ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ.Π. ΚΕΦ 1,2,3

‘Ασκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-2ax^2+a^2x-2, \quad x\in R, \quad a\in N^*.$

α. Να εξετάσετε την f ως προς τα ακρότατα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο (1,f(1)).

γ. Αν το α παίρνει τιμές που προκύπτουν από τη ρίψη ενός αμερόληπτου ζαριού να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

Α: "η εφαπτομένη της C_f στο Α διέρχεται από την αρχή των αξόνων"

Β: " η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι παράλληλη στον άξονα x'x"

‘Ασκηση 2

Εξετάζουμε ένα δείγμα 40 εργατών με προϋπηρεσία 10 έως 20 χρόνια. Γνωρίζουμε ότι 4 εργάτες έχουν προϋπηρεσία κάτω από 12 χρόνια, 12 κάτω από 14, 6 μεγαλύτερη ή ίση των 18 χρόνων και 16 μεγαλύτερη ή ίση των 16 χρόνων.

α.Να παραστήσετε τα δεδομένα σε πίνακα συχνοτήτων.

β.Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο της κατανομής αυτής.

γ.Αν υποτεθεί ότι το 20 % των εργατών με τη μεγαλύτερη προϋπηρεσία θα συνταξιοδοτηθεί, τότε από πόσα χρόνια προϋπηρεσία και πάνω θα είναι οι εργάτες αυτοί;

δ.Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το δείγμα αυτών των 40 εργατών ως προς την προϋπηρεσία τους. Πώς χαρακτηρίζεται αυτό και γιατί;

‘Ασκηση 3

Ένα εργοστάσιο ζαχαροπλαστικής παρασκευάζει μεταξύ άλλων ταψάκια γαλακτομπούρεκου. Υπολογίστηκε ότι η παρασκευή x ταψιών την εβδομάδα κοστίζει περίπου

$$\left(\frac{x^2+100x+100}{12000}\right)\text{ευρώ}$$

Αν η τιμή πώλησης του ταψιού είναι $\left(3-\frac{x}{6}\right)$ ευρώ

πόσα ταψάκια πρέπει να παράγει την εβδομάδα, ώστε να έχει το μεγαλύτερο δυνατό κέρδος;

<u>'Ασκηση 4</u>

Δίνεται η συνάρτηση

$f(t) = 2t + m, \quad t \in R$ **όπου η παράμετρος m είναι πραγματικός αριθμός.**

Μια επιχείρηση έχει έσοδα

$E(t) = (t-1)f(t), \quad t \geq 0$

σε εκατομμύρια δραχμές και t ο χρόνος σε έτη. Το κόστος λειτουργίας της επιχείρησης σε εκατομμύρια ευρώ δίνεται από τον τύπο

$K(t) = f(t+4), \quad t \geq 0.$

α) Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους P(t), t≥0, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια ευρώ.

β) Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη;

γ) Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους;

<u>'Ασκηση 5</u>

α) Να βρείτε σημείο M(x,ψ) της γραφικής παράστασης της f με

$f(x) = \sqrt{x}$

που απέχει από το σημείο A(9/2, 0) τη μικρότερη απόσταση και να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην ευθεία AM.

<u>'Ασκηση 6</u>

α) Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 - x + 1$

Να βρεθεί το α ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο x_0 με

$$x_0 = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1}$$

<u>‘Ασκηση 7</u>
Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \alpha(x+1)^2,\ \ x \in R,\ \ \alpha \in R.$$

α) Να βρείτε την f΄(x).

β) Να προσδιορίσετε το α, ώστε ο συντελεστής διευθύνσεως της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f, στο σημείο (1, f (1)) να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας.

<u>‘Ασκηση 8</u>
Έστω τα σημεία Α(x,y), Β(3x,y), Γ(3x,3y), Δ(x,3y) τα οποία αποτελούν κορυφές ορθογωνίου παραλληλόγραμμου.

α) Να εκφραστεί το εμβαδόν του παραλ/μου ως συνάρτηση του x, αν γνωρίζουμε ότι x+y=1 και να βρεθεί η θέση x_0 στην οποία παρουσιάζεται το μέγιστο εμβαδό.

β) Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β για τα οποία ισχύουν

$$P(A) = x_0 \ \text{ και } P(B) = \frac{3}{2}x_0$$

ι) Να αποδειχθεί ότι

$$\frac{1}{4} \le P(A \cap B) \le \frac{1}{2}$$

ιι) Αν η Ρ(Α∩Β) πάρει την ελάχιστη τιμή της, να υπολογισθεί η πιθανότητα Ρ(ΑυΒ) και να εξηγηθεί η σημασία του ενδεχομένου ΑυΒ, καθώς και να υπολογισθεί η

$$P\big((A-B) \cup (B-A)\big)$$

ιιι) Αν η P(A∩B) πάρει την μέγιστη τιμή της, να υπολογισθούν οι πιθανότητες P(AυB) και P(B-A).

<u>‘Ασκηση 9</u>

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση y = 2x −1.

<u>‘Ασκηση 10</u>

Οι χρόνοι που χρειάστηκαν 7 μαθητές για να λύσουν ένα πρόβλημα στατιστικής ήταν:

6, 3, x, 2, 1, 2, 4 σε λεπτά, x θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από την συνάρτηση

$$S^2(x) = \frac{6x^2-36x+166}{49}$$

β. Να βρείτε την τιμή του x, ώστε οι παρατηρήσεις να έχουν όσο γίνεται μικρότερη διασπορά.

γ. Αν το x παίρνει τιμές από το σύνολο Ω = {1,2,3,... 50} να υπολογίσετε την πιθανότητα

του ενδεχομένου

$$A = \{\text{ Η τυπική απόκλιση είναι μικρότερη από } \frac{\sqrt{166}}{7}\}$$

<u>‘Ασκηση 11</u>

Σε ένα δείγμα μιας ποσοτικής μεταβλητής έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^{\nu} t_i = 4\sqrt{30}, \quad \text{και} \quad s = \sqrt{5}.$$

Να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος αν ν>10.

<u>'Ασκηση 12</u>

Σε μια πόλη η πιθανότητα ένας κάτοικος να οδηγεί αυτοκίνητο είναι 1/3, να οδηγεί μοτοσυκλέτα είναι 1/5 και η πιθανότητα να μην οδηγεί τίποτα είναι 7/15. Αν το πλήθος εκείνων που οδηγούν και τα δύο είναι 100, πόσους κατοίκους έχει η πόλη;

<u>'Ασκηση 13</u>

Η τιμή πώλησης ενός μηχανικού εξαρτήματος είναι 1.000 ευρώ. Το κόστος του συναρτήσει του χρόνου κατασκευής (σε ώρες) προσεγγίζεται από τον τύπο της συνάρτησης:

$$K(t) = t^2 + 250t^{-1}$$

α) Πότε πραγματοποιήθηκε το μέγιστο κέρδος;

β) Πόσο είναι αυτό;

<u>'Ασκηση 14</u>

Σε 20 γραπτά μαθητών η μέση τιμή των βαθμών του Α βαθμολογητή είναι 15. Ο Β βαθμολογητής έβαλε 1 μονάδα λιγότερη σε 12 γραπτά και 3 μονάδες περισσότερες σε 3 γραπτά. Να βρεθεί η μέση τιμή των βαθμών του Β βαθμολογητή.

<u>'Ασκηση 15</u>

Να αποδειχθεί ότι για κάθε ενδεχόμενο Α ισχύει

$$\alpha) P^2(A) + P^2(A') \geq \frac{1}{2}$$

$$\beta) P^4(A) + P^4(A') \geq \frac{1}{8}$$

Μπορεί να βγει κάποιο συμπέρασμα για το άθροισμα

$$P^n(x) + P^n(1-x),$$

<u>‘Ασκηση 16</u>

αν η θετικός αριθμός

Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x’x η εφαπτομένη της καμπύλης, που είναι γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = -2x^2 + x - 3$$

στο σημείο

$$\left(\frac{1}{4}, f\left(\frac{1}{4}\right)\right)$$

<u>‘Ασκηση 17</u>

Μια βιομηχανία συσκευάζει γάλα σε 4 μεγέθη κουτιών και σε ποσοστά 10%, 20%, 30%, 40% με αντίστοιχο κόστος συσκευασίας 16, 12, 8, 4 λεπτά ανά κουτί.

α) Να βρεθεί το μέσο κόστος συσκευασίας και η τυπική απόκλιση του κόστους αυτού

β) Αν το κόστος κάθε συσκευασίας αυξηθεί κατά 10% να βρεθεί η νέα τυπική απόκλιση του κόστους συσκευασίας

<u>‘Ασκηση 18</u>

Να αποδειχθεί ότι αν Α, Β είναι δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου, τότε θα ισχύει

$$P(A' \cap B') \geq 1 - P(A) - P(B)$$

<u>‘Ασκηση 19</u>

Έστω Α, Β ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με P(A)<P(B) και η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x - 4, \quad x \in R.$$

Αν P(A), P(B) είναι οι τιμές των τοπικών ακρότατων της f να βρείτε τα P(A), P(B) και να εξετάσετε αν τα Α και Β είναι ασυμβίβαστα.

‘Ασκηση 20

Μια βιομηχανία κατασκευάζει λαμπτήρες με μέσο χρόνο ζωής 1800 ώρες, και τυπική απόκλιση s=150 ώρες. Η κατανομή των λαμπτήρων ως προς τον χρόνο ζωής είναι κανονική ή σχεδόν κανονική κατανομή.

Τι ποσοστό των λαμπτήρων αναμένεται να έχει χρόνο ζωής

α) το πολύ 1800 ώρες

β) πάνω από 1950 ώρες

γ) από 1500 έως 1950 ώρες

δ) κάτω από 1500 ώρες

‘Ασκηση 21

Η ενέργεια W(t), που αποδίδεται από ένα πηνίο, μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τον τύπο της συνάρτησης:

$W(t) = 6t^2 - t^4$ **και μετριέται σε Joules.**

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ενέργειας ως προς το χρόνο (την ισχύ του πηνίου) τη χρονική στιγμή $t = t_0$.

β) Σε ποια χρονική στιγμή το πηνίο έχει μέγιστη ισχύ;

γ) Ποια είναι η μέγιστη ισχύς;

‘Ασκηση 22

Η θέση ενός κινητού που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται από τον τύπο

$S(t) = t^3 - 30t^2 + 288t + 21$ **όπου t ο χρόνος σε sec και S το διάστημα σε cm.**

α) Να βρείτε την ταχύτητα του κινητού σε χρόνο t.

β) Πότε το σώμα είναι ακίνητο

γ) Πότε κινείται κατά τη θετική φορά και πότε κατά την αρνητική

δ) Πότε επιβραδύνεται

ε) Ποιο είναι το ολικό διάστημα που διένυσε το κινητό κατά τη διάρκεια των 15 πρώτων sec

<u>'Ασκηση 23</u>

Δίνεται η συνάρτηση

$f(x)=(x+2)^2+1$

α. Να μελετήσετε την παραπάνω συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f, στο σημείο A(-1,f(-1))

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από την παραπάνω εφαπτομένη και τους άξονες xx' και yy'.

<u>'Ασκηση 24</u>

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f'(x) = (x-3)(x^2-9x+20), \quad x \in R.$$

α) Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

β) Έστω x_1, x_2,… ,x_6 οι τιμές μιας μεταβλητής X με $x_k=2k$, όπου k=1, 2, 3, 4, 5, 6 και αντίστοιχες συχνότητες v_1, v_2, …, v_6 με $v_1< v_2<v_3$ και $v_4=2v_1$, $v_5=v_3+v_1$, $v_6=v_2+v_5$ όπου v_1, v_2, v_3 οι τετμημένες των σημείων στα οποία η f παρουσιάζει ακρότατα. Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

<u>'Ασκηση 25</u>

Σε μια κανονική κατανομή, το 49,85% των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα (10,16). Να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

<u>'Ασκηση 26</u>

Η βαθμολογία των γραπτών 50 μαθητών κυμάνθηκε από 10 έως 20. Οι 50 βαθμοί χωρίστηκαν σε κλάσεις ίσους πλάτους για τις οποίες κατασκευάζοντας τα ιστογράμματα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων καθώς και το κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων παρατηρήθηκε ότι:

ι) Στο ιστόγραμμα συχνοτήτων το εμβαδόν του ορθογωνίου της κλάσης 10-12 ισούται με 5

ιι) Στο ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων, το ύψος του ορθογωνίου της κλάσης 16-18 είναι 20%

ιιι) Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων, το τόξο που αντιστοιχεί στην κλάση 14-16 είναι 144° .

Είναι επίσης γνωστό ότι οι μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 12 έως 14 είναι τετραπλάσιοι από τους μαθητές που το γραπτό τους βαθμολογήθηκε από 18 έως 20,

να δείξετε ότι:

α) Το πλάτος της κάθε κλάσης είναι 2.

β) Οι μαθητές με βαθμό από 18 έως 20 είναι 3.

γ) Να γίνει πίνακας κατανομής συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων και να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος.

δ) Να υπολογιστεί, επιλέγοντας τυχαία έναν από τους παραπάνω μαθητές, η πιθανότητα το γραπτό του να έχει βαθμολογηθεί με βαθμό μεγαλύτερο από 15.

<u>‘Ασκηση 27</u>

Το μέσο ύψος 70.000 μαθητών της Γ′ λυκείου είναι x = 172cm και η τυπική απόκλιση είναι s = 7cm . Η κατανομή των μαθητών ως προς το ύψος είναι περίπου κανονική.

α) Να αποδείξετε ότι το δείγμα των μαθητών της Γ′ λυκείου έχει ομοιογένεια ως προς το ύψος.

β) Να εκτιμήσετε πόσοι μαθητές της Γ′ λυκείου έχουν ύψος μεταξύ 165cm και 179cm .

γ) Επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή της Γ′ λυκείου να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α={ το ύψος του μαθητή είναι μεταξύ 165cm και 193cm }.

δ) Αν κατά την μέτρηση του ύψους όλων των μαθητών είχε από λάθος μετρηθεί 2cm περισσότερο από το πραγματικό να βρείτε πόσο είναι το «πραγματικό» μέσο ύψος.

ε) Λαμβάνοντας υπόψη τα «πραγματικά» στοιχεία του ύψους των μαθητών, το δείγμα σε αυτήν την περίπτωση είναι περισσότερο ή λιγότερο ομοιογενές από το δείγμα για το οποίο είχαμε λάβει υπόψη τα «πλασματικά» στοιχεία του ύψους;

<u>‘Ασκηση 28</u>

Αν για μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ **ισχύει για κάθε** $x \in (0,+\infty)$

$$f(x^2)+f(x^3)=2\ln x+4$$

α) Να βρεθούν τα f(1) και f΄(1).

β) Να βρεθεί το

$$\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot f(x)-2}{x^2-1}$$

<u>‘Ασκηση 29</u>
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}(\lambda^3-2\lambda^2+\lambda+1)x^2 & ,x<1\\ x^3-x-1+2\lambda & ,x\geq 1\end{cases}$$

Αν Ω είναι το σύνολο τιμών του λ, ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0=1 και Ω ο δειγματικός χώρος πειράματος τύχης με ισοδύναμα ενδεχόμενα.

Έστω Α το σύνολο τιμών του λεΩ έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0=1. Να βρεθεί το P(A).

<u>‘Ασκηση 30</u>
Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=x^2+2,\quad x\in R.$$

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, f(1)).

β) Έστω σημείο Β(10, 0). Να βρεθεί το σημείο Μ(x,y) της εφαπτομένης (ε) το οποίο να απέχει ελάχιστη απόσταση από το Β.

γ) Έστω $K_1(x_1,y_1)$, $K_2(x_2, y_2)$, …, $K_\nu(x_\nu, y_\nu)$ σημεία της εφαπτομένης (ε). Αν η μέση τιμή των τεταγμένων των σημείων είναι 11, να βρεθεί η μέση τιμή των τετμημένων τους.

δ) Έστω ευθεία (η) παράλληλη στην εφαπτομένη (ε), η οποία διέρχεται από το σημείο Γ(0, $-\kappa^2$-4) με κ στοιχείο του δειγματικού χώρου Ω={0, 1, …, 20}, ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Δ: η ευθεία (ε) να διέρχεται και από το σημείο Β(10, 0).

<u>‘Ασκηση 31</u>

Δύο φίλοι Α και Β λύνουν ένα πρόβλημα μαθηματικών. Η πιθανότητα να το λύσει τουλάχιστον ένας από τους δύο είναι 3/4, ενώ η πιθανότητα να το λύσουν και οι δύο είναι 1/4. Αν η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Α είναι 2/3 να υπολογιστεί:

α) Η πιθανότητα να μην λύσει το πρόβλημα ο Β

β) Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Β

γ) η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα μόνο ο Α ή μόνο ο Β

<u>'Ασκηση 32</u>
Το πλήθος σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια των πωλήσεων μιας εταιρίας που παράγει ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δίνεται από την συνάρτηση

$$P(t)=\frac{400t}{t^2+25},\quad t\ge 0,$$

όπου t εκφράζει σε μήνες το χρόνο κυκλοφορίας του μοντέλου από την κυκλοφορία του στην αγορά.

α) Να βρείτε τις πωλήσεις του μοντέλου τον 10^{o} μήνα κυκλοφορίας του στην αγορά.

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των πωλήσεων της εταιρείας μετά από ένα μήνα από την κυκλοφορία στην αγορά ενός νέου μοντέλου.

γ) Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία οι πωλήσεις παίρνουν τη μέγιστη τιμή.

δ) Να βρεθεί η μέγιστη ποσότητα σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια που πουλά η εταιρία το μήνα που βρέθηκε στο β ερώτημα.

<u>'Ασκηση 33</u>
Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-\eta\mu\alpha}{x\cdot\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha},\quad \alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$$

Να αποδειχθεί ότι η παράσταση $\dfrac{f'(x)}{1+\left(f(x)\right)^2}$

είναι ανεξάρτητη του α.

<u>'Ασκηση 34</u>
Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & ,x\neq 1\\ 2\alpha-1 & ,x=1\end{cases}$$

α) Να βρεθεί το

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

β) Να βρεθεί το αєR, αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x=1.

<u>'Ασκηση 35</u>

Σε έρευνα που έγινα σε δείγμα 200 μαθητών σχετικά με το αν διαβάζουν αθλητικές στήλες ή άλλες στήλες, διαπιστώθηκαν τα εξής:

1) Το 60% διαβάζει αθλητικές στήλες και όχι άλλες στήλες

2) Το 80% δεν διαβάζει αθλητικές στήλες ή δεν διαβάζει άλλες στήλες

3) Το 80% διαβάζει μόνο αθλητικές στήλες ή μόνο άλλες στήλες

Να βρεθεί

α) η πιθανότητα ώστε εκλέγοντας τυχαία ένα μαθητή από τους παραπάνω, αυτός να διαβάζει και αθλητικές και άλλες στήλες.

β) η πιθανότητα ώστε εκλέγοντας τυχαία ένα μαθητή από τους παραπάνω, αυτός να διαβάζει αθλητικές στήλες.

γ) η πιθανότητα ώστε εκλέγοντας τυχαία ένα μαθητή από τους παραπάνω, αυτός να διαβάζει άλλες στήλες.

δ) το πλήθος των παραπάνω μαθητών που διαβάζουν άλλες στήλες και όχι αθλητικές.

<u>'Ασκηση 36</u>
Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 + 16x - 12, \quad x \in R.$$

α) Να βρεθεί ο λєR, αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α(1, -2).

β) Να βρεθεί το

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{(x-2)^2}$$

γ) Να μελετηθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της f.

δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (g(x)) στο σημείο Β(2, f(2)) και να εξετασθεί η διαφορά f(x)-g(x) ως προς το πρόσημο.

‘Ασκηση 37
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x\ln x - x.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο K(e,f(e)).

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Για τα ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω υποθέτουμε ότι

$A \subseteq B$ **και το A δεν είναι το αδύνατο ενδεχόμενο.**

Να αποδείξετε ότι: P(A)lnP(A)+ P(B) ≥ P(B)lnP(B) + P(A).

‘Ασκηση 38
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = s \cdot x^2 - \frac{\bar{x}}{10}x + 1,$$

όπου $\bar{x}, s$

αντίστοιχα η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση ενός δείγματος με μέση τιμή θετική. Αν η C_f διέρχεται από το A(1, 1) τότε

α) να υπολογιστεί ο C.V. του δείγματος και εξεταστεί το δείγμα ως προς την ομοιογένεια.

β) Να βρεθούν αν υπάρχουν τα ακρότατα της f .

γ) Αν ισχύει ότι $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = 1$

να υπολογιστεί η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του δείγματος.

δ) Αν οι παρατηρήσεις του δείγματος ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή , να βρεθεί το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα (1 , 1,2) , καθώς και το εύρος R των τιμών του δείγματος .

‘Ασκηση 39

Σε μια Πανεπιστημιακή σχολή οι φοιτητές έχουν το δικαίωμα να επιλέξουν μέχρι δύο μαθήματα Επιλογής τα A και B. Η πιθανότητα ένας φοιτητής να επιλέξει και τα δύο μαθήματα είναι 20%, η πιθανότητα να

έχει επιλέξει μόνο το μάθημα Α είναι 30% και η πιθανότητα να έχει επιλέξει το μάθημα Β είναι 60%. Να υπολογίσετε:

α) Την πιθανότητα να μην επιλέξει κανένα μάθημα.

β) Την πιθανότητα να μην επιλέξει το μάθημα Α.

γ) Την πιθανότητα να επιλέξει μόνο ένα μάθημα.

δ) Αν το πλήθος των φοιτητών που επέλεξαν μόνο το μάθημα Β είναι 240, να εκτιμήσετε το πλήθος των φοιτητών της σχολής