Ασκήσεις – Κύκλος

1. Να βρείτε αν οι παρακάτω εξισώσεις παριστάνουν κύκλο. Έπειτα να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα τους.

   i) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ (Απ.: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$)

   ii) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$ (Απ.: σημείο $K(1, -2)$)

   iii) $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 25 = 0$ (Απ.: όχι)

   iv) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 4y - 83 = 0$ (Απ.: $(x + 2)^2 + (y - 1/2)^2 = 25$)

   v) $(2x - 1)^2 + (2y + 3)^2 = 8$ (Απ.: $(x - 1/2)^2 + (y + 3/2)^2 = 2$)

   vi) $(x + \lambda)^2 + (y - \lambda)^2 = 2\lambda x + 2\lambda^2, \lambda \neq 0$ (Απ.: $x^2 + (y - \lambda)^2 = \lambda^2$)

   vii) $x^2 + y^2 - 2x + 2\lambda y = -\lambda^2, \lambda \neq 0$ (Απ.: $(x - 1)^2 + (y + \lambda)^2 = 1$)

2. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος:

   i) έχει κέντρο το σημείο $O(0, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(3, 4)$

   ii) έχει κέντρο το σημείο $K(-1 , 3)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 7)$

   iii) έχει κέντρο το σημείο $K(0, 2)$ και διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$

   iv) έχει κέντρο το σημείο $K(1, 0)$ και εφάπτεται της ε: $x + y - 3 = 0$

   v) έχει διάμετρο ΑΒ όπου $A(1, 2)$, $B(3, 6)$

   vi) έχει κέντρο στον άξονα x΄x και διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $\Gamma(2,2)$

   vii) έχει το κέντρο του πάνω στην ε: $y = x$ και διέρχεται από τα σημεία $A(1, 3)$ και $B(5, 1)$

   viii) είναι ομόκεντρος με τον κύκλο c: $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ και διέρχεται από το σημείο $A(4, 2)$

   ix) διέρχεται από τα σημεία $A(5, 3)$, $B(6, 2)$, $\Gamma(3, -1)$

   x) έχει ακτίνα 10 και εφάπτεται της ε: $3x - 4y - 13 = 0$ στο σημείο $A(7, 2)$

   xi) εφάπτεται της ευθείας ε: $x + 2y - 6 = 0$ στο σημείο $A(4, 1)$ και διέρχεται από το σημείο $B(6, -5)$

   xii) εφάπτεται στον άξονα y΄y, το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία $y = -2x$ και απέχει (το κέντρο του) από τον άξονα x΄x απόσταση $d = 4$

   xiii) έχει κέντρο $K(1, -2)$ και εφάπτεται εξωτερικά του c: $(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 9$

   xiv) έχει κέντρο $K(2, -2)$ και αποκόπτει από την ε: $3x - 4y + 6 = 0$ χορδή μήκους 12

   xv) περνάει από το σημείο $A(2, 7)$ και εφάπτεται του κύκλου c: $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ στο σημείο $B(0, 5)$

xvi) διέρχεται από τα σημεία Α(4, 1) και Β(2, –3) και έχει το κέντρο του στην ευθεία ε: $x + y + 1 = 0$

xvii) έχει ακτίνα 4, εφάπτεται στον x΄x και διέρχεται από το σημείο Α(5, 4)

xviii) είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο που σχηματίζει η ε: $x + y – 6 = 0$ με τους άξονες x΄x και y΄y

(Απ.: i) $x^2 + y^2 = 25$ ii) $(x + 1)^2 + (y – 3)^2 = 25$ iii) $x^2 + (y – 1)^2 = 2$ iv) $(x – 1)^2 + y^2 = 2$ v) $(x – 2)^2 + (y – 4)^2 = 5$ vi) $(x – 2)^2 + y^2 = 4$ vii) $(x – 4)^2 + (y – 4)^2 = 10$ viii) $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ ix) $(x – 4)^2 + (y – 1)^2 = 5$ x) $(x – 1)^2 + (y – 10)^2 = 100$ xi) $(x – 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$ xii) $(x + 2)^2 + (y – 4)^2 = 4$ xiii) $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ xiv) $(x – 2)^2 + (y + 2)^2 = 52$ xv) $(x + 1)^2 + (y – 8)^2 = 10$ xvi) $(x + 3)^2 + (y – 2)^2 = 50$)

3. Ν.δ.ο. η ευθεία $x\eta\mu\varphi + y\sigma\upsilon\nu\varphi – 3\eta\mu\varphi – 2\sigma\upsilon\nu\varphi + 3 = 0$ εφάπτεται του κύκλου $x^2 + y^2 – 6x – 4y + 4 = 0$.

4. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 – 2x = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία $y = \lambda x + 2$ να εφάπτεται του κύκλου. (Απ.: $\lambda = –3/4$)

5. Δίνεται ο κύκλος c: $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και τα σημεία Α(ασυνθ, αημθ), Β(–αημθ, ασυνθ) με $\theta \in (0, \pi)$. Ν.δ.ο.

   i) τα σημεία Α, Β είναι σημεία του κύκλου

   ii) οι εφαπτόμενες του κύκλου στα Α, Β είναι κάθετες

6. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου

   i) $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο Α(4, 3) (Απ.: $4x + 3y = 25$)

   ii) $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 13$ στο σημείο Β(1, 3) (Απ.: $3x + 2y – 9 = 0$)

   iii) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$ στο σημείο Γ(1, –1) (Απ.: $2x + y – 3 = 0$)

   iv) $x^2 + y^2 = 1$ στο σημείο Δ(1, 0) (Απ.: $x = 1$)

   v) $(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = 1$ στο σημείο Ε(2, 0) (Απ.: $y = 0$)

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$

   i) που διέρχεται από το σημείο Α(3, 4) (Απ. $3x + 4y = 25$)

   ii) που διέρχεται από το σημείο Β(5, 10) (Απ.: $x = 5$, $–3x + 4y = 25$)

   iii) που είναι παράλληλη στην ε: $x + 2y + 3 = 0$ (Απ.: $x + 2y \pm 5\sqrt{5} = 0$)

   iv) που είναι κάθετη στην ε: $3x + 4y = 0$ (Απ.: $4x – 3y \pm 25 = 0$)

8. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 – 4x + 1 = 0$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του, που περνούν από την αρχή των αξόνων. (Απ.: $y = \pm\sqrt{3}\,x$)

Ασκήσεις – Κύκλος και Παραμετρική Εξίσωση

1. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο Μ(4, 2). Να βρεθούν:
   i) η θέση του σημείου ως προς τον κύκλο
   ii) οι εξισώσεις των εφαπτομένων από το σημείο Μ προς τον κύκλο
   iii) η γωνία των εφαπτομένων (Απ.: ii) $3x – y = 10$, $x + 3y = 10$)
2. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 2$ και το σημείο Ρ(4, 6).
   i) από το Ρ φέρνουμε εφαπτόμενες ΡΑ και ΡΒ στον κύκλο. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ΑΒ.
   ii) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες ισοσκελές τρίγωνο με κορυφή το Ο(0, 0).

   (Απ.: i) $2x + 3y = 1$ ii) $x + y = 2$)
3. Ν.δ.ο. για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$ τα σημεία Μ(ημφ, συνφ) ανήκουν σε κύκλο.
4. Ν.δ.ο. για κάθε $\varphi \in R$ τα σημεία Μ(2 + 3συνφ, 3ημφ – 4) βρίσκονται πάνω σε κύκλο και να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα του.
5. Ν.δ.ο. το σύνολο των σημείων Μ(x, y) του επιπέδου που ικανοποιούν τις εξισώσεις xσυνθ – yημθ = συν2θ και xημθ + yσυνθ = ημ2θ, $\theta \in R$, βρίσκονται σε κύκλο.
6. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x – 2\lambda y = 0$, $\lambda \in R$.
   i) Ν.δ.ο. για κάθε $\lambda \in R$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο
   ii) Ν.δ.ο. το κέντρο του κύκλου βρίσκεται πάνω σε σταθερή ευθεία
   iii) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος έχει ακτίνα $\rho = \sqrt{20}$;
   iv) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος διέρχεται από το σημείο Α(–λ, 1);
   v) Για ποια τιμή του λ ο κύκλος εφάπτεται του άξονα y΄y;
   vi) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων
   vii) Ν.δ.ο. όλοι οι κύκλοι διέρχονται από δύο σταθερά σημεία
7. Δίνεται η εξίσωση $x(x – 1) + y(y – 1) = \lambda(x + y – 1)$, $\lambda \in R$.
   i) Ν.δ.ο. η εξίσωση παριστάνει κύκλο ο οποίος διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β(0, 1).
   ii) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει το κέντρο του στην ευθεία $x + 2y – 6 = 0$.
   iii) Για ποια τιμή του λ οι κύκλοι εφάπτονται στον άξονα x΄x.

   (Απ.: ii) $x^2 + y^2 – 4x – 4y + 3 = 0$ iii) $\lambda = 1$)

Ασκήσεις – Κύκλος και Παραμετρική Εξίσωση

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 4\lambda x - 2(\lambda - 2)y + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, $\lambda \in R^*$.
   i) Ν.δ.ο. η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
   ii) Ν.δ.ο. τα κέντρα των κύκλων κινούνται σε ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση.
   iii) Ν.δ.ο. οι κύκλοι εφάπτονται στις ευθείες ε_1: $4x + 3y + 6 = 0$ και ε_2: $y = -2$.

   (Απ.: i) $K(-2\lambda, \lambda - 2)$, $\rho = |\lambda|$ ii) $x + 2y + 4 = 0$)

2. Δίνεται η ευθεία $5x + 3y + 2 = 0$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$ που τέμνονται στα σημεία Μ και Ρ. Ν.δ.ο.
   i) Η εξίσωση $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda(5x + 3y + 2) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in R$, που διέρχεται από τα σημεία Μ και Ρ.
   ii) Τα κέντρα των κύκλων ανήκουν σε ευθεία της οποίας να βρεθεί η εξίσωση

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ (1).
   i) Ν.δ.ο. η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
   ii) Να βρεθεί ο $\lambda \in R$ ώστε η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $A(3, 2\lambda)$ και $B(-1, -\lambda)$ να διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.

   (Απ.: i) $K(1, 2)$, $\rho = 3$ ii) $\lambda = 4$)

4. Δίνονται τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(5, 3)$.
   i) Να προσδιορίσετε σημείο Μ του άξονα x΄x ώστε $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.
   ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΜΑΒ στο σημείο Α. (Απ.: i) $M(2,0)$ ή $M(6,0)$ ii) $x + 2y - 1 = 0$)

5. Δίνεται η εξίσωση $(x - \kappa)^2 + (y - \kappa - 1)^2 = -\kappa^2 + 3\kappa - 2$ (1).
   i) Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η (1) παριστάνει κύκλο.
   ii) Για τις τιμές του κ που βρήκατε ν.δ.ο. τα κέντρα των κύκλων αυτών βρίσκονται σε σταθερή ευθεία.

   (Απ.: i) $1 < \kappa < 2$ ii) $2x - 2y + 1 = 0$, $1/2 < x < 1$)

6. Δίνεται η εξίσωση ε_κ: $\kappa x + \sqrt{25 - \kappa^2}\, y = 25$
   i) Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η εξίσωση παριστάνει ευθεία.
   ii) Αν $\kappa \in [-5, 5]$ ν.δ.ο. υπάρχει κύκλος κέντρου $0(0, 0)$ στον οποίο εφάπτεται η ευθεία ε_κ. (Απ.: i) $\kappa \in [-5, 5]$ ii) $x^2 + y^2 = 25$)

Ασκήσεις – Κύκλος

1. Δίνονται οι κύκλοι c_1: $x^2 + y^2 = 1$ και c_2: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 3 = 0$.
   i) Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής τους Α και Β.
   ii) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (ε) η οποία ορίζεται από τα κέντρα των δύο κύκλων.
   iii) Ν.δ.ο. $AB \perp \varepsilon$. (Απ.: i) Α(0, 1), Β(–4/5, 3/5) ii) $y = -2x$)
2. Ν.δ.ο. οι κύκλοι $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 9 = 0$ εφάπτονται.
3. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των κύκλων $x^2 + y^2 = 4$ και $(x - 4)^2 + y^2 = 4$.
   (Απ.: $x = 2$, $y = -2$, $y = 2$)
4. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ και ΑΒ μια χορδή του κύκλου. Αν το σημείο Μ(α,β) είναι το μέσο της χορδής ΑΒ ν.δ.ο. η εξίσωση της ΑΒ είναι $\alpha x + \beta y = \alpha^2 + \beta^2$.
5. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = \rho^2$ και το $M(x_o, y_o)$ εξωτερικό σημείο του κύκλου. Αν ΜΑ, ΜΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου ν.δ.ο. η χορδή ΑΒ έχει εξίσωση $xx_o + yy_o = \rho^2$ (ΑΒ: πολική του κύκλου).
6. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 8 = 0$.
   i) Ν.δ.ο. η ευθεία $x + y - 2 = 0$ είναι εφαπτομένη του κύκλου.
   ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Ρ(4, 2).
   iii) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.
7. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$.
   i) Να βρεθεί η εφαπτομένη στο σημείο Α(2, 4).
   ii) Να βρεθεί η εφαπτομένη που είναι παράλληλη στην εφαπτομένη που βρήκατε στο σημείο Α.
   iii) Να βρεθούν οι εφαπτομένες που περνούν από το Ο(0, 0).
8. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που σχηματίζει με τον x΄x γωνία 45°.
9. Να βρεθεί ο γ.τ. των σημείων Μ για τα οποία ισχύει:
   i) $|\overrightarrow{MA}| = 2$, όπου Α(2, 1).
   ii) $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$, όπου Α(1, 0) και Β(–1, 0).
   iii) (ΜΑ) = 2(ΜΒ) όπου Α(1, 2) και Β(3, 1).
   iv) Το Μ να είναι μέσο των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ μήκους 8 των οποίων τα άκρα Α και Β κινούνται στους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.