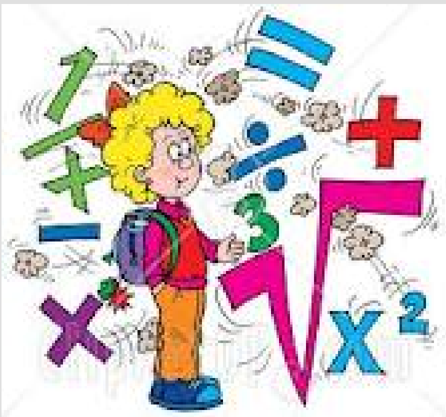
ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΥΚΛΟΣ



3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

Ι. ΚΥΚΛΟΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. **Εύρεση Εξίσωσης Κύκλου :**

α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστό κέντρο **Κ** και ο οποίος διέρχεται από γνωστό σημείο **Α**, τότε θα ισχύει ότι $|\vec{KA}| = \rho$ και έτσι η εξίσωση του κύκλου γίνεται γνωστή.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 i).

β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου που διέρχεται από δύο αντιδιαμετρικά σημεία **Α**, **Β**, τότε θα έχουμε ότι το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο του **ΑΒ** ενώ για την ακτίνα **ρ** θα ισχύει ότι $\rho = \dfrac{|\vec{AB}|}{2}$.

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 ii).

γ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστή ακτίνα **ρ** και ο οποίος διέρχεται από δύο γνωστά σημείο **Α** και **Β**, τότε θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και απαιτούμε να την επαληθεύουν τα σημεία **Α** και **Β**. Έτσι καταλήγουμε σε σύστημα δύο εξισώσεων ως προς x_0 και y_0. Λύνοντας το σύστημα προσδιορίζουμε το κέντρο και στη συνέχεια τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 iii).

δ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου ο οποίος διέρχεται από τρία γνωστά σημείο **Μ**, **Λ** και **Ρ**, τότε θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και απαιτούμε να την επαληθεύουν τα τρία γνωστά σημεία. Έτσι καταλήγουμε σε σύστημα τριών εξισώσεων ως προς x_0, y_0 και **ρ**. Λύνοντας το σύστημα προσδιορίζουμε το κέντρο και την ακτίνα και κατά συνέπεια τη ζητούμενη εξίσωση. Ένας άλλος τρόπος είναι να θεωρήσουμε την εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, να απαιτήσουμε η εξίσωση να ικανοποιείται από τα σημεία **Μ**, **Λ** και **Ρ** και έτσι να καταλήξουμε σε σύστημα ως προς **Α**, **Β** και **Γ**. Η λύση του συστήματος προσδιορίζει τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 iv).

ε) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση κύκλου με γνωστό κέντρο **Κ** και ο οποίος εφάπτεται σε γνωστή ευθεία **(ε)**, τότε θα ισχύει ότι **d(Κ, (ε))=ρ**. Από την τελευταία εξίσωση προσδιορίζουμε την ακτίνα **ρ** και έτσι και τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 1 iii).

στ) Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα θεωρούμε τη γενική μορφή του κύκλου $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ και θα καταλήγουμε σε σύστημα ως προς τους αγνώστους που έχουμε. (Συντεταγμένες κέντρου ή την ακτίνα). Η λύση κάθε φορά του συστήματος θα οδηγεί και στη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 5 vi), vii).

2. **Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Κύκλου :**

α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης κύκλου κέντρου **(0, 0)** σε γνωστό του σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε (από θεωρία) η εφαπτομένη θα έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.

β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης κύκλου γνωστού κέντρου $K(x_0, y_0)$ σε γνωστό του σημείο $A(x_1, y_1)$, τότε θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο $M(x, y)$ της εφαπτομένης και απαιτούμε να ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AM}\overrightarrow{KM} = 0$. Κάνοντας τις πράξεις καταλήγουμε στη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 88, Άσκηση Α΄ 7i).

γ) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης γνωστού κύκλου η οποία ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα αλλά δεν δίνεται το σημείο επαφής, τότε το υποθέτουμε ως $M(x_1, y_1)$ και από την ιδιότητα καθώς και από το ότι το σημείο **Μ** θα ικανοποιεί την εξίσωση του κύκλου, καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1, y_1. Βρίσκοντας έτσι το σημείο επαφής προσδιορίζουμε και τη ζητούμενη εξίσωση.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Α΄ 2.

3. Εάν ζητείται να βρεθεί η σχετική θέση δύο γνωστών κύκλων, τότε εξετάζουμε το μήκος της διακέντρου τους σε σχέση με το άθροισμα και τη διαφορά των δύο ακτινών. Ανάλογα με τη σύγκριση θα έχουμε και τη σχετική θέση των δύο κύκλων.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 88, Άσκηση Α΄ 8.

4. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι γνωστή ευθεία εφάπτεται σε γνωστό κύκλο, τότε αποδεικνύουμε ότι η απόσταση του κέντρου του κύκλου από τη δοσμένη ευθεία είναι ίση με την ακτίνα του κύκλου.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 87, Άσκηση Β΄ 2.

5. Δίνεται γενική μορφή εξίσωσης κύκλου συναρτήσει παραμέτρου με την παράμετρο να διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι όλοι αυτοί οι κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο (ή από τα ίδια σημεία) για κάθε τιμή της παραμέτρου, τότε ανακατασκευάζουμε την εξίσωση ως προς τις δυνάμεις της παραμέτρου (από τη μεγαλύτερη δύναμη προς τη μικρότερη) και απαιτούμε όλοι οι συντελεστές των δυνάμεων της παραμέτρου καθώς και ο σταθερός όρος να είναι ίσοι με το μηδέν. Το σύστημα αυτό θα έχει ως λύση τα ζητούμενα σταθερά σημεία.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 129, Γενικές Ασκήσεις 1.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1. Να γράψετε και να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(0, 0)$ και ακτίνα ρ.
2. Να γράψετε και να αποδείξετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ.
3. Να εξετασθεί πότε η εξίσωση $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ παριστάνει κύκλο. Να βρεθεί το κέντρο του και η ακτίνα του.
4. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου C: $x^2+y^2=\rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1+yy_1=\rho^2$.
5. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

   Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση: **Α.** $x+3y=10$, **Β.** $5x-y=8$, **Γ.** $x-3y=10$, **Δ.** $3x+2y=3$, **Ε.** $x+y=5$
6. Στη Στήλη Α δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη Στήλη Β τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2+y^2-6x+4y-3=0$	1. Κ (0, -1), ρ=2
β. $x^2+(y+1)^2=4$	2. Κ (3, -2), ρ=1
	3. Κ (3, -2), ρ=4

7. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
   α) Το σημείο **(1, -1)** ανήκει στον κύκλο $x^2+y^2=2$.
   β) Ο κύκλος $x^2+y^2=4$ και η ευθεία $y=2x$ εφάπτονται.
   γ) Η εξίσωση $x^2+y^2+\lambda^2=0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

1. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2+y^2=\rho^2$ και η εφαπτομένη του **(ε)** στο σημείο του $\Gamma(x_\Gamma,\ y_\Gamma)$. Εάν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες στα σημεία **Α** και **Β** και $M(x_M,\ y_M)$ είναι το μέσο του **ΑΒ** να δειχθεί ότι $\dfrac{1}{{x_M}^2}+\dfrac{1}{{y_M}^2}=\dfrac{4}{\rho^2}$.
2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων με εξίσωση : $x^2+y^2+2\lambda^2x-8\lambda y+\lambda^2=0$ με $\lambda\in\Re^*$.
3. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\sigma\upsilon\nu\theta-2y\eta\mu\theta-1=0$, $0\le\theta<2\pi$.
   α) Να αποδείξετε ότι για κάθε **θ** η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.
   β) Εάν $\theta=\dfrac{\pi}{2}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο **Μ(1, 2)**.
   γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του **θ** τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο **Ο(0, 0)** και ακτίνα **ρ=1**.

4. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι C_1 : $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ και C_2 : $(x-2)^2+(y-3)^2=9$ με **Κ** το κοινό κέντρο. Εάν για τα σημεία **Μ** και **Ν** των δύο κύκλων αντίστοιχα ισχύει ότι $(\overrightarrow{KM},\overrightarrow{KN})=\frac{2\pi}{3}$ τότε :

α) Να βρεθεί η τιμή του $x\in\Re$ ώστε $\overrightarrow{KM}\perp\vec{\gamma}$ με $\vec{\gamma}=x\overrightarrow{KM}+\overrightarrow{KN}$.

β) Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\delta},\overrightarrow{KN}$ με $\vec{\delta}=3\overrightarrow{KM}+2\overrightarrow{KN}$ και **Κ** το κοινό κέντρο.

5. Το μετρό μίας πόλης αποτελείται από **20** γραμμές, κάθε μία από τις οποίες περιγράφεται από την εξίσωση : $x^2+y^2=2\lambda(x+y),\quad \lambda=1,2,3,\dots\dots.20$.

α) Να δειχθεί ότι όλες οι γραμμές είναι κύκλοι και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα τους.

β) Να δειχθεί ότι μπορεί να κατασκευασθεί ένας μόνο σταθμός από τον οποίο ένας επιβάτης μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε γραμμή.

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται τα κέντρα όλων των κύκλων καθώς επίσης και την μέγιστη δυνατή απόσταση δύο σταθμών του μετρό.

6. Φορτηγό πλοίο κινούμενο στον Ατλαντικό εξέπεμψε S.O.S. από περιοχή η περίμετρος της οποίας περιγράφεται από την εξίσωση : $36x^2+36y^2-28x-72y+611=0$. Εάν οι συντεταγμένες του ναυαγοσωστικού που ξεκίνησε από το πλησιέστερο προς την περιοχή λιμάνι είναι $N(2t+1,3t+2),\quad t\geq 0$ τότε :

α) Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινείται το ναυαγοσωστικό.

β) Να εξετασθεί εάν είναι σωστή η πορεία του ναυαγοσωστικού.

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων ημιευθειών με αρχή το λιμάνι θα πρέπει να βρίσκεται η πορεία του ναυαγοσωστικού ώστε να βρεθεί στην περιοχή του ναυαγίου.

7. Δίνονται δύο σημεία **Α** και **Β** του επιπέδου.

α) Να βρεθεί σημείο **Κ** τέτοιο ώστε να ισχύει $2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$.

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα $2\overrightarrow{MA}^2+\overrightarrow{MB}^2-3\overrightarrow{MK}^2$ είναι σταθερό για οποιοδήποτε σημείο **Μ** του επιπέδου.

γ) Εάν ισχύει $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2001$ να αποδείξετε ότι το σημείο **Μ** για το οποίο ισχύει $2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = \overrightarrow{AB}^2$ κινείται σε κύκλο με κέντρο το σημείο **Κ** και ακτίνα **667**.

8. Να βρεθεί η εξίσωση κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία (ε_1) : $x+y+13=0$ και στην (ε_2) : $7x-y-5=0$ στο σημείο της $A(1, 2)$.

9. Δίνονται οι κύκλοι C : $x^2 + y^2 + \lambda x - (3\lambda + 10)y = 0$, $\lambda \in \Re$.

   α) Να δειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι αυτής της οικογένειας διέρχονται από δύο σταθερά σημεία.

   β) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των παραπάνω κύκλων.

   γ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα δύο σταθερά σημεία και το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $A(1, -1)$.

10. Δίνονται η ευθεία ε : $y = x + 2$ και ο κύκλος C : $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$, $\lambda \in \Re$.

    α) Να βρεθούν οι τιμές του **λ** ώστε η ευθεία να τέμνει τον κύκλο.

    β) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η χορδή που ορίζει η ευθεία ε στον κύκλο να φαίνεται από την αρχή των αξόνων υπό ορθή γωνία.

11. Δίνεται η εξίσωση $x^2+ y^2+6\mu x+8\lambda y=0$, όπου **μ**, **λ** πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός.

    α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των **μ**, **λ**, η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων **Ο**.

    β) Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς **μ**, **λ** ισχύει η σχέση $3\mu+2\lambda =0$.

    ι) Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2+y^2+6\mu x+8\lambda y=0$ για τις διάφορες τιμές των **μ** και **λ**, έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

    ιι) Να βρείτε τα **μ**, **λ** έτσι, ώστε, αν **Α**, **Β** είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x+y+2=0$, να ισχύει $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

    ιιι) Για τις τιμές των **μ**, **λ** που βρήκατε στο ερώτημα **ιι)** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΟΒ**.

12. Εάν τα σημεία $A(\alpha_1, \alpha_2)$ και $B(\beta_1, \beta_2)$ είναι αντιδιαμετρικά σημεία ενός κύκλου που εφάπτεται του άξονα **y'y** να δειχθεί ότι $(\alpha_2-\beta_2)^2=4\alpha_1\beta_1$.

13. Δίνεται ο κύκλος $x^2+y^2=4$. Να βρεθεί σημείο **Μ** του κύκλου τέτοιο ώστε η εφαπτόμενη του κύκλου στο **Μ** να τέμνει τους θετικούς ημιάξονες στα σημεία **Α** και **Β** και να ισχύει $|\overrightarrow{AB}| = 4$.

14. Δίνονται οι κύκλοι K_1 : $x^2+y^2-4x=0$ και K_2 : $x^2+y^2-10x=0$. Μία μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το **Ο(0, 0)** τέμνει τους κύκλους στα σημεία **Α** και **Β**.

α) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των κύκλων στα σημεία **Α** και **Β** αντίστοιχα είναι παράλληλες.

β) Να βρεθεί η γραμμή πάνω στην οποία κινείται το μέσο του τμήματος **ΑΒ**.

15. Έστω το σημείο **Α(2, 0)**. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής **Β** του τριγώνου **ΟΑΒ** έτσι ώστε η διάμεσός του **ΟΔ** να είναι ίση με **1**.