ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΘΕΤΙΚΗΣ – ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

4. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΠΑΓΩΓΗ

Εάν ζητείται να δειχθεί ισότητα ή ανίσωση η οποία να ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο (ή για κάθε θετικό ακέραιο $\geq \nu_0$) τότε χρησιμοποιούμε την αρχή της μαθηματικής επαγωγής.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 139, Άσκηση Α΄ 1, Σελίδα 140, Άσκηση Β΄ 2.

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΔΙΑΙΡΕΣΗ

1. Εάν ζητείται να δειχθεί μία σχέση που αφορά σε άρτιους ή περιττούς τότε θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής :

α) Κάθε περιττός α έχει τη μορφή $\alpha=2\kappa+1$ ενώ κάθε άρτιος α έχει τη μορφή $\alpha=2\kappa$ με $\kappa\in \mathbb{Z}$.

β) Το άθροισμα δύο περιττών είναι άρτιος, το άθροισμα δύο άρτιων είναι άρτιος, το άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού είναι περιττός, το γινόμενο δύο άρτιων είναι άρτιος, το γινόμενο δύο περιττών είναι περιττός και τέλος το γινόμενο ενός άρτιου και ενός περιττού είναι άρτιος.

γ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος ενώ το τετράγωνο κάθε περιττού ακεραίου α είναι της μορφής $\alpha^2=8\rho+1$.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 144, Άσκηση Α΄ 3, Σελίδα 145, Άσκηση Β΄ 5.

2. Η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε έναν από τους όρους της διαίρεσης ή όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι ένας ακέραιος έχει κάποια ορισμένη μορφή ή όταν θέλουμε να αποδείξουμε ότι κάποιο γινόμενο ακεραίων είναι διαιρετό από ένα ακέραιο.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 144, Άσκηση Α΄ 2, Σελίδα 145, Άσκηση Β΄ 1.

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ

1. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι ένας ακέραιος α διαιρεί μία ακέραια παράσταση $f(\alpha)$, τότε μετασχηματίζουμε την παράσταση $f(\alpha)$ σε γινόμενο της μορφής **f(α)=αg(α)**.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 149, Άσκηση Α΄ 3, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 1, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 6.

2. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι μία ακέραια παράσταση **g(α)** διαιρεί μία ακέραια παράσταση **f(α)**, τότε μετασχηματίζουμε την παράσταση **f(α)** σε γινόμενο της μορφής **f(α)=π(α)g(α)**.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 4.

3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι μία ακέραια παράσταση **g** διαιρεί μία ακέραια παράσταση **f** και η παράσταση **f** δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί, τότε προσπαθούμε να αποδείξουμε ότι η **g** διαιρεί μία από τις παραστάσεις **f+κg** ή **f−κg**, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 7.

4. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι ένας ακέραιος **α** δεν διαιρεί έναν άλλο ακέραιο **β**, τότε υποθέτουμε ότι ο ακέραιος **α** διαιρεί τον ακέραιο **β** και καταλήγουμε σε άτοπο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 149, Άσκηση Α΄ 5, Σελίδα 150, Άσκηση Β΄ 2.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Έστω **α**, **β**, **γ** ακέραιοι αριθμοί. Να δειχθεί ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες :
   α) Εάν $\alpha | \beta$, τότε $\alpha | \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο **λ**.
   β) Εάν $\alpha | \beta$ και $\alpha | \gamma$, τότε $\alpha | (\beta+\gamma)$.
   γ) Εάν $\alpha | \beta$ και $\beta \neq 0$ τότε $|\alpha| \leq |\beta|$.
   δ) Εάν $\alpha | \beta$ και $\beta | \alpha$ τότε $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$.
   ε) Εάν $\alpha | \beta$ και $\beta | \gamma$ τότε $\alpha | \gamma$.
2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
   α) Εάν $7 \mid (\alpha+5)$ και $7 \mid (40-\beta)$ τότε : **Α**. $7 \mid (\alpha+\beta)$, **Β**. $7 \mid (\alpha+\beta+1)$, **Γ**. $7 \mid (\alpha+\beta+2)$, **Δ**. $7 \mid (\alpha+\beta-3)$.
   β) Ο αριθμός **Α=(3κ+5)(3κ+8)**, κ ακέραιος είναι : **Α**. άρτιος, **Β**. περιττός, **Γ**. άρτιος μόνο όταν **κ=2ν** με **ν** ακέραιο.
3. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :

α) Ο αριθμός $2^{222}-2^{99}-2$ είναι πολλαπλάσιο του **3**.

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης $(19^{κ}+10^{λ}):9$ όπου **κ**, **λ** θετικοί ακέραιοι είναι **1**.

γ) Το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

δ) Το γινόμενο δύο διαδοχικών ακεραίων είναι πάντοτε περιττός ακέραιος αριθμός.

ε) Εάν οι αριθμοί **α**, **β**, **γ** είναι περιττοί ακέραιοι τότε το γινόμενο $(α^2-β^2)(β^2-γ^2)(γ^2-α^2)$ είναι πολλαπλάσιο του **512**.

στ) Η διαφορά κύβων δύο διαδοχικών ακεραίων είναι άρτιος.

ζ) Για κάθε ακέραιο **α** ισχύει ότι $α(α^2+2)=$**πολ.3**

4. Να γραφεί η ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης για δύο φυσικούς **α** και **β** με $α>β$.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

1. Έστω **x** φυσικός αριθμός.

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός $α = x^3 + 3x$ είναι άρτιος.

β) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $2^{x-1} + 3 = x^3 + 3x$ έχει στο N^* μοναδική λύση η οποία και να βρεθεί.

2. Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί **α**, **β** για τους οποίους ισχύει ότι $4(3α+β+4)=7(α+β+2)$. Να δειχθούν τα ακόλουθα :

α) $α=3κ+2$ και $β=5κ+4$, $κ\in Z$.

β) Η διαίρεση $5α-β/10$ δίνει υπόλοιπο **6**.

γ) Εάν $κ=$**πολ.5** τότε $3+β+2α=$**πολ.11**.

δ) Ο αριθμός $\dfrac{β^2 - α^2}{4}$ είναι ακέραιος.

3. Έστω **α** ακέραιος.

α) Να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $\dfrac{α\left(α^2 + 1\right)}{2}$ είναι ακέραιος.

β) Εάν ο **α** είναι περιττός ακέραιος, να δειχθεί ότι ο $\dfrac{α\left(α^2 + 1\right)}{2}$ είναι επίσης περιττός ακέραιος.

4. Δίνεται η εξίσωση $(2x+1)^2+(2y+1)^2=100$.

α) Να δειχθεί ότι παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα.

β) Να δειχθεί ότι δεν υπάρχει σημείο αυτού του κύκλου με ακέραιες συντεταγμένες.

5. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ και έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό **λ** με τον οποίο όταν διαιρεθούν οι αριθμοί **43** και **78** αφήνουν υπόλοιπο **1**.
6. Θεωρούμε τους ακεραίους της μορφής **α=6κ+υ** με $0 \le υ < 6$ και **κ** ακέραιος. Να δειχθεί ότι :
   α) Οι παραπάνω ακέραιοι **α** που δεν είναι πολλαπλάσια του **2** ή του **3** παίρνουν τη μορφή **α=6κ+1** ή τη μορφή **α=6κ+5**, όπου **κ** ακέραιος.
   β) Το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος **(α)** μπορεί να πάρει τη μορφή : $α^2=3μ+1$, όπου **μ** ακέραιος.
   γ) Η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος **(α)** είναι πολλαπλάσιο του **3**.
7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο **ν** ισχύει ότι :
   α) $3^{3ν}+51=πολ\ 26$.
   β) $3^{3ν}-1=πολ\ 26$.
8. Εάν **x**, **y**, **ρ** ακέραιοι και οι αριθμοί x^3-y και y^3-x είναι πολλαπλάσια του **ρ** να δειχθεί ότι οι διαιρέσεις των yx^3+xy^3 και x^2+y^2 με το **ρ** δίνουν το ίδιο υπόλοιπο.
9. Εάν **α** ακέραιος να δειχθεί ότι ο αριθμός **3α-2** δεν είναι πολλαπλάσιο του **6**.
10. Έστω **α**, **β** ακέραιοι αριθμοί τέτοιοι ώστε ο αριθμός **13-α** να είναι διαιρέτης του **11α+13β**. Να δειχθεί ότι $(13-α)|(13+α)(11+β)$.
11. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι **α**, **β** για τους οποίους ισχύει ότι : $(13+15β)(5α+7β-15)=56$.
12. Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού $2001^{κ}+99^{2ν+1}$ με **κ**, **ν** φυσικοί διαφορετικοί του μηδενός.
13. Έστω **α**, **β** δύο ακέραιοι αριθμοί για τους οποίους ισχύει ότι **10α+β=πολ7**. Να δειχθεί ότι :
   α) **3α+β=πολ7**.
   β) Εάν **α=β** τότε **α=πολ7**.
   γ) Εάν $α \neq β$ τότε το κλάσμα $\dfrac{2α^2 - β^2}{α^3 - β^3}$ απλοποιείται με το **7**.

14. Να βρεθούν οι θετικοί ακέραιοι **α**, **β**, **γ** εάν γνωρίζουμε ότι ο αριθμός **α** διαιρούμενος με το **β** δίνει πηλίκο **7** και υπόλοιπο **2**, ενώ η διαίρεση του **γ** με το **12** δίνει πηλίκο **α** και υπόλοιπο **3β**.

15. Να δειχθεί ότι για κάθε ακέραιο **κ** ο αριθμός $\dfrac{(\kappa^3-\kappa)(2\kappa^2+5\kappa-3)}{5}$ είναι ακέραιος.

16. Να δειχθεί ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι **α**, **β** τέτοιοι ώστε $4\alpha^2-\beta^2=2201$.

17. Ένας ακέραιος αριθμός **α** όταν διαιρείται με το **3** δίνει υπόλοιπο **1**, ενώ όταν διαιρείται με το **5** δίνει υπόλοιπο **3**. Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του **α** με το **15**.

18. Να δειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο **ν** ο αριθμός $6^{2\nu}+3^{\nu+2}+3^{\nu}$ είναι πολλαπλάσιο του **11**.

19. Έστω **α**, **β** ακέραιοι τέτοιοι ώστε **3α–β=πολ5**. Να δειχθεί ότι ο αριθμός **25** είναι διαιρέτης του αριθμού $3\alpha^2+8\alpha\beta-3\beta^2$.

20. Να βρεθούν δύο ακέραιοι **α**, **β** με άθροισμα **420** εάν είναι γνωστό ότι για τα πηλίκα π_1, π_2 των διαιρέσεων **α :15** και **β :12** ισχύει ότι $\pi_1-\pi_2=8$.

21. Να βρεθεί ο θετικός ακέραιος **α** όταν γνωρίζουμε ότι οι αριθμοί **492** και **417** διαιρούμενοι με το **α** αφήνουν το ίδιο υπόλοιπο **12**.

22. Δίνονται οι θετικοί ακέραιοι $\alpha=2\kappa^2+3$ και $\beta=4\kappa-1$, $\kappa\in\mathbb{N}^*$. Να δειχθεί ότι εάν ο αριθμός **(α+β)|8** είναι ακέραιος τότε ο **κ** είναι περιττός.

23. Να δειχθεί ότι για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι : $\sqrt[\nu]{\nu}\le\sqrt[3]{3}$.

24. Θεωρούμε δύο ακέραιους αριθμούς **α** και **β** και τους αριθμούς $x=3\alpha+4\beta$ και $y=2\alpha+\beta$. Να δειχθεί ότι $5|x$ εάν και μόνο εάν $5|y$.

25. Να δειχθεί ότι για κάθε **α**, **υ** ακέραιους και για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι : $(\pi o\lambda.\alpha+\upsilon)^{\nu}=\pi o\lambda.\alpha+\upsilon^{\nu}$.

26. Έστω οι θετικοί ακέραιοι **α** και **β** τέτοιοι ώστε $\beta=\alpha^2+81$.

α) Να βρεθούν τα δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης του **β** με το **4**.

β) Εάν ισχύει ότι $\beta=x^2$, $x\in\mathbb{N}^*$, να βρεθεί ο αριθμός **β**.

27. Έστω οι ακέραιοι $\alpha=\nu^2+2\nu$ και $\beta=\nu+4$, $\nu\in\mathbb{N}^*$.

α) Να δειχθεί ότι ο ακέραιος **α+β** είναι άρτιος.

β) Εάν **β|α** να βρεθεί κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

28. Έστω ο ακέραιος $\alpha=6\kappa+15$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

α) Να βρεθούν τα υπόλοιπα της διάιρεσης του **α** με το **3** και με το **6**.

β) Να δειχθεί ότι ο α^2 είναι της μορφής $\alpha^2=72\mu+9$, $\mu\in\mathbb{Z}$.

γ) Να βρεθούν τα πιθανά υπόλοιπα της διαίρεσης του **α** με το **12**.

29. Έστω $\mathbf{\nu \in N^*}$ και $\mathbf{\alpha=\nu^2+\nu+1}$, $\mathbf{\beta=\nu^2-\nu+1}$.

α) Να δειχθεί ότι ο αριθμός **α** είναι περιττός.

β) Εάν $\mathbf{\delta \in N^*}$ με $\mathbf{\delta|\alpha}$ και $\mathbf{\delta|\beta}$, να δειχθεί ότι $\mathbf{\delta=1}$.

30. Έστω οι ακέραιοι $\mathbf{\alpha=3\kappa+5}$ και $\mathbf{\beta=3\lambda+7}$ με $\mathbf{\kappa, \lambda \in Z}$.

α) Να δειχθεί ότι $\mathbf{\alpha^2-\beta^2=}$**πολ.3**.

β) Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $\mathbf{\alpha^2+\beta^2}$ με το **3**.