

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ.Π. ΚΕΦ 3

#### Άσκηση 1

Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα δειγματικού χώρου  $\Omega$  με πιθανότητες  $P(A)=0,8$  και  $P(B)=0,4$ . Να αποδείξετε ότι:

α. τα  $A$  και  $B$  δεν είναι ασυμβίβαστα

β.  $0,2 \leq P(A \cap B) \leq 0,4$

#### Άσκηση 2

Ρίχνουμε ένα ζάρι και μετά τραβάμε ένα χαρτί από μια τράπουλα. Ποια η πιθανότητα το ζάρι να δείξει 4 και το τραπουλόχαρτο να είναι

α. 4 μπαστούνι

β. οποιοδήποτε από τα 4άρια

#### Άσκηση 3

Στους τελικούς του πρωταθλήματος μπάσκετ μετέχουν οι ομάδες  $A, B, \Gamma, \Delta$ . Η  $A$  έχει τριπλάσιες πιθανότητες να πάρει το πρωτάθλημα από ό,τι η  $B$ , η  $B$  έχει τριπλάσιες πιθανότητες από ό,τι η  $\Gamma$ , και η  $\Gamma$  διπλάσιες από ό,τι η  $\Delta$ .

Τι πιθανότητα έχει να πάρει το πρωτάθλημα η  $\Delta$ ;

#### Άσκηση 4

Ένα κουτί περιέχει 40 λευκές κάρτες ( $L$ ) και άγνωστο πλήθος από πράσινες ( $\Pi$ ) και μπλε ( $M$ ). Αν η πιθανότητα να επιλεγεί τυχαία μια πράσινη κάρτα είναι 25% και μια μπλε κάρτα 35% να βρεθούν:

α. το πλήθος όλων των καρτών στο κουτί

β. πόσες πράσινες και πόσες μπλε κάρτες υπάρχουν στο κουτί.

#### Άσκηση 5

Έστω  $A, B$  ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , ώστε

$$|2P(A) + 1| - |P(A) - 3| = 4\lambda$$

και

$$P(B) = 1 - \ln(\kappa + 1), \quad \text{όπου } \kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Να υπολογισθούν οι αριθμοί  $\kappa, \lambda$ .

#### Άσκηση 6

Σε ένα σκοτεινό δωμάτιο υπάρχουν 2 ζευγάρια ίδια μαύρα γάντια και 1 ζευγάρι καφέ γάντια. Επιλέγοντας στην τύχη 3 γάντια, ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει ζευγάρι του ίδιου χρώματος;

#### Άσκηση 7

Πόσα τρίγωνα ορίζονται από  $n$  σημεία (ανά 3 μη συνευθειακά);

#### Άσκηση 8

Έστω  $\Omega$  δειγματικός χώρος που αποτελείται από το σύνολο των ριζών της εξίσωσης

$$(x - 10)(x - 11) \dots (x - 20) = 0.$$

Αν το  $\Omega$  αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και  $\lambda \in \Omega$ , να βρεθεί η πιθανότητα η εξίσωση  $y^2 - 8y + \lambda = 0$  να μην έχει πραγματικές ρίζες.

#### Άσκηση 9

Σε ένα σχολείο υπάρχουν  $\mu$  Έλληνες και  $\nu$  ξένοι μαθητές, με  $\mu < \nu$ .

α. Επιλέγουμε ένα μαθητή του σχολείου τυχαία. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι Έλληνας;

β. Πόσοι Έλληνες πρέπει να έρθουν ακόμα στο σχολείο αυτό, ώστε η πιθανότητα του πρώτου ερωτήματος να διπλασιαστεί;

#### Άσκηση 10

Σε ένα σχολείο A η πιθανότητα, με τυχαία επιλογή, να επιλέξουμε αγόρι μαθητή είναι 0,32. Σε ένα κοντινό σχολείο B με τριπλάσιο αριθμό μαθητών η αντίστοιχη πιθανότητα είναι 0,67.

Τα δύο σχολεία συγχωνεύονται χωρίς να φύγει κανένας μαθητής. Ποια είναι η πιθανότητα, στο νέο σχολείο, να επιλέξουμε αγόρι μαθητή;

#### Άσκηση 11

Τραβάμε συγχρόνως δύο χαρτιά από μια τράπουλα 52 χαρτιών. Ποια η πιθανότητα να είναι και τα δύο δεκάρια;

Αν  $X$  ενδεχόμενο του δειγματικού χώρου  $\Omega$  και

$$|P(X) + 2| - |P(X) - 3| = 8\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{να δείξετε ότι} \quad |\lambda| \leq \frac{1}{8}.$$

#### Άσκηση 12

Να αποδειχθεί ότι αν A, B είναι δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε θα ισχύει

α.  $P(A' \cap B') \geq 1 - P(A) - P(B)$

β.  $P(A \cap B) \leq P(A) \cdot P(B) + P(A' \cap B')$

#### Άσκηση 13

Να αποδειχθεί ότι για κάθε ενδεχόμενο A, ισχύει

α.  $P^2(A) + P^2(A') \geq \frac{1}{2}$

β.  $P^4(A) + P^4(A') \geq \frac{1}{8}$

Ποιο συμπέρασμα μπορούμε να βγάλουμε για το άθροισμα

$$P^n(x) + P^n(1-x)$$

όπου n θετικός ακέραιος;

#### Άσκηση 14

Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$  ισχύει ότι

$$P(A - B) = 0,6 \quad \text{και} \quad P(B - A) = 0,4.$$

Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A, B είναι ασυμβίβαστα.

### Άσκηση 15

Σε ένα σχολείο η πιθανότητα ένας μαθητής να παίζει ποδόσφαιρο είναι  $1/3$ , η πιθανότητα να παίζει μπάσκετ είναι  $1/5$  και η πιθανότητα να μην παίζει τίποτα από τα δύο είναι  $7/15$ .

Αν υπάρχουν 25 μαθητές που παίζουν και τα δύο αθλήματα, πόσους μαθητές έχει το σχολείο;

### Άσκηση 16

Να αποδειχθεί ότι για δύο ενδεχόμενα  $A, B$  με  $P(A) > 0$  ισχύει

α.  $A \subseteq B \Rightarrow P(B | A) = 1$

β.  $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(B | A) = \frac{P(B)}{2P(A)}$

### Άσκηση 17

Έστω ένα δείγμα μεγέθους  $n$  με διάμεσο  $\delta$ . Επιλέγουμε τυχαία ένα στοιχείο του δείγματος, και έστω  $x$  η τιμή του.

Να αποδειχθεί ότι τα ενδεχόμενα

$$\{x \leq \delta\}, \quad \{x \geq \delta\}$$

έχουν ίσες πιθανότητες.

### Άσκηση 18

Σε μια τάξη της Β΄ Λυκείου υπάρχουν 20 αγόρια και 9 κορίτσια. Από τα αγόρια το  $1/4$  και από τα κορίτσια το  $1/3$  είναι άριστοι στα Μαθηματικά. Καλούμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια η πιθανότητα:

α) Να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.

β) Να είναι κορίτσι.

γ) Να είναι κορίτσι ή να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά.