσης του συμμετρικού του Α ως προς το Β.

iii) το διάνυσμα θέσης του σημείου Ρ που χωρίζει το ΑΒ σε λόγο $2/3$.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (-2, 1)$. Τα διανύσματα θέσης των σημείων Α, Β, Γ ως προς την αρχή Ο των αξόνων είναι αντίστοιχα:

$$\vec{u} = (\mu + 1)\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \qquad \vec{v} = 2\mu\vec{\alpha} + (3\mu - 1)\vec{\beta}, \qquad \vec{w} = -\vec{\alpha} - 5\vec{\beta}$$

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

ii) Αν τα Α,Β, Γ είναι συνευθειακά να βρείτε τον $\mu \in R$.

6. Δίνονται τα σημεία Α(–1, 2) και Β(–3, 0). Να βρείτε:

i) σημείο Γ του x΄x ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ισοσκελές με βάση την ΑΒ.

ii) Τα μήκη των διαμέσων του τριγώνου που φέρονται προς τις ίσες πλευρές, καθώς και τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους.

(Απ: i) Γ(–1, 0) ii) (ΑΔ) = (ΒΕ) = $\sqrt{5}$ και $G\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$)

7. Ν.δ.ο. το τρίγωνο που έχει κορυφές τα σημεία Α(3, 1), Β(0, 2) και Γ(1, 0) είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Ασκήσεις – Συντεταγμένες στο Επίπεδο

1. Δίνονται τα σημεία Α(-3, 4) και Β(3, 0). Να βρείτε:
   i) Τις συντεταγμένες του σημείου Μ της ευθείας ΑΒ για το οποίο ισχύει (ΒΜ)=2(ΜΑ)
   ii) Τις συντεταγμένες του συμμετρικού του Μ ως προς Α.

   (Απ: $M\left(-1,\frac{8}{3}\right)$, $P\left(-5,\frac{16}{3}\right)$)

2. Έστω ΑΒΓ ένα τρίγωνο με $\overrightarrow{AB}=(2,\ -2\sqrt{7})$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(1,1)$. Αν ΑΔ είναι η εσωτερική διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u}=(3,\ -1)$ και $\vec{v}=(0,\ 1)$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{\alpha}=(x,\ y)$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\vec{\alpha}=\vec{u}+|\vec{\alpha}|\vec{v}$. (Απ: $\vec{\alpha}=(3,\ 4)$)

4. Το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει το ίδιο μήκος με το $\vec{\beta}=(4,\ -3)$ και τη διεύθυνση του $\vec{\gamma}=(1,\sqrt{3})$. Να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Μ της ΒΓ ώστε να είναι $\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{M\Gamma}$.
   i) Ν.δ.ο. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$
   ii) Αν Α(1, 2), Β(–2, –4) και Γ(7, 11) να βρείτε τις συντεταγμένες του Μ και έπειτα το μήκος (ΑΜ)

   (Απ: Μ(4, 6) και (ΑΜ) = 5)

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(–1, 4), Β(5, 2) και βαρύκεντρο G(0, –3). Να βρείτε
   i) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.
   ii) Το μήκος της διαμέσου ΔΓ.

   (Απ: i) Γ(–4, –15) ii) (ΔΓ) = $6\sqrt{10}$)

7. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με: Α(–2, 2), Β(1, 3) και Δ(–4, –3). Αν Κ, Λ είναι συμμετρικά του Α ως προς Β και Δ αντίστοιχα, ν.δ.ο. τα σημεία Κ, Γ, Λ είναι συνευθειακά.

8. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΔ. Αν Μ είναι το μέσο του ΑΔ και Ρ σημείο της ΑΒ ώστε να ισχύει $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, ν.δ.ο. τα σημεία Γ, Μ, Ρ είναι συνευθειακά.

Ασκήσεις – Εσωτερικό Γινόμενο

1. Α. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να αποδείξετε τις ισοδυναμίες

   i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

   ii) $||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}||=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

   Β. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ ισχύουν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=\frac{|\vec{\beta}|}{3}=\frac{|\vec{\gamma}|}{5}$

   ν.δ.ο. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{\alpha}|}{2}=|\vec{\beta}|=\frac{|\vec{\gamma}|}{4}$. Ν.δ.ο. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\alpha}+2\vec{\beta}=0$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύουν:

   $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}\vec{\gamma}=2$. Ν.δ.ο. $\vec{\alpha}=\vec{\beta}=\vec{\gamma}$.

4. i) Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ν.δ.ο. $|\vec{\alpha}\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}||\vec{\beta}|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

   ii) Δίνεται η παράσταση $A = 6x - 8y$ με $x^2 + y^2 = 25$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της παράστασης Α.

5. Αν για κάθε $\lambda\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\lambda\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και $|\vec{\alpha}|=1$, ν.δ.ο. i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ii) $|\vec{\beta}|=1$ iii) $|3\vec{\alpha}+4\vec{\beta}|=5$

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(1, 1), Β(3, λ + 2) και Γ(λ^2 – 2, 3).

   i) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in R$ για τις οποίες το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

   ii) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (i) ν.δ.ο το τρίγωνο ΑΒΓ είναι και ισοσκελές.

7. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και έχουν ίσα μέτρα, ν.δ.ο. τα διανύσματα $\vec{u}=2\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι κάθετα και έχουν ίσα μέτρα.

8. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ με $\vec{y}\neq\vec{0}$ για τα οποία ισχύουν: $\vec{\alpha}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}$

   και $\vec{\beta}=\frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{|\vec{y}|^2}\vec{y}-x$. Ν.δ.ο.

   i) $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$ ii) Αν $\vec{x}\parallel\vec{y}$ τότε $\vec{\beta}=\vec{0}$.

Ασκήσεις – Εσωτερικό Γινόμενο

1. Αν $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 3$, $|\vec{\gamma}| = 2$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} - 2\vec{\gamma} = \vec{0}$. Ν.δ.ο.:

   i) $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} - \vec{\beta}\,\vec{\gamma} + \vec{\gamma}\,\vec{\alpha} = -1$

   ii) $\vec{\beta} = 3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha}$.

2. Δίνονται τα σημεία Α(4, 2) και Β(3, –5). Να βρείτε σημείο Μ της ευθείας ε: 7x + y –23 = 0 ώστε το τρίγωνο ΑΜΒ να είναι ορθογώνιο στο Μ.

3. Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 3\vec{\beta}^{\,2}$.

   i) Ν.δ.ο. $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha} = 3\vec{\beta}$.

   ii) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x για τον οποίο να ισχύει $\text{προβ}_{\vec{\beta}}(x\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = (x - 1)\vec{\beta}$.

   (Απ.: x = –1)

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-2, 1)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

   (Απ.: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$)

5. Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

   i) Ν.δ.ο. $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{|\vec{\alpha}|^2}\vec{\alpha}$

   ii) Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{3}$ να δειχθεί ότι $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \text{προβ}_{\vec{\beta}}(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \dfrac{5}{4}\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 3\vec{i} - \vec{j}$ και $\vec{\gamma} = \vec{i} + 3\vec{j}$.

   i) Να βρείτε την προβολή του $\vec{\beta}$ πάνω στο $\vec{\alpha}$.

   ii) Να αναλυθεί το $\vec{\gamma}$ σε δύο μη μηδενικές κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$.

   (Απ.: i) $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = (1, -2)$ ii) $\vec{v} = (-1, 2)$ και $\vec{w} = (2, 1)$)

7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1, 2)$, $\vec{\beta} = (4, -1)$ και $\vec{u} = (-2, 6)$. Να αναλυθεί το $\vec{u}$ σε δύο συνιστώσες, μια παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και μια κάθετη στο $\vec{\beta}$.

   (Απ.: $\vec{v} = (-7, -14)$ και $\vec{w} = (5, 20)$)

Ασκήσεις – Εσωτερικό Γινόμενο

1. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 2$, $\vec{\alpha}\,\vec{\beta} = 6$ και $\text{προβ}_{(2\vec{\alpha}+\vec{\beta})}(4\vec{\alpha} - 2x\vec{\beta}) = \vec{0}$ να βρεθεί ο $x \in R$.

2. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και ότι η γωνία που σχηματίζουν ισούται με $\pi/3$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{x}$ του επιπέδου των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ώστε να ισχύει $\vec{x}\vec{\alpha} = 3$ και $\vec{x}\vec{\beta} = 2$.