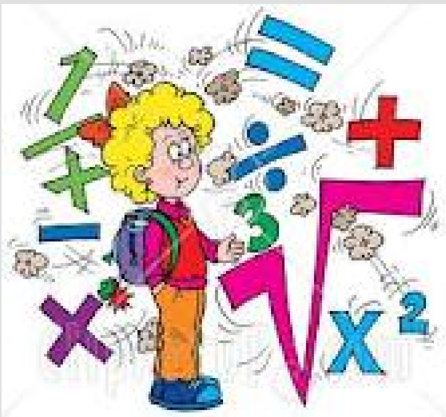
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΥΘΕΙΑ



2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. **Εύρεση Συντελεστή Διευθύνσεως Ευθείας :** Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος (Η ευθεία διέρχεται από δύο γνωστά σημεία, Η ευθεία σχηματίζει γνωστή γωνία **ω** με τον άξονα **x'x**, Η ευθεία είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία, Η ευθεία είναι κάθετη σε γνωστή ευθεία, Έχει δοθεί η εξίσωση της ευθείας) βρίσκουμε τον συντελεστή διευθύνσεως της ευθείας.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 64, Άσκηση Α΄ 1.
2. **Εύρεση Εξίσωσης Ευθείας :** Για να βρούμε την εξίσωση μίας ευθείας χρειαζόμαστε πάντοτε να γνωρίζουμε τον συντελεστή διευθύνσεως λ της ευθείας και ένα γνωστό σημείο της $M(x_0,\ y_0)$. (Ο συντελεστής διευθύνσεως θα προσδιορίζεται με έναν από τους τρόπους που αναφέραμε στο **1**). Τότε η εξίσωση της ευθείας θα δίνεται από τη σχέση $y-y_0=\lambda(x-x_0)$.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 64, Άσκηση Α΄ 3.
3. Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση ευθείας που διέρχεται από γνωστό σημείο $M(x_0,\ y_0)$ και η οποία ικανοποιεί δοσμένη ιδιότητα, τότε υποθέτουμε ότι η ευθεία είναι της μορφής $y-y_0=\lambda(x-x_0)$ και από την ιδιότητα προσδιορίζουμε το συντελεστή διευθύνσεως. **ΠΡΟΣΟΧΗ :** *Θα εξετάζουμε πάντοτε και εάν η ευθεία με εξίσωση $x=x_0$ αποτελεί λύση του προβλήματος.*
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 65, Άσκηση Β΄ 1, Β΄ 3.
4. Εάν ζητείται να βρεθεί το συμμετρικό γνωστού σημείου A ως προς γνωστή ευθεία τότε υποθέτουμε το συμμετρικό ως το σημείο $A_1=(x_1,\ y_1)$, βρίσκουμε την εξίσωση της κάθετης ευθείας που διέρχεται από το A προς την αρχική, βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών, που θα αποτελεί το μέσο του AA_1 και έτσι καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1 , y_1.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 63, Εφαρμογή 2.
5. Σε προβλήματα με τρίγωνα, παραλληλόγραμμα, τετράγωνα κ.ο.κ. οι

κορυφές τους θα προκύπτουν από την επίλυση των συστημάτων των εξισώσεων των πλευρών τους. Για παράδειγμα, σε τρίγωνο **ΑΒΓ**, η κορυφή **Α** θα προκύπτει από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων ευθειών των πλευρών **ΑΒ** και **ΑΓ**. Επίσης, ανάλογα με την υπόθεση θα μπορούμε να προσδιορίζουμε συντελεστές διευθύνσεως ευθειών. Για παράδειγμα, εάν **ΑΔ** το ύψος τριγώνου **ΑΒΓ** τότε $\lambda_{A\Delta}\lambda_{B\Gamma}=-1$.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 65, Άσκηση Β΄ 2.

ΓΕΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΕΥΘΕΙΑΣ

1. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ να παριστάνει ευθεία, τότε απαιτούμε τα **Α** και **Β** να μην μηδενίζονται ταυτόχρονα. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε ευθεία της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα **x'x** τότε απαιτούμε $A=0$ και $B \neq 0$, ενώ εάν θέλουμε να είναι παράλληλη προς τον άξονα **y'y** τότε απαιτούμε $B=0$ και $A \neq 0$. Τέλος εάν θέλουμε να διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε απαιτούμε $\Gamma=0$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 69, Άσκηση Α΄ 1.

2. Εάν ζητείται να βρεθεί η γωνία δύο ευθειών τότε βρίσκουμε τη γωνία που σχηματίζουν τα παράλληλα προς τις ευθείες διανύσματα. Ανάλογα με το πρόσημο του συνημίτονου θα έχουμε την οξεία ή την αμβλεία γωνία.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 4.

3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι τρεις ευθείες συντρέχουν, τότε βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών και δείχνουμε ότι το σημείο αυτό ικανοποιεί και την εξίσωση της τρίτης ευθείας.

   Σχετικές Θέσεις τριών ευθειών στο Επίπεδο : Οι σχετικές τους θέσεις είναι οι εξής : Να διέρχονται και οι τρεις από το ίδιο σημείο, Να τέμνονται ανά δύο, Δύο να είναι παράλληλες και η τρίτη να τις τέμνει, Και οι τρεις να είναι παράλληλες, Δύο να ταυτίζονται και η τρίτη να τις τέμνει, Δύο να ταυτίζονται και η τρίτη να είναι παράλληλη προς αυτές και τέλος και οι τρεις να ταυτίζονται. (Σύνολο : Επτά σχετικές Θέσεις).

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 3.

4. Εάν ζητείται να βρεθεί η γραμμή που παριστάνει μία δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς **x**, **y** τότε παραγοντοποιούμε την εξίσωση και καταλήγουμε σε ένα γινόμενο δύο ευθειών ίσο με μηδέν. Έτσι η εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες.
Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 1.

5. Εάν ζητείται να βρεθεί γεωμετρικός τόπος σημείου Μ που οι συντεταγμένες του δίνονται συναρτήσει παραμέτρου **λ**, τότε απαλείφουμε την παράμετρο **λ** μεταξύ των συντεταγμένων του και έτσι καταλήγουμε σε μία σχέση συναρτήσει των x_M και y_M που θα αποτελεί τον ζητούμενο γεωμετρικό τόπο. Εάν αυτή σχέση είναι πρωτοβάθμια τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ευθεία.
Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 76, Γενικές Ασκήσεις 2.

6. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε ευθεία να είναι παράλληλη ή κάθετη σε γνωστή ευθεία, τότε απαιτούμε οι συντελεστές διευθύνσεως να είναι ίσοι ή το γινόμενό τους να είναι ίσο με **-1** αντίστοιχα. **ΠΡΟΣΟΧΗ :** *Θα εξετάζουμε πάντοτε και τις τιμές των παραμέτρων που μηδενίζουν τυχόν παρονομαστή.*
Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 69, Άσκηση Α΄ 5.

7. **Οικογένεια ή Δέσμη Ευθειών :** Δίνεται γενική μορφή εξίσωσης ευθείας συναρτήσει παραμέτρου με την παράμετρο να διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι όλες αυτές οι ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο για κάθε τιμή της παραμέτρου, τότε ανακατασκευάζουμε την εξίσωση ως προς τις δυνάμεις της παραμέτρου (από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη) και απαιτούμε όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων της παραμέτρου καθώς και ο σταθερός όρος να είναι ίσοι με το μηδέν. Το σύστημα αυτό θα έχει ως λύση το ίδιο σημείο που θα αποτελεί το ζητούμενο σταθερό σημείο.
Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 70, Άσκηση Β΄ 2.

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ – ΕΜΒΑΔΟΝ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

1. Εάν ζητείται να βρεθεί η απόσταση μεταξύ δύο παραλλήλων ευθειών, τότε βρίσκουμε ένα οποιοδήποτε σημείο της μίας και στη συνέχεια υπολογίζουμε την απόστασή του από την άλλη ευθεία. Η απόσταση αυτή θα αποτελεί και την απόσταση μεταξύ των δύο παραλλήλων ευθειών.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 75, Άσκηση Α΄ 2.

2. Εάν δίνονται δύο παράλληλες ευθείες $Ax + By + \Gamma_1 = 0$, $Ax + By + \Gamma_2 = 0$ και ζητείται η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των δύο ευθειών τότε η εξίσωσή της θα είναι η $Ax + By + \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} = 0$. (Για να χρησιμοποιηθεί θα πρέπει πρώτα να αποδειχθεί). Ένας άλλος τρόπος είναι να βρούμε ένα σημείο της πρώτης, ένα σημείο της δεύτερης και στη συνέχεια να βρούμε το μέσο τους. Τότε η μεσοπαράλληλος θα έχει εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με **Α**, **Β**, γνωστά και **Γ** άγνωστο. Το μέσο που βρήκαμε θα ικανοποιεί την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου και έτσι προσδιορίζουμε το **Γ**.

Εφαρμογή : Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου των ευθειών $3x+4y-1=0$ και $3x+4y+5=0$.

3. Εάν ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου δύο γνωστών ευθειών, τότε υποθέτουμε **Μ(x, y)** τυχαίο σημείο της διχοτόμου και απαιτούμε οι αποστάσεις του από τις δύο ευθείες να είναι ίσες. Από την εξίσωση αυτή προκύπτουν δύο ευθείες εκ των οποίων μία θα είναι η εξίσωση της διχοτόμου της οξείας γωνίας των δύο ευθειών και η άλλη η εξίσωση της διχοτόμου της αμβλείας γωνίας των δύο ευθειών. Για να βρούμε ποια θα είναι η εξίσωση της οξείας γωνίας των δύο ευθειών παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο της μίας ευθείας και υπολογίζουμε τις αποστάσεις του από τις δύο διχοτόμους. Η μικρότερη απόσταση θα αντιστοιχεί στη διχοτόμο της οξείας γωνίας των δύο ευθειών.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 76, Άσκηση Β΄ 8.

4. Εάν ζητείται να βρεθεί εμβαδόν τριγώνου με γνωστές κορυφές τότε χρησιμοποιώντας τον τύπο της θεωρίας υπολογίζουμε το ζητούμενο εμβαδόν.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 75, Άσκηση Α΄ 10.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Να δοθεί ο ορισμός του συντελεστή διευθύνσεως μίας ευθείας.
2. Να δειχθεί ότι κάθε εξίσωση της μορφής **Αx+Βψ+Γ=0** με **Α** και **Β** όχι ταυτόχρονα μηδέν παριστάνει στο επίπεδο ευθεία και αντίστροφα.
3. Δίνεται η ευθεία **Αx+Βψ+Γ=0**. Να βρεθεί το παράλληλο και το κάθετο διάνυσμα στην ευθεία.
4. Να δοθούν οι τύποι της απόστασης σημείου από ευθεία και του εμβαδού τριγώνου.
5. Δίνεται η εξίσωση **(x-3y+2)+λ(2x+y+1)=0 (1)** με $\lambda \in \Re$.
   α) Η εξίσωση παριστάνει ευθεία όταν : Α. **λ= – 1**. Β. **λ=3**. Γ. **λ=1** Δ. **λ=4** Ε. $\lambda \in \Re$.
   β) Οι ευθείες που ορίζονται από την εξίσωση **(1)** διέρχονται πάντοτε από το σημείο : Α. **Κ(3, 1)** Β. **Λ(4, 0)** Γ. **Μ(-5/7, 3/7)** Δ. **Ν(-1, 2)** Ε. **Ρ(1/2, 1/2)**.
6. Να σημειώσετε τα σωστό ή λάθος στις παρακάτω προτάσεις :
   α) Δίνεται η ευθεία **(ε)** : $\frac{x}{\alpha} + \frac{\psi}{\beta} = 1$. Τότε η απόστασή της από την αρχή των αξόνων είναι $d = \frac{|\alpha\beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$.
   β) Οι ευθείες **ψ=2x** και **ψ=-3x** σχηματίζουν γωνία 45^0.
   γ) Η εξίσωση **ψ-4=λ(x-3)** παριστάνει για τις διάφορες τιμές του **λ** όλες τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο **Α(3, 4)**.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΕΥΘΕΙΑ

1. Δίνονται οι εξισώσεις **λx-y+1=0** και **(λ+1)x-(1-λ)y+4=0**.
   α) Αφού διαπιστωθεί ότι οι δύο εξισώσεις παριστάνουν εξισώσεις ευθειών να δειχθεί ότι κάθε μία διέρχεται από ένα σταθερό σημείο.
   β) Να δειχθεί ότι υπάρχει ευθεία που ανήκει και στις δύο εξισώσεις ευθειών που έχουν δοθεί στο ερώτημα **α**.
2. Δίνεται ορθή γωνία **χΟψ** και τα μεταβλητά σημεία **Α** και **Β** των αξόνων **Οχ**, **Οψ** τέτοια ώστε **ΟΑ+ΟΒ=κ**, όπου **κ** σταθερά. Να δειχθεί ότι η μεσοκάθετος του τμήματος **ΑΒ** διέρχεται από σταθερό σημείο.

3. Ένας πεζοπόρος **Μ(κ, λ)** κινείται πάνω στην ευθεία **(ε)** : **y=x+2**. Ένας ποδηλάτης **Ν** κινείται στο ίδιο επίπεδο έτσι ώστε κάθε στιγμή να βρίσκεται σε μία θέση που ικανοποιεί την σχέση $\overrightarrow{MN} = \kappa\vec{\alpha}$ με $\vec{\alpha} = (1,-1)$.
   α) Να βρεθεί η ευθεία πάνω στην οποία κινείται ο ποδηλάτης **Ν**.
   β) Εάν **Ρ** είναι ένας δεύτερος ποδηλάτης ο οποίος κινείται έτσι ώστε κάθε στιγμή $\overrightarrow{MP} = \lambda\vec{\alpha}$ να βρεθεί η σχέση των γραμμών που γράφουν οι **Ν**, **Ρ**.
   γ) Να βρεθεί το $|\overrightarrow{NP}|$ όταν **κ=2**.
4. Ενός παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ**, η πλευρά **ΑΒ** ανήκει στην ευθεία με εξίσωση **3x–7y+27=0** και η πλευρά **ΑΔ** στην ευθεία με εξίσωση **4x+y+5=0**. Οι διαγώνιοι **ΑΓ**, **ΒΔ** του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο **Κ(2, 5/2)**.
   α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή **Γ** έχει συντεταγμένες **(6,2)**.
   β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά **ΒΓ**.
   γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η διαγώνιος **ΒΔ**.
5. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ***Οxy***, η εξίσωση ευθείας **(λ-1)x+(λ+1)y-λ-3=0**, όπου **λ** πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος **Φ**.
   α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ.
   β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία **Κ(2, 2)**, **Λ(-1, 5)** και **Μ(1, 3)**. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτινών που διέρχονται από τα πλοία **Κ**, **Λ** και **Μ**.
   γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία **Κ** και **Λ** βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο **Μ**.
   δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο **Φ** και τα πλοία **Λ** και **Μ**.
6. Δίνεται η εξίσωση : $-x^2 + y^2 + 2x + 4y + \lambda - 1 = 0$.
   α) Να βρεθεί η τιμή του **λ** έτσι ώστε η εξίσωση να παριστάνει δύο ευθείες.
   β) Να βρεθεί το σημείο τομής των ευθειών αυτών.
7. Τα σχέδια κατασκευής του υπόγειου μετρό της Αθήνας σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων περιλαμβάνουν την γραμμή Γ_1 της οποίας κάθε σημείο είναι της μορφής ***Α*(λ+2, 3λ+1)**, $\lambda \in \Re$ και την γραμμή Γ_2 που

διέρχεται από τον σταθμό **Σ(-3, 2)** και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-10{,}5)$.

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών Γ_1 και Γ_2.

β) Στο σημείο **Ο(0,0)** πρόκειται να κατασκευασθεί το Ολυμπιακό Χωριό. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο να βρεθεί με ποια γραμμή πρέπει να συνδεθεί έτσι ώστε η γραμμή σύνδεσης να έχει το μικρότερο κόστος.

γ) Εάν το Ολυμπιακό Χωριό που θα κατασκευασθεί βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου με εξίσωση $x^2+y^2=5$ να εξετασθεί εάν υπάρχει ανάγκη σχεδίασης άλλης γραμμής προκειμένου να εξυπηρετηθούν οι Ολυμπιακοί Αγώνες του 2004.

8. Δίνεται το τρίγωνο **ΑΒΓ** με κορυφές τα σημεία **Α(2,4)**, **Β(4,0)** και **Γ(6,0)**. Να βρεθεί η ευθεία **(ε)** που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά μέρη.

9. Δίνεται η ευθεία **(ε)**: **ψ=2** και το σημείο της **Μ(2,2)**. Να βρεθούν δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή των αξόνων και τέμνουν την **(ε)** στα **Α**, **Β** αντίστοιχα έτσι ώστε το **Μ** να είναι μέσο του **ΑΒ** και το τρίγωνο **ΟΑΒ** να έχει εμβαδόν **10**.

10.Δίνεται η ευθεία **δ**: **x=4** και το σημείο **Α(2,0)**. Να βρεθούν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 διερχόμενες από το **Α**, κάθετες μεταξύ τους οι οποίες να τέμνουν την **δ** στα σημεία **Β**, **Γ** έτσι ώστε :

α) Το άθροισμα των αποστάσεων των **Β** και **Γ** από τον άξονα **x'x** να είναι **5** μονάδες.

β) Το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΒΓ** να γίνεται ελάχιστο.

11.Δύο πλοία αναχωρούν από τα λιμάνια του Πειραιά και της Ραφήνας την $6^η$ πρωινή ώρα, κινούμενα ευθύγραμμα. Οι συντεταγμένες των πλοίων στο ραντάρ από το οποίο παρακολουθούνται είναι **Α(t+1,t-1)** και **Β(20-t,t+20)** αντίστοιχα, όπου **t** ο χρόνος σε ώρες που έχει περάσει από την στιγμή της αναχώρησής τους. Εάν ο Πειραιάς βρίσκεται στην θέση **Π(1,-1)** και η Ραφήνα στην θέση **Ρ(20,20)** τότε :

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των γραμμών πάνω στις οποίες κινούνται τα πλοία.

β) Να εξετάσετε εάν υπάρχει κίνδυνος σύγκρουσης των δύο πλοίων.

γ) Να βρεθεί ποιο πλοίο θα διέλθει πιο κοντά από την βραχονησίδα **Κ(2003, 2003)**.

δ) Να εξετάσετε εάν κάποιο πλοίο έχει την δυνατότητα χωρίς να εκτραπεί από την πορεία του να περισυλλέξει ναυαγούς που βρίσκονται στην θέση **Ν(2040,-2000)**.

12. Δίνεται η εξίσωση : $x^2 + y^2 + 2(2x + 2y + xy) = 5$.

α) Να δειχθεί ότι παριστάνει δύο ευθείες παράλληλες μεταξύ τους.

β) Να βρεθεί η απόστασή τους.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαραλλήλου τους.

δ) Εάν τα σημεία **Ρ(κ, λ)** και **Σ(μ, ν)** κινούνται το ένα στην μία ευθεία και το στην άλλη να δειχθεί ότι το εμβαδόν του τριγώνου **ΡΜΣ** όπου $M\left(\frac{\kappa+\mu}{2}+1, \frac{\lambda+\nu}{2}-1\right)$, είναι σταθερό.

13. Δίνεται ορθή γωνία **xoy** και τα σημεία **Α(0,α)** και **Β(0, α/2)**, **α>0** στον άξονα **y'y**. Εάν **Μ(β,β)** με **β<α/2** είναι σημείο της ευθείας **y=x** τότε :

α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών **ΑΜ**, **ΒΜ**.

β) Εάν οι ευθείες **ΑΜ**, **ΒΜ** τέμνουν τον άξονα **x'x** στα σημεία $K(0,x_1)$ και $\Lambda(0,x_2)$ να δειχθεί ότι ισχύει $\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\alpha}$.

γ) Να βρεθεί η σχέση που συνδέει τους αριθμούς **α** και **β** έτσι ώστε τα τρίγωνα **ΟΑΚ** και **ΟΒΛ** να είναι ισεμβαδικά.

14. Σε μία επίπεδη πεδιάδα δύο σωλήνες άρδευσης τροφοδοτούνται από την παροχή μίας γεώτρησης που βρίσκεται στο σημείο **Μ(1,4)**. Οι διαδρομές των σωλήνων αυτών ακολουθούν τις ευθείες ε_1 : **y=-x+4** και ε_2 : **y=2x+3**. Ένας ευθύγραμμος αγωγός συνδέει την παροχή **Μ** με τους δύο σωλήνες άρδευσης στα σημεία τους **Α** και **Β**. Να βρεθεί η ευθεία η οποία πρέπει να ακολουθεί η διαδρομή του συνδετικού αγωγού ώστε το σημείο **Μ** να είναι το μέσο του.

15. Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** η κορυφή **Α** έχει συντεταγμένες **(3,5)** και δύο διάμεσοί του βρίσκονται πάνω στις ευθείες ε_1 : **4y=x+3** και ε_2 : **5y+4x=23**. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του.

16. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων θεωρούμε ότι ένας ναύσταθμος είναι η αρχή **Ο** του συστήματος. Για την διεξαγωγή μίας άσκησης δεσμεύεται θαλάσσια περιοχή σχήματος τετραγώνου με κορυφές **Ο(0, 0)**, **Α(3, 4)**, **Β(μ, ν)** και **Γ(κ, λ)**, **κ>0**.

α) Να δειχθεί ότι : **$3κ+4λ=0$.**

β) Κατά την διάρκεια της άσκησης ένα πλοίο αναχωρεί από μία κορυφή και κατευθύνεται σε μία άλλη. Εάν οι συντεταγμένες του πλοίου την χρονική στιγμή **t, $t \geq 0$,** είναι **$Π(4-t/2, 7t/2-3)$** να βρεθεί από πού αναχώρησε, σε ποια κορυφή κατευθύνεται, πόσο χρόνο θα κινηθεί και εάν βρίσκεται στην σωστή πορεία όλη την διάρκεια της κίνησής του.