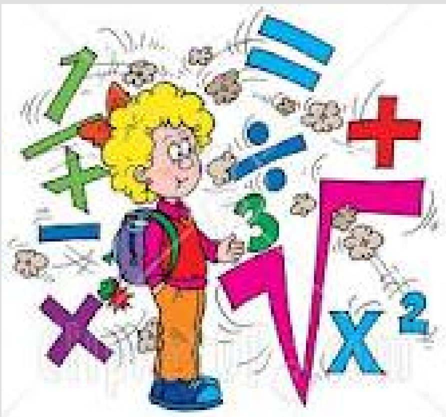
<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ</u>

ΠΑΡΑΒΟΛΗ -- ΕΛΛΕΙΨΗ -- ΥΠΕΡΒΟΛΗ



ΙΙ.ΠΑΡΑΒΟΛΗ – ΕΛΛΕΙΨΗ - ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

1. **Εύρεση Εξίσωσης Παραβολής – Έλλειψης - Υπερβολής :**

   Ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα προσδιορίζουμε για κάθε κωνική τομή τη θέση της ως προς τους άξονες και την τιμή των απαιτούμενων παραμέτρων (**p** για την παραβολή, **α** και **β** για την έλλειψη και την υπερβολή).

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 99, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 111, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 122, Άσκηση Α΄ 1.

2. **Εύρεση Εξίσωσης Εφαπτομένης Παραβολής–Έλλειψης-Υπερβολής :**

   α) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης Παραβολής – Έλλειψης - Υπερβολής σε γνωστό σημείο $A(x_1,\ y_1)$, τότε (από θεωρία) η εφαπτομένη θα έχει αντίστοιχα εξίσωση $yy_1=p(x+x_1)$, $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$, $\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$ ή $xx_1=p(y+y_1)$, $\frac{yy_1}{\alpha^2}+\frac{xx_1}{\beta^2}=1$, $\frac{yy_1}{\alpha^2}-\frac{xx_1}{\beta^2}=1$ (Ανάλογα με τη θέση της κωνικής τομής ως προς τους άξονες).

   β) Εάν ζητείται να βρεθεί εξίσωση εφαπτομένης γνωστής Παραβολής – Έλλειψης – Υπερβολής η οποία ικανοποιεί κάποια συγκεκριμένη ιδιότητα αλλά δεν δίνεται το σημείο επαφής, τότε το υποθέτουμε ως $M(x_1,\ y_1)$ και από την ιδιότητα καθώς και από το ότι το σημείο **Μ** θα ικανοποιεί την εξίσωση της δοθείσης κωνικής τομής, καταλήγουμε σε σύστημα ως προς x_1, y_1. Βρίσκοντας έτσι το σημείο επαφής προσδιορίζουμε και τη ζητούμενη εξίσωση.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 99, Άσκηση Α΄ 5, Σελίδα 112, Άσκηση Α΄ 6, Σελίδα 123, Άσκηση Α΄ 7.

3. Εάν δίνεται εξίσωση Παραβολής – Έλλειψης – Υπερβολής και ζητείται να δειχθεί κάποια άλλη σχέση (γεωμετρική ή μη) τότε κάνουμε ένα πρόχειρο σχήμα, θέτουμε τα άγνωστα σημεία με υποτιθέμενα ζεύγη συντεταγμένων, χρησιμοποιούμε τις άγνωστες συντεταγμένες ως γνωστές και ανάλογα με την υπόθεση του προβλήματος θα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 100, Άσκηση Β΄ 2, Σελίδα 112, Άσκηση Β΄ 6, Σελίδα 124, Άσκηση Β΄ 4.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ-ΕΛΛΕΙΨΗΣ-ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Να δοθούν οι ορισμοί της παραβολής της έλλειψης και της υπερβολής.

2. Να γραφούν οι εξισώσεις της παραβολής της έλλειψης και της υπερβολής για όλες τις περιπτώσεις.

3. Να σημειώσετε το σωστό ή λάθος στα παρακάτω :

α) Εάν (M_1M_2) διάμετρος της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$ τότε $2\beta \le (M_1M_2) \le 2\alpha$.

β) Στην παραβολή $y^2=2px$ η παράμετρος p και οι τετμημένες x είναι ετερόσημες.

γ) Έστω η υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$. Τότε για την εκκεντρότητά της ε ισχύει ότι $\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{1-\varepsilon^2}$.

δ) Για την υπερβολή $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ οι ευθείες $y=\frac{4}{3}x$ και $y=-\frac{4}{3}x$ είναι ασύμπτωτες αυτής.

ε) Στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta$ ισχύει ότι $\alpha^2=\beta^2+\gamma^2$ ενώ στην υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ ισχύει ότι $\gamma^2=\beta^2+\alpha^2$.

4. Στη Στήλη Α δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη Στήλη Β εξισώσεις εφαπτόμενων κωνικών τομών στο σημείο επαφής (x_1, y_1). Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. $x^2+y^2=\rho^2$	1. $yy_1=p(x+x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$	2. $xx_1+yy_1=\rho^2$
γ. $y^2=2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$	4. $xx_1+yy_1=1$

	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΒΟΛΗΣ – ΕΛΛΕΙΨΗΣ - ΥΠΕΡΒΟΛΗΣ

1. Έστω $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με **α>β** μία έλλειψη. Το εμβαδόν του δακτυλίου που σχηματίζεται από τους κύκλους με κέντρο το **(0, 0)** και διαμέτρους **2α** και **2β** αντίστοιχα είναι **9π**. Εάν $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{3}{5}$ να βρεθεί η εξίσωση της έλλειψης.
2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$.
   α) Να δειχθεί ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.
   β) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας **y=λx** ώστε να αποτελεί εφαπτόμενη του κύκλου.
   γ) Να βρεθεί η εξίσωση της υπερβολής $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ που έχει ως ασύμπτωτες τις ευθείες του ερωτήματος **β)** και επιπλέον ισχύει ότι $\beta^2 = \alpha^2 + 2$.
3. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρεθούν :
   α) Η εστία και η διευθετούσα της παραβολής.
   β) Οι ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
   γ) Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x-1$.
4. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο της με θετική τεταγμένη. Εάν **Α** είναι η προβολή του **Μ** στην διευθετούσα και το τρίγωνο **ΜΑΕ** όπου **Ε** η εστία της έχει εμβαδό **2** τ.μ., να βρεθεί το σημείο **Μ**.
5. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και δύο χορδές της **ΟΒ**, **ΟΓ** τέτοιες ώστε $BO\Gamma=90^0$. Να δειχθεί ότι η ευθεία **ΒΓ** διέρχεται από σταθερό σημείο.

6. Η παραβολή με εξίσωση $y^2=\alpha x$ διέρχεται από το σημείο **Α(2, 4)**, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
   α) Να δειχθεί ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο **Ε(2, 0)**.
   β) Έστω **Ε΄** το συμμετρικό της εστίας **Ε** ως προς τον άξονα **y΄y**. Εάν **Μ(x, y)** είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{ME}^2 = \overrightarrow{ME'}\overrightarrow{ME}$ να δειχθεί ότι το σημείο **Μ(x, y)** ανήκει στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων **Ο(0, 0)** και ακτίνα **2**.
   γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο **Α**.
7. Δίνεται η εξίσωση $x^2-y^2+6x+9=0$.
   α) Να δειχθεί ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες ε_1 και ε_2.
   β) Να δειχθεί ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες.
   γ) Να βρεθεί ένα σημείο **Μ(κ, λ)** με **κ>0** και **λ>0** τέτοιο, ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}=(3, \kappa)$ να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες ε_1 και ε_2 και το διάνυσμα $\vec{\beta}=(-16, 4\lambda)$ να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.
   δ) Να γραφεί η εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων ***Ο***, άξονα συμμετρίας τον άξονα **x΄x** και διέρχεται από το σημείο **Μ**.
8. Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$ και έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο της με θετική τεταγμένη. Εάν ***Α*** είναι η προβολή του **Μ** στην διευθετούσα και το τρίγωνο **ΜΑΕ** όπου **Ε** η εστία της παραβολής έχει εμβαδόν **2**, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Μ**.
9. Να βρεθεί το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ το οποίο διέρχεται από την εστία **Ε(γ, 0)** και είναι κάθετο στον μεγάλο ημιάξονά της.
10. Δίνεται η υπερβολή $x^2-y^2=12$ και ένα σημείο της **Ρ**. Εάν **Μ** είναι το μέσο του τμήματος **ΟΡ** να δειχθεί ότι καθώς το **Ρ** κινείται στην υπερβολή το σημείο **Μ** κινείται επίσης σε υπερβολή.
11. Εάν για τους αριθμούς x_1, x_2, y_1, y_2 ισχύουν ότι $9x_1^2+16y_1^2=144$ και $9x_2^2+16y_2^2=144$ να δειχθεί ότι $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2 \le 64$.

12. Ένα σημείο **Μ(x, y)** κινείται έτσι ώστε η απόστασή του από το σημείο **Ε(5, 0)** να είναι ίση με τα **5/3** της απόστασής του από την ευθεία **(ε) : x=9/5**.

α) Να δειχθεί ότι το σημείο **Μ** κινείται σε υπερβολή.

β) Εάν **Κ, Λ** είναι τα σημεία στα οποία η ευθεία **(ε)** τέμνει τις ασύμπτωτες της υπερβολής, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου **ΟΚΛ**.

13. Δίνεται η έλλειψη $x^2+2y^2=2$. Να δειχθεί ότι οι ευθείες που διέρχονται από τις εστίες της και είναι παράλληλες προς την ευθεία **x-y+7=0** τέμνουν την έλλειψη σε τέσσερα σημεία που είναι συμμετρικά ανά δύο ως προς το κέντρο της έλλειψης.

14. Δίνονται οι παραβολές $\Pi_1 : y=x^2$, $\Pi_2 : x=y^2$ και τα σημεία τους **Α, Β** αντίστοιχα. Από το **Α** φέρνουμε κατακόρυφη ευθεία **ε** και από το **Β** οριζόντια ευθεία **ζ** οι οποίες τέμνονται στο σημείο **Γ**.

α) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Α** συναρτήσει της τετμημένης **x** του **Α** και οι συντεταγμένες του σημείου **Β** συναρτήσει της τεταγμένης **y** του **Β**.

β) Εάν τα **Α** και **Β** μεταβάλλονται ώστε η ευθεία ΑΒ να είναι παράλληλη στην ευθεία **y=-x** να βρεθεί η εξίσωση και το είδος της καμπύλης στην οποία κινείται η κορυφή **Γ** του τριγώνου **ΑΒΓ**.

15. Από ένα σημείο **Μ** άγονται δύο εφαπτόμενες της έλλειψης $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία επαφής έχει εξίσωση **2x-3y-4=0**. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου **Μ**.

16. Έστω η παραβολή $y^2=2px$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$. Να δειχθεί ότι η απόσταση **ΑΕ** είναι ίση με $(AE)=|x_1|+\frac{|p|}{2}$.

17. Έστω τα διαφορετικά σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ της παραβολής $y^2=2px$. Δίνεται ότι η ευθεία **ΑΒ** διέρχεται από την εστία **Ε** της παραβολής.

α) Να δειχθεί ότι $y_1y_2=-p^2$.

β) Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{OA}\overrightarrow{OB}$ =σταθερό.

γ) Να δειχθεί ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία **Α** και **Β** τέμνονται κάθετα και μάλιστα πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.

18. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με **α>β>0**. Μία τυχαία εφαπτομένης της τέμνει τις ευθείες **x=-α** και **x=α** στα σημεία **Κ** και **Λ** αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι ο κύκλος διαμέτρου **ΚΛ** διέρχεται από μία εστία της έλλειψης.

19. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με **α>β>0** και η παραβολή $y^2=2px$ με **p>0**.

α) Να δειχθεί ότι η έλλειψη και παραβολή τέμνονται σε δύο σημεία **Α** και **Β**.

β) Εάν οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της παραβολής στο σημείο **Α** τέμνονται κάθετα, να δειχθεί ότι $\alpha=\beta\sqrt{2}$.

20. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με **α>β>0** και **Ε, Ε΄** οι εστίες της. Εάν Μ τυχαίο σημείο της έλλειψης να δειχθεί ότι $\overrightarrow{ME}\,\overrightarrow{ME'}\geq 2\beta^2-\alpha^2$.