

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ.Π. ΚΕΦ 1

Άσκηση 1

α) Να αποδειχθεί ότι για όλα τα x ισχύει $e^x + e^{-x} \geq 2$

Να βρεθεί πότε ισχύει η ισότητα.

β) Να αποδειχθεί ότι αν $a > b$ τότε ισχύει $e^a + e^{-a} - 2a \geq e^b + e^{-b} - 2b$

Άσκηση 2

Η θετική αντίδραση ενός οργανισμού σ' ένα φάρμακο περιγράφεται (δίνεται) από τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = x^2(a - x)$, $a > 0$

σταθερά και x η ημερήσια δόση του φαρμάκου σε mg. Ποια είναι η ενδεδειγμένη ποσότητα δόσης του φαρμάκου ώστε να έχουμε τη μεγαλύτερη θετική αντίδραση του οργανισμού;

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa x^2 + \lambda x + 3$, $x \in \mathbb{R}$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα κ, λ ώστε η f να έχει στη θέση $x=1$ τοπικό ακρότατο ίσο με -2 .

β) Τι είδους ακρότατο παρουσιάζει η συνάρτηση στη θέση $x=1$;

Άσκηση 4

Για ποια τιμή του a η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 + ax + 1$

παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=1$, και ποιο είναι το είδος του ακρότατου;

Άσκηση 5

Για τους αριθμούς x, y ισχύει ότι $2x - 3y = 5$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης $x^2 + 3y^2 + xy$

Άσκηση 6

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + \frac{1}{2}x(\eta\mu(\ln x) - \sigma\upsilon\nu(\ln x))$

είναι γνησίως αύξουσα

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2}{x^2}$, $x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

α) Να αποδειχθεί ότι $f'(\alpha) = -\frac{4}{\alpha^3}$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

β) Να προσδιορίσετε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στο σημείο $(\alpha, \frac{2}{\alpha^2})$ της γραφικής παράστασης της f .

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και η ευθεία

$$y = 3x + 1, x \in \mathbb{R}$$

Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η ευθεία $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2.

Άσκηση 9

Έστω $f(x) = x^2 + x - 1$ και (ε) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(-\frac{3}{4}, f(-\frac{3}{4}))$.

Να βρεθεί εφαπτομένη της C_f που να είναι κάθετη στην (ε) .

Άσκηση 10

Ένας πληθυσμός μικροβίων P μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες) σύμφωνα με τον τύπο $P(t) = 10^3 - 5 \cdot 10^2 (1+t)^{-1}$.

- Να βρείτε τον αρχικό αριθμό μικροβίων ($t = 0$).
- Να βρείτε τον αριθμό των μικροβίων όταν $t = 9$ ώρες.
- Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του πληθυσμού των μικροβίων ως προς το χρόνο, όταν $t = 9$ ώρες.

Άσκηση 11

Έστω $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$. Σε ποια σημεία της C_f οι εφαπτόμενες της είναι παράλληλες στον άξονα x' .

Άσκηση 12

Η θέση ενός κινητού, που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε sec) από τον τύπο $S(t) = 3t^2 - t$. Να βρείτε:

- τη μέση ταχύτητα του κινητού στο χρονικό διάστημα $[2, 4]$ sec
- τη στιγμιαία ταχύτητα του κινητού, όταν $t = 3$ sec (3 sec μετά την εκκίνησή του).

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1, x \in R$

- Να βρείτε την $f'(0)$.
- Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο με $x = 0$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(0, f(0))$.

Άσκηση 14

Για ποιες τιμές των α, β η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + 2$, διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 9)$ και $B(2, 6)$;

Άσκηση 15

Οι κάθετες πλευρές AB, AG ενός ορθογωνίου τριγώνου ABG ($A = 90^\circ$) μεταβάλλονται έτσι ώστε το εμβαδό του να παραμένει σταθερό και ίσο με 12

m^2 . Να εκφράσετε το μήκος x της πλευράς AB , ως συνάρτηση του μήκους y της πλευράς AG .

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x, x \in \mathbb{R}$. Να βρεθούν τα διαστήματα που η f είναι α) αύξουσα β) φθίνουσα

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1, x \in \mathbb{R}$

α) Να βρεθεί η $f'(x)$.

β) Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=x+3$.

Άσκηση 18

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = a(x+1)^2, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την $f'(x)$.

β) Να προσδιορίσετε τον a , ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(1, f(1))$ να είναι 4.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της παραπάνω εφαπτομένης ευθείας

Άσκηση 19

Έστω $f(x) = x(x+1)(x+2)$. Να βρεθεί η γωνία που σχηματίζει με τον x' η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της που έχει τετμημένη ίση με -1 .

Άσκηση 20

Αν είναι $f(x) = 1 + \sqrt{x}$ να βρεθούν τα όρια

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$$

Άσκηση 21

Να προσδιορίσετε τον αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{ae^x + e^{-x}}{e^x + 1},$$

να έχει εφαπτομένη στη θέση $x_0 = \ln 3$, κάθετη στην ευθεία

με εξίσωση $y = -3x + 3$. Κατόπιν να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης.

Άσκηση 22

Για τη συνάρτηση $f(x)$ είναι γνωστό ότι είναι συνεχής στο 2 και ότι $f(2)=5$. Να υπολογισθεί το

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(f^2(x) - 25)(x^2 - 4)}{(f(x) - 5)(x - 2)}.$$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + 1, x \in R$

Να βρεθούν

α) Η $f'(x)$.

β) Τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης, στα οποία οι εφαπτόμενες σ' αυτήν, είναι παράλληλες στον άξονα x'

Άσκηση 24

Η ταχύτητα, ενός κινητού, που κινείται ευθύγραμμα, συναρτήσει του χρόνου t (σε sec), δίνεται από τον τύπο $u(t) = 3t^2 - 5$.

α) Να εκφράσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t , όταν $t = t_0$.

β) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ταχύτητας (επιτάχυνση) του κινητού ως προς t , όταν $t = 10$ sec (10 sec μετά την εκκίνησή του).

Άσκηση 25

Έστω η ευθεία $y = x - 3$. Βρείτε το σημείο της ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων του από τα σημεία $A(1,1)$ και $B(1,5)$ να είναι ελάχιστο.

Άσκηση 26

Έστω η συνάρτηση $g(x) = -\alpha x^2 + \beta x - 1$.

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η ευθεία $y = -2x + 5$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της g στο σημείο $M(-1, 1)$.