# Ασκήσεις – Παραβολή

1. Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα των παραβολών:

   i) $y^2 = -4x$ ii) $y^2 = 8x$ iii) $x^2 = 12y$

   (Απ.: i) E(-1, 0), x = 1 ii) E(2, 0), x = -2 iii) E(0, 3), y = -3)

2. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής που έχει την κορυφή της στην αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον x΄x:

   i) έχει εστία E(2, 0) (Απ.: $y^2 = 8x$)

   ii) έχει διευθετούσα την ευθεία x = 5 (Απ.: $y^2 = -20x$)

   iii) διέρχεται από το σημείο M(1, 2) (Απ.: $y^2 = 4x$)

3. Να βρεθεί η θέση του σημείου A(1, 2) ως προς την παραβολή

   i) $x^2 = 4y$ ii) $y^2 = -2x$

4. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 2px$, $p > 0$. Ν.δ.ο.

   i) Η απόσταση ενός τυχαίου σημείου της $M(x_o, y_o)$ από την εστία Ε είναι ίση με $\left|x_o + \frac{p}{2}\right|$.

   ii) Η κορυφή της είναι το πλησιέστερο στην εστία σημείο της παραβολής.

5. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 16x$. Να βρεθούν τα σημεία της, των οποίων η απόσταση από την εστία είναι ίση με 8. (Απ.: M(4, -8), M(4, 8))

6. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 2x$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης:

   i) που διέρχεται από το σημείο A(8, 4) (Απ.: $x – 4y + 8 = 0$)

   ii) που διέρχεται από το σημείο B(-4, -1) (Απ.: $x – 2y + 2 = 0$, $x + 4y + 8 = 0$)

   iii) που είναι παράλληλη στην $x + y – 2 = 0$ (Απ.: $x + y + 1/2 = 0$)

   iv) που είναι κάθετη στην $x – y + 3 = 0$ (Απ.: $x + y + 1/2 = 0$)

7. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και το σημείο A(3, 1). Να βρεθεί η χορδή της παραβολής που έχει μέσο το Α. (Απ.: $y = 2x – 5$)

8. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$ και ΑΕΒ τυχαία εστιακή χορδή με $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$.

   i) Να υπολογισθούν τα $x_1x_2$, $x_1 + x_2$, $y_1y_2$, $y_1 + y_2$.

   ii) Ν.δ.ο. οι εφαπτομένες στα Α και Β τέμνονται κάθετα.

   iii) Ν.δ.ο. οι εφαπτομένες στα Α και Β τέμνονται πάνω στη διευθετούσα.

# Ασκήσεις – Παραβολή

1. Αν η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο Τ αυτής τέμνει τον x΄x στο Α ν.δ.ο. ο y΄y διχοτομεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΤ.
2. Έστω Μ(ζ, ω) τυχαίο σημείο της $y^2 = 2px$. Αν Α είναι το σημείο τομής της εφαπτομένης της παραβολής στο Μ με τον Oy ν.δ.ο. $AM \perp AE$, (Ε εστία).
3. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 2px$, $p > 0$ και το σημείο της $M(x_o, y_o)$ με $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$. Έστω (ε) η εφαπτομένη στο Μ. Από την κορυφή Ο φέρνουμε κάθετη στην (ε) που τέμνει την (ε) στο Α και την (c) στο Β. Ν.δ.ο. $|OA||OB| = p^2$.
4. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$. Ν.δ.ο. ο κύκλος με διάμετρο την ΕΑ (Ε εστία) εφάπτεται του y΄y.
5. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$ και το σημείο $M(\alpha, 0)$, $\alpha > 0$. Ευθεία (ε) διερχόμενη από το Μ τέμνει τη (c) στα Α, Β. Αν Ρ και Σ οι προβολές των Α, Β στον y΄y αντίστοιχα ν.δ.ο. $|AP||B\Sigma| = |OM|^2$.
6. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$ και το σημείο $A(t^2, 2t)$, $t \in R^*$. Έστω Β η προβολή του Α στον y΄y και Μ η προβολή του Β στην ευθεία ΟΑ.
   i) Ν.δ.ο. η ευθεία ΜΒ τέμνει τον x΄x σε σταθερό σημείο. (Απ.: Γ(4, 0))
   ii) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ. (Απ.: $x^2 + y^2 - 4x = 0$)
7. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$ και το σημείο της $A(t^2, 2t)$, $t \in R^*$.
   i) Να βρεθεί η εξίσωση της διευθετούσας της παραβολής.
   ii) Έστω Ε η εστία της παραβολής και Β η προβολή του Α στη διευθετούσα.
      α) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Β.
      β) Αν το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισόπλευρο, να βρεθούν οι συντεταγμένες του Α.
8. Δίνεται η παραβολή c: $y^2 = 4x$ και τα σημεία της $M(t_1^2, 2t_1)$, $P(t_2^2, 2t_2)$ με $t_1 \neq t_2$ και $t_1 \cdot t_2 \neq 0$. Η εφαπτομένη της (c) στο Μ τέμνει τον y΄y στο Α και η εφαπρομένη της (c) στο Ρ τέμνει τον y΄y στο Β. Αν Σ το μέσο του ΑΒ ν.δ.ο. $\overrightarrow{E\Sigma} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$.

# Ασκήσεις – Έλλειψη

1. Να βρεθούν τα μήκη των αξόνων, οι εστίες και η εκκεντρότητα των ελλείψεων:
   i) $16x^2 + 25y^2 = 400$ (Απ.: 10, 8, Ε΄(-3, 0), Ε(3, 0), ε = 3/5)
   ii) $x^2 + 4y^2 = 4$ (Απ.: 4, 2, Ε΄($-\sqrt{3}$, 0), Ε($\sqrt{3}$, 0), ε = $\sqrt{3}/2$)
   iii) $25x^2 + 9y^2 = 225$ (Απ.: 10, 6, Ε΄(0, -4), Ε(0, 4), ε = 4/5)

2. Να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει:
   i) Ε΄(-2, 0), Ε(2, 0), μεγάλο άξονα (Απ.: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12} = 1$)
   ii) Ε΄(0, -1), Ε(0, 1), εκκεντρότητα 2/3 (Απ.: $36x^2 + 20y^2 = 45$)
   iii) Α΄(-5, 0), Α(5, 0), μικρό άξονα 6 (Απ.: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$)
   iv) μεγάλο άξονα 8, εκκεντρότητα 3/4 (Απ.: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{7} = 1$)
   v) μικρό άξονα 6, εστιακή απόσταση 8 (Απ.: $36x^2 + 20y^2 = 45$)
   vi) διέρχεται από τα σημεία (6, 4), (8, 3) (Απ.: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25} = 1$)
   vii) διέρχεται από το σημείο (6, 4) και α = 2β (Απ.: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25} = 1$)
   viii) διέρχεται από το σημείο Μ(4, 9/5) και έχει (Ε΄Ε) = 8 (Απ.: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9} = 1$)

3. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης της οποίας:
   i) ο μικρός άξονας φαίνεται από κάθε εστία υπό γωνία $60^o$ (Απ.: ε = $\sqrt{3}/2$)
   ii) μια κορυφή του μικρού άξονα βλέπει υπό ορθή γωνία το τμήμα Ε΄Ε (Ε, Ε΄ οι εστίες της έλλειψης) (Απ.: ε = $\sqrt{2}/2$)

4. Ν.δ.ο. οι ελλείψεις με εξισώσεις $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και $\frac{x^2}{\alpha^2+2004}+\frac{y^2}{\beta^2+2004} = 1$ έχουν τις ίδιες εστίες.

5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} = 1$ και το σημείο Ρ(1, 1). Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής $M_1M_2$ της έλλειψης της οποίας το Ρ είναι μέσο. (Απ.: ε: 9x + 4y – 13 = 0)

6. Αν οι ελλείψεις $c_1$: $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $c_2$: $\frac{x^2}{\beta^2}+\frac{y^2}{\alpha^2} = 1$ με α > β τέμνονται σε τέσσερα διαφορετικά σημεία, ν.δ.ο. τα σημεία αυτά είναι ομοκυκλικά.

# Ασκήσεις – Έλλειψη

1. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της c: $4x^2 + 9y^2 = 36$ που διέρχονται:

   i) από το σημείο $K\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ (Απ.: ε: $6\sqrt{2}\,x + \sqrt{2}\,y = 36$)

   ii) από το σημείο Λ(0, 4) (Απ.: ε: $\pm 6\sqrt{3}\,x + 9y = 36$)

   iii) από το σημείο Μ(3, 5) (Απ.: ε: $x = 3$, $-7x + 10y = 29$)

2. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της c: $3x^2 + 4y^2 = 12$ που είναι:

   i) παράλληλες στην ε: $x + y - 1 = 0$ (Απ.: $x + y \pm \sqrt{7} = 0$)

   ii) κάθετες στη δ: $y = 2x$ (Απ.: $x + 2y \pm 4 = 0$)

3. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$ και το σημείο της $M(x_o, y_o)$ με $x_o \neq 0$. Η εφαπτομένη της c στο Μ τέμνει τον x΄x στο Ρ. Αν Σ η προβολή του Μ στον x΄x ν.δ.ο. $(OP)(O\Sigma) = \alpha^2$.

4. Αν $M(x_o, y_o)$ τυχαίο σημείο της έλλειψης c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$ με εστίες Ε, Ε΄ και κέντρο Ο(0, 0). Ν.δ.ο. $(ME)(ME') + (OM)^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

5. Δίνεται η έλλειψη c: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$ και το σημείο της $M(x_o, y_o)$. Η εφαπτομένη της c στο Μ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y στα Ν και Ρ αντίστοιχα. Ν.δ.ο. $\frac{\alpha^2}{(ON)^2} + \frac{\beta^2}{(OP)^2} = 1$.

6. Η εφαπτομένη της έλλειψης σε τυχαίο σημείο της Ρ τέμνει τον x΄x στο σημείο Τ και οι ευθείες ΡΑ, ΡΑ΄ τέμνουν τη κάθετη που φέρνουμε από το Τ στον x΄x στα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα. Ν.δ.ο. Τ μέσο του ΜΝ.

7. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(2\eta\mu\theta, 3\sigma\upsilon\nu\theta)$, $\theta \in R$.

8. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων (x, y) όπου $x = \beta\frac{2t}{1+t^2}$, $y = \alpha\frac{1-t^2}{1+t^2}$ με $\alpha, \beta > 0$ και $t \in R$.

9. Δίνεται η έλλειψη c: $4x^2 + 9y^2 = 36$ και το σημείο της $P(3\sigma\upsilon\nu\theta, 2\eta\mu\theta)$. Αν Ν είναι η προβολή του Ρ στον άξονα x΄x, παίρνουμε $\overrightarrow{PM} = -\overrightarrow{PN}$. Ν.δ.ο. το Μ κινείται σε έλλειψη για κάθε $\theta \in R$. (Απ. $16x^2 + 9y^2 = 144$)

# Ασκήσεις – Υπερβολή

1. Να βρεθούν οι εστίες και η εκκεντρότητα των υπερβολών:

   i) $16x^2 - 9y^2 = 144$ (Απ.: Ε΄(-5, 0), Ε(5, 0), ε = 5/3)

   ii) $16y^2 - x^2 = 16$ (Απ.: Ε΄(0, $-\sqrt{17}$), Ε(0, $\sqrt{17}$), ε = $\sqrt{17}$)

2. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει:

   i) κορυφές Α΄(-3, 0), Α(3, 0) και εστιακή απόσταση 10 (Απ.: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$)

   ii) Ε΄(-10, 0), Ε(10, 0), (ΑΑ΄) = 16 (Απ.: $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$)

   iii) Ε΄(-5, 0), Ε(5, 0), ε = 5/3 (Απ.: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$)

   iv) ασύμπτωτες $y=\frac{1}{2}x$, $y=-\frac{1}{2}x$ και περνά από το Μ(10, -4) (Απ.: $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$)

3. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που διέρχεται από τα σημεία Κ(3, 1) και Λ(9, 5). (Απ.: $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{2} = 1$)

4. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα 2 και τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. (Απ.: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$)

5. Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει κορυφές τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ και εστίες τις κορυφές της έλλειψης. (Απ.: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$)

6. Να βρεθεί η εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. (Απ.: $x^2 - y^2 = \frac{9}{2}$)

7. Δίνεται η εξίσωση $\frac{x^2}{1+\lambda} + \frac{y^2}{4+\lambda} = 1$. Να βρεθεί για ποιες τιμές του λ η εξίσωση παριστάνει υπερβολή. Για τις τιμές αυτές να βρεθεί ο άξονας της υπερβολής και οι εστίες της.

# Ασκήσεις – Υπερβολή

1. Ν.δ.ο. η ευθεία $x - y - 2 = 0$ τέμνει την υπερβολή $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου της χορδής που ορίζεται από τα σημεία τομής της ευθείας με την υπερβολή. (Απ.: M(4, 2))

2. Δίνεται η υπερβολή $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$ και το σημείο M(2, -3). Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής που έχει μέσο το M. (Απ.: ε: $8x + 3y - 7 = 0$)

3. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της c: $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ που:

   i) διέρχονται από το $K(2\sqrt{2}, 1)$ (Απ.: $\sqrt{2}x - 2y - 2 = 0$)

   ii) είναι παράλληλες στη $\sqrt{2}x - 2y + 1 = 0$ (Απ.: $\sqrt{2}x - 2y \pm 2 = 0$)

   iii) διέρχονται από το M(1, 1/2) (Απ.: $5x + 6y - 8 = 0$)

   iv) διέρχονται από το N(-2, 1) (Απ.: $x = -2$)

4. Να βρεθεί η εκκεντρότητα της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$, αν η οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ασύμπτωτες είναι $60^o$. (Απ.: $\varepsilon = 2$)

5. Αν η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 2$ να βρεθεί η οξεία γωνία των ασύμπτωτών της. (Απ.: $\hat{\varphi} = 60^o$)

6. Ν.δ.ο. η απόσταση κάθε εστίας της $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτές της είναι ίση με β.

7. Ν.δ.ο. το γινόμενο των αποστάσεων κάθε σημείου της $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από τις ασύμπτωτες είναι σταθερό. (Απ.: $d_1 d_2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2}$)

8. Ν.δ.ο. το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ από οποιαδήποτε εφαπτομένη της είναι σταθερό. (Απ.: $d_1 d_2 = \beta^2$)

9. Δίνεται η υπερβολή c: $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$. Ευθεία διερχόμενη από το σημείο O(0, 0) τέμνει την (c) στα M και N. Ν.δ.ο. οι εφαπτομένες στα M και N είναι παράλληλες