ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕ ΕΠΙΛΟΓΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΕΣ

Βασίλης Καραγιάννης
M.Cs. στη Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών
Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
E-mail: vasilis_karagiannis@yahoo.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εισήγηση προτείνουμε ένα νέο είδος μαθηματικών προβλημάτων και διερευνούμε τη συνεισφορά τους στις μετά-δεξιότητες και την εννοιολογική ανάπτυξη. Τη φύση των προτεινόμενων προβλημάτων την καθορίζει η ενσωμάτωση ενός δομικού στοιχείου των πραγματικών προβλημάτων, η επιλογή δεδομένων. Η έρευνα είναι ποιοτική και διεξήχθη σε πραγματική τάξη σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας. Τα ευρήματα έδειξαν, ότι τα προτεινόμενα προβλήματα συνεισφέρουν, τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, οι μαθητές να κατέχουν τις απαιτούμενες βασικές γνωστικές δεξιότητες του προβλήματος και δεύτερον, να έχουν τη βούληση να συμμετάσχουν σε μαθηματικές δραστηριότητες υπό συνθήκες συνεργατικής μάθησης.

1. ΤΟ ΣΤΟΙΧΕΙΟ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΑΠΟ ΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υπάρχει μια ανατροφοδότηση ανάμεσα στη πραγματική ζωή και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Από τη μια, οι καταστάσεις της καθημερινότητας τροφοδοτούν με ιδέες το πώς διδάσκουμε μαθηματικά, από την άλλη, το τί μαθηματικά διδάσκονται οι μαθητές, έχει επίδραση στη δημιουργία βιώσιμων τρόπων προσαρμογής σε τομείς της εμπειρίας τους και στην αντιμετώπιση καθημερινών προβλημάτων, όχι μόνο κατά τη διάρκεια της σχολικής ζωής τους αλλά και μετ’ έπειτα.

Σε πολλά προβλήματα της καθημερινότητας, που η αντιμετώπισή τους δεν απαιτεί απαραίτητα μαθηματική γνώση, ενώ έχουμε στη διάθεσή μας μια σειρά δεδομένων που σχετίζονται με το πρόβλημα, χρησιμοποιούμε μόνο ένα μέρος από αυτά. Το ποια θα χρησιμοποιήσουμε εξαρτάται από τον τρόπο που σχεδιάζουμε να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα. Διαφορετικοί τρόποι αντιμετώπισης απαιτούν διαφορετικό συνδυασμό δεδομένων.

Η ιδέα είναι να μεταφέρουμε και να ενσωματώσουμε στο σχεδιασμό μαθηματικών δραστηριοτήτων το στοιχείο της επιλογής δεδομένων. Στα προβλήματα που προτείνουμε, ορισμένα από τα δεδομένα που απαιτούνται για την επίλυσή τους, επιλέγονται μέσα από ένα σύνολο δεδομένων από τον ίδιο το μαθητή. Τα προς επιλογήν δεδομένα είναι τέτοια ώστε διαφορετικοί συνδυασμοί επιλογών, επιτρέπουν διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης και μάλιστα κάθε στρατηγική επίλυσης σηματοδοτεί και διαφορετικό επίπεδο μαθηματικής σκέψης.

Το στοιχείο που διαφοροποιεί τα προτεινόμενα προβλήματα είναι η μη επιβεβλημένη χρήση όλων των δεδομένων. Κατά συνέπεια καταργείται η σχέση αντιστοίχισης ανάμεσα στο σύνολο των δεδομένων και τη λύση, παύει να ισχύει ο μονόδρομος που τα συνδέει και που προκαλεί αυτοματοποιημένες ενέργειες των μαθητών. Έτσι δίνεται χώρος για επιλογή και η διαδικασία επιλογής προϋποθέτει ερμηνεία και λήψη απόφασης.

Σύμφωνα με τον Glasersfeld (1983) θα ήταν λάθος να ισχυριστούμε ότι ένας οργανισμός που απλώς δρα και αντιδρά χωρίς να αναστοχάζεται, ερμηνεύει. Η ερμηνεία υποδηλώνει αντίληψη περισσότερων της μιας δυνατότητας, περίσκεψη, σκοπιμότητα και ορθολογιστικά ελεγχόμενη επιλογή. Δεν είναι αρκετό να γνωρίζει κανείς τι κάνει, αλλά να ξέρει γιατί αυτό που κάνει είναι σωστό.

Ο νομπελίστας ιατρικής Edelman (1992), υποστηρίζει ότι η διεργασία της επιλογής είναι χαρακτηριστικό του εγκεφάλου και ακριβώς αυτή η δυνατότητα διεργασίας διαφοροποιεί τα υποκείμενα ως προς τη μάθηση. Προτείνει μια επιλεκτική θεωρία της λειτουργίας του εγκεφάλου, τη θεωρία επιλογής νευρωνικών ομάδων (TNGS), η οποία εξηγεί το συνεχές προσαρμοστικό ταίριασμα των οργανισμών στα γεγονότα του περιβάλλοντος, ακόμα κι' αν αυτά δεν είναι δυνατόν να προβλεφτούν, δηλαδή ακόμη και όταν συνιστούν νεωτερισμούς του περιβάλλοντος.

Τα παραπάνω ενισχύουν την πρόθεσή μας να δημιουργήσουμε μαθηματικά προβλήματα, που η επίλυσή τους απαιτεί την επιλογή δεδομένων. Η ενσωμάτωση του στοιχείου της επιλογής δεδομένων, στοχεύει στο να δημιουργήσει καταστάσεις ελέγχου και συντονισμού των γνώσεων, σκόπιμης επιλογής και λήψης αποφάσεων. Για τη διδασκαλία που έχει ως βασικό συστατικό τα προτεινόμενα προβλήματα, πρωταρχικής σημασίας είναι η επιστημολογική αρχή της προσαρμογής, δηλαδή της επιλογής, παρά της αντιστοίχισης.

Το ακόλουθο πραγματικό πρόβλημα, θα λειτουργήσει ως οδηγός για τη μετάβαση στα μαθηματικά προβλήματα με επιλογή δεδομένων.

Πραγματικό πρόβλημα

Η προβληματική κατάσταση αφορά την κατασκευή ντουλαπιών στην κουζίνα του σπιτιού μας. Έχουμε ήδη αποφασίσει για το είδος του ξύλου και μετά από έρευνα αγοράς έχουμε στη διάθεσή μας τα εξής δεδομένα:

- *Μέτρηση διαστάσεων της κουζίνας από ειδικό: 50€*
- *Αγορά συναρμολογημένων ντουλαπιών: 1800€*
- *Τοποθέτηση ντουλαπιών από ειδικό: 300€*
- *Αγορά ξυλείας: 800€*
- *Κοπή ξυλείας σε κομμάτια που χρειαζόμαστε: 200€*
- *Μηχανικά εξαρτήματα (μεντεσέδες, πόμολα): 100€*

Περιγράφουμε τον τρόπο αντιμετώπισης τεσσάρων διαφορετικών ατόμων:

- Ο Α εκτιμά ότι μπορεί να μετρήσει τις διαστάσεις της κουζίνας, αλλά ότι δεν έχει την ικανότητα ούτε να κόψει την ξυλεία, ούτε να συναρμολογήσει τα ντουλάπια, ούτε να τα τοποθετήσει, οπότε αποφασίζει να αγοράσει έτοιμα τα ντουλάπια και να πληρώσει τον ειδικό να τα τοποθετήσει, κόστος 1800+300=2100€.

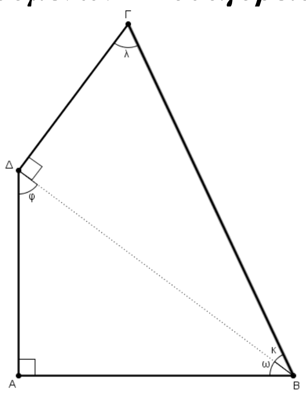
- Ο Β, αφού εκτίμησε τι μπορεί και τι δεν μπορεί να κάνει, αποφασίζει να αγοράσει την ξυλεία, να τη δώσει για κοπή, να αγοράσει τα μηχανικά εξαρτήματα και να καλέσει τον ειδικό για τοποθέτηση, κόστος 800+200+300+100=1400€.
- Ομοίως ο Γ αποφασίζει να αγοράσει τα μηχανικά εξαρτήματα και την ξυλεία και να τη δώσει για κοπή, κόστος 800+200+100=1100€.
- Ο Δ εκτιμά ότι μπορεί να τα κάνει όλα μόνος του, οπότε αποφασίζει να αγοράσει μόνο την ξυλεία και τα μηχανικά εξαρτήματα, κόστος 800+100=900€.

Διακρίνουμε τέσσερεις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης με διαφορετικό κόστος η καθεμία και παρατηρούμε ότι κάθε στρατηγική χρησιμοποιεί διαφορετικό συνδυασμό δεδομένων. Το κόστος για κάθε δεδομένο μπορούμε να το φανταστούμε ως κόστος πρόσβασης, ενώ το κόστος επίλυσης κάθε στρατηγικής, ως άθροισμα των κόστων πρόσβασης των δεδομένων που χρησιμοποιεί.
Αν κρίνουμε την ικανότητα κάθε εμπλεκόμενου στην κατασκευή των ντουλαπιών μέσω του τρόπου που αντιμετώπισε το πρόβλημα, παρατηρούμε ότι το επίπεδο ικανότητας σηματοδοτείται από το κόστος της στρατηγικής που εφάρμοσε. Όσο μικρότερο είναι το κόστος τόσο υψηλότερο είναι το επίπεδο ικανότητας.

Ενσωματώνοντας το στοιχείο της επιλογής δεδομένων και τη σύμβαση του κόστους πρόσβασης, όπως αυτά απορρέουν από το προηγούμενο πραγματικό πρόβλημα, ανασκευάζουμε ένα σύνηθες μαθηματικό πρόβλημα και το μετατρέπουμε σε πρόβλημα με επιλογή δεδομένων ως εξής:

Πρόβλημα με επιλογή δεδομένων «Πυθαγόρειο – Τριγωνομετρία»

Θέλουμε να περιφράξουμε τον κήπο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος, με συρματόπλεγμα το οποίο πωλείται σε ρολά των 3 μέτρων που το καθένα κοστίζει 25 €. Να υπολογίσετε το κόστος της περίφραξης.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Το μήκος της πλευράς ΑΒ= ......   (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΑΔ= ……   (κόστος 3)*
- *Το μήκος της πλευράς ΒΓ= ……   (κόστος 2)*
- *Το μήκος της πλευράς ΓΔ= ……   (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας κ= ……   (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας λ= ……   (κόστος 3)*
- *Το μέτρο της γωνίας ω= ……   (κόστος 2)*
- *Το μέτρο της γωνίας φ= …….   (κόστος 2)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Για την επίλυση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε οπωσδήποτε τα αρχικά δεδομένα, αλλά χρειαζόμαστε και κάποια από τα προς επιλογήν δεδομένα. Για να

αποκτήσουμε τη δυνατότητα πρόσβασης σε οποιοδήποτε από αυτά, πρέπει να «επωμιστούμε» το αντίστοιχο «κόστος πρόσβασης». Τα αρχικά δεδομένα μαζί με τα επιλεγμένα αποτελούν τα απαιτούμενα δεδομένα μιας στρατηγικής επίλυσης. Το άθροισμα των κόστων πρόσβασης εκφράζει το «κόστος επίλυσης» της συγκεκριμένης στρατηγικής.
Συνολικά οι διαφορετικοί τρόποι επίλυσης του προβλήματος είναι 41. Το μικρότερο κόστος επίλυσης είναι 6 και αντιστοιχεί σε δύο στρατηγικές: να ζητήσουμε πρόσβαση σε 3 δεδομένα, στο μήκος των πλευρών ΒΓ και ΓΔ και στο μέτρο της γωνίας ω ή φ, να εφαρμόσουμε πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΒΓΔ για να υπολογίσουμε την πλευρά ΒΔ και στη συνέχεια κατάλληλους τριγωνομετρικούς αριθμούς στο τρίγωνο ΑΒΔ για να υπολογίσουμε τις πλευρές ΑΒ και ΑΔ.

Επειδή η σύμβαση του κόστους πρόσβασης στα προτεινόμενα προβλήματα ιεραρχεί τις στρατηγικές επίλυσης μέσω ενός μηχανιστικού κριτηρίου, του κόστους, τίθεται το ερώτημα αν αυτό δημιουργεί συνθήκες ώστε η μάθηση να συντελείται μέσα σε αυστηρά συμπεριφοριστικά πλαίσια.
Δεδομένου ότι συμπεριφορισμός είναι το είδος του συνειρμισμού που θεωρεί ότι η μάθηση συντελείται μέσω της σύνδεσης μυϊκών αντιδράσεων με εξωτερικά ερεθίσματα (Βοσνιάδου 2001), πιστεύουμε ότι η σύμβαση του κόστους πρόσβασης δεν οδηγεί τη μάθηση σε συμπεριφοριστικά πλαίσια και θεωρούμε, όσον αφορά τα προτεινόμενα προβλήματα, ότι σε πρώτη φάση τουλάχιστον το κόστος πρόσβασης είναι απαραίτητο. Η άποψή μας ενισχύεται, από την ερμηνεία περί ενίσχυσης του Glasersfeld και από τη θεωρία διδακτικών καταστάσεων του Brousseau.
Ο Glasersfeld (1983) αναφέρει ότι υπάρχει η ευρέως διαδεδομένη παρανόηση ότι η ενίσχυση είναι το αποτέλεσμα πολύ γνωστών ανταμοιβών, όπως χρήματα ή κοινωνική αποδοχή. Πρόκειται για μια εσφαλμένη αντίληψη, όχι επειδή οι οργανισμοί δε θα δουλέψουν αρκετά σκληρά για να τα αποκτήσουν, αλλά επειδή αποκρύπτει το μακράν πιο ενισχυτικό για ένα γνωστικό οργανισμό: να επιτύχει μια ικανοποιητική οργάνωση, ένα βιώσιμο τρόπο αντιμετώπισης κάποιου τομέα της εμπειρίας.
Ο Brousseau (1986), στο πλαίσιο της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων, επισημαίνει:

> «Οι γνώσεις δεν υπάρχουν και δεν έχουν κανένα νόημα για το μαθητή, παρά μόνο διότι αντιπροσωπεύουν την καλύτερη δυνατή λύση σ’ ένα σύστημα συμβάσεων (contraintes)…. Η διδακτική δραστηριότητα έγκειται στο να οργανώσει αυτές τις συμβάσεις και να διατηρήσει τις καλύτερες δυνατές συνθήκες αλληλεπιδράσεων». (σελ. 368-369)

Οι Sierpinska και Lerman (1997) αναφέρουν ότι στη βάση της θεωρίας διδακτικών καταστάσεων του Brousseau, βρίσκεται η επιστημολογική υπόθεση ότι η γνώση υπάρχει και έχει νόημα για το υποκείμενο, μόνο επειδή αντιπροσωπεύει μια προαιρετική επιλογή σε ένα σύστημα εξαναγκασμών (constraints). Καθήκον του δασκάλου είναι να οργανώσει καταστάσεις ή συστήματα εξαναγκασμών, στα οποία ο δοσμένος διδακτικός στόχος να εμφανίζεται ως η πλέον ευνοϊκή (λιγότερο δαπανηρή) λύση.

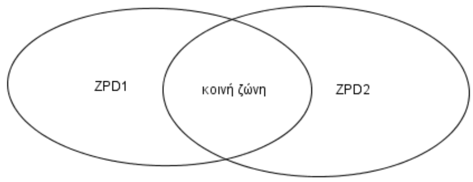
2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Σύμφωνα με τον Mayer (1998) η επιτυχής επίλυση προβλημάτων εξαρτάται από τις γνωστικές δεξιότητες, τις μεταγνωστικές δεξιότητες και τη βούληση. Οι γνωστικές δεξιότητες είναι οι βασικές δεξιότητες και αναπτύσσονται στοχευμένα και μεμονωμένα. Οι μεταγνωστικές δεξιότητες είναι η μεταγνώση με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων και αφορούν την ικανότητα του μαθητή να ελέγχει και να παρακολουθεί τις γνωστικές διεργασίες του. Είναι κεντρική συνιστώσα στην επίλυση προβλημάτων, διότι υποδηλώνει την ικανότητα διαχείρισης και συντονισμού βασικών δεξιοτήτων.
Δεδομένου ότι στα προτεινόμενα προβλήματα, κάθε στρατηγική επίλυσης απαιτεί χρήση διαφορετικών γνωστικών δεξιοτήτων, η ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προϋποθέτει συντονισμό, έλεγχο και διαχείριση της γνώσης, δηλαδή μεταγνωστική ικανότητα με τη μορφή μετά-δεξιοτήτων. Κατά συνέπεια, τα προβλήματα με επιλογή δεδομένων μπορούν να συνεισφέρουν στον τομέα των μετά-δεξιοτήτων, αρκεί οι μαθητές, στην προσπάθειά τους να μειώσουν το κόστος επίλυσης, να αναπτύσσουν όσο το δυνατόν περισσότερες στρατηγικές επίλυσης.

Μια άλλη θεωρία που μας βοηθά να ερμηνεύσουμε τη σημασία των προτεινόμενων προβλημάτων, είναι το μοντέλο εννοιολογικής ανάπτυξης της Sfard (1992). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, μια μαθηματική έννοια την κατανοούμε, σ' ένα αρχικό επίπεδο με βάση τη λειτουργία της, δηλαδή τη βλέπουμε ως σύνολο ενεργειών μιας διαδικασίας ενώ σ' ένα ανώτερο επίπεδο με βάση τη δομή της, δηλαδή ως ένα πλήρες μαθηματικό αντικείμενο με ιδιαίτερα δομικά χαρακτηριστικά.
Οι μαθητές, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, αναπτύσσουν πολλαπλούς τρόπους επίλυσης, κατά συνέπεια διαχειρίζονται, συντονίζουν και συνδυάζουν μαθηματικές διαδικασίες, προσπαθώντας να κάνουν συγκρίσεις και γενικεύσεις. Υποθέτουμε ότι αυτή η νοητική διεργασία βοηθάει στο να «δουν» τις διαδικασίες αυτές ως δομή, να τις σκέφτονται με βάση τις σχέσεις εισόδου-εξόδου, κατά συνέπεια ευνοεί τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.

Δανειζόμαστε μια έννοια του χώρου λύσεων που προτείνουν οι Leikin και Lev (2007) και την προσαρμόζουμε στα προτεινόμενα προβλήματα.
Για ένα πρόβλημα με επιλογή δεδομένων, ο **ατομικός χώρος λύσεων** αφορά τον κάθε μαθητή προσωπικά και χωρίζεται σε δύο υποσύνολα ξένα μεταξύ τους. Τον **διαθέσιμο χώρο λύσεων**, στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής μόνος του και ανεξάρτητα, χωρίς τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του και τον **δυνητικό χώρο λύσεων,** στρατηγικές που μπορεί να αναπτύξει ο μαθητής με τη βοήθεια του καθηγητή ή των συμμαθητών του, αλλά όχι μόνος του. Οι στρατηγικές αυτές ανταποκρίνονται στην προσωπική ZPD του μαθητή (Vygotsky, 1978).
Ο ατομικός χώρος λύσεων καθορίζεται από όλες τις στρατηγικές που ανέπτυξε ο μαθητής, μέχρι να φτάσει σ' αυτή που τελικά εφάρμοσε. Για τη μαθησιακή διαδικασία έχει μεγάλη σημασία η δημιουργία δυνητικού χώρου λύσεων, διότι οι λύσεις που ανήκουν εκεί, βρίσκονται στη ZPD του μαθητή και καθορίζουν το εν δυνάμει αναπτυξιακό του επίπεδο.

Σύμφωνα με τον Lerman (2001) η ZPD δεν είναι κάτι που ο μαθητής φέρει μαζί του, δεν εμφανίζεται πριν την αλληλεπίδραση με τους συμμαθητές του ή τον καθηγητή, η ανάδυσή της μπορεί να προκληθεί μέσω της επικοινωνίας και της διαπραγμάτευσης. Οι ZPD δύο μαθητών μπορούν να περιγραφούν ως επικαλυπτόμενες ζώνες. Στην κοινή ζώνη που δημιουργείται, αν δημιουργείται, συντελείται η μάθηση.



Στην περίπτωση των προτεινόμενων προβλημάτων, οι δύο ZPD ταυτίζονται με τους δυνητικούς χώρους στρατηγικών επίλυσης των δύο μαθητών. Στην κοινή ζώνη ανήκουν οι στρατηγικές, που την προκειμένη στιγμή δεν θα μπορούσε κανένας απ' τους δύο να τις αναπτύξει μόνος του και ανεξάρτητα, αλλά θα μπορούσαν να τις αναπτύξουν σε συνθήκες επικοινωνίας, συνεργασίας και διαπραγμάτευσης μεταξύ τους ή με τον καθηγητή. Γι' αυτό, στην έρευνά μας υιοθετήσαμε ως πρακτική της τάξης την ομαδοσυνεργατική διδασκαλία.

Το αν τα προτεινόμενα προβλήματα ευνοούν την ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων, είναι σημαντικό στοιχείο, διότι αποκαλύπτει κατά πόσο συντελείται και αναπτύσσεται η μάθηση διαμέσου αυτών.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

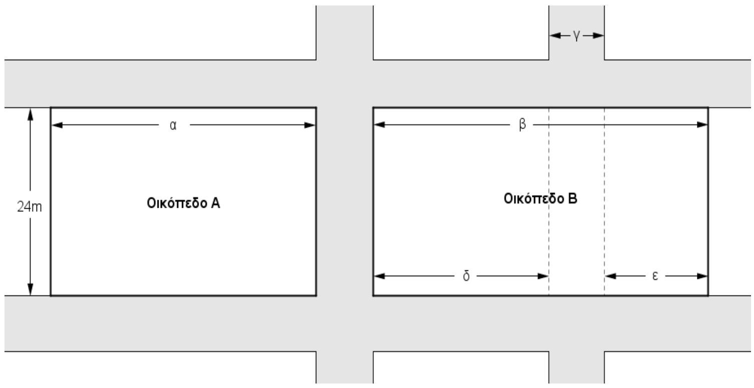
Η έρευνά μας είναι ποιοτική και επιχειρεί να απαντήσει σε δύο ερωτήματα:

1. Τα προτεινόμενα προβλήματα συνεισφέρουν στην ανάπτυξη μετά-δεξιοτήτων;
2. Τα προτεινόμενα προβλήματα συμβάλλουν στην εννοιολογική ανάπτυξη; Ευνοούν τη μετάβαση από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης;

Η έρευνα διενεργήθηκε κατά το σχολικό έτος 2012-13 σ' ένα τυπικό Γυμνάσιο του κέντρου της Αθήνας. Συμμετείχαν οι μαθητές τριών τμημάτων της Α΄ τάξης και ενός της Β΄ τάξης. Στα τμήματα της Α΄ τάξης δόθηκε το παρακάτω πρόβλημα «Επιμεριστική», ενώ στο τμήμα της Β΄ τάξης το πρόβλημα «Πυθαγόρειο - Τριγωνομετρία» που αναφέραμε πριν.

Πρόβλημα με επιλογή δεδομένων «Επιμεριστική»

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η κάτοψη των οικοπέδων Α και Β. Η αρμόδια διεύθυνση του υπουργείου αποφάσισε να κατασκευάσει δρόμο, ο οποίος θα περάσει μέσα από το οικόπεδο Β όπως δείχνουν οι διακεκομμένες γραμμές. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδό των οικοπέδων μετά την κατασκευή του δρόμου.



Έχετε τη δυνατότητα να πληροφορηθείτε:

- *Πόσο είναι η απόσταση α …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι η απόσταση β …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι το πλάτος του δρόμου γ …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι η απόσταση δ …….. (κόστος 5)*
- *Πόσο είναι η απόσταση ε …….. (κόστος 5)*
- *Πόσο είναι η διαφορά β-γ …….. (κόστος 3)*
- *Πόσο είναι το άθροισμα δ+ε …….. (κόστος 4)*
- *Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+β-γ …….. (κόστος 3)*
- *Πόσο είναι το αποτέλεσμα της πράξης α+δ+ε …….. (κόστος 4)*

Να επιλύσετε το πρόβλημα με όσο το δυνατόν μικρότερο κόστος.

Και στις 4 παρεμβάσεις οι μαθητές εργάστηκαν κατά ομάδες. Ηχογραφήσαμε 12 ομάδες, 3 από κάθε τμήμα και εξετάσαμε λεπτομερώς τις απομαγνητοφωνήσεις.
Η ανάλυση των δεδομένων στηρίχτηκε σε δύο άξονες:

1. Καταγράψαμε όλες τις διαφορετικές στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξε κάθε ομάδα στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής. Σχετίζεται άμεσα και με τις μετά-δεξιότητες και με την εννοιολογική ανάπτυξη.
2. Εντοπίσαμε σημεία στους διαλόγους που φανερώνουν με ευκρίνεια:
   - Φαινόμενα επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων. Σχετίζονται άμεσα με την εννοιολογική ανάπτυξη.
   - Μαθητές να χειρίζονται κατ' εξακολούθηση μαθηματικές έννοιες με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά ή, κατά τη διάρκεια της παρέμβασης, να μετακινούνται από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης.
   - Φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης μεταξύ παλιάς και νέας γνώσης, στοιχείο που σηματοδοτεί πορεία για κατασκευή της νέας γνώσης.
   - Αναστοχασμό των μαθητών πάνω στη δραστηριότητα. Σχετίζεται με τις μετά-δεξιότητες, αλλά και την εννοιολογική ανάπτυξη.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

Όσον αφορά τα αποτελέσματα των παρεμβάσεων στα τμήματα της Α΄ τάξης, ο παρακάτω πίνακας αποτυπώνει ποιες από τις 6 δυνατές στρατηγικές επίλυσης ανέπτυξε κάθε ομάδα. Οι στρατηγικές είναι χωρισμένες σε 3 κατηγορίες, ανάλογα με το τι είδους επιμεριστική απαιτεί η εφαρμογή τους. Για κάθε μία αναγράφονται τα απαιτούμενα δεδομένα και σε παρένθεση το κόστος επίλυσης.

Τμήμα	**Ομάδα**	**Στρατηγικές επίλυσης**					
		Χωρίς επιμερ.		**Επιμερ. 2 αριθμών**		**Επιμερ. 3 αριθμών**	
		α, δ, ε (14)	α, β, γ (12)	α, δ+ε (8)	α, β-γ (7)	α+δ+ε (4)	α+β-γ (3)
Α1	1η		√				√
	2η		√				√
	3η		√	√		√	
Α2	1η		√	√			√
	2η		√	√	√		√
	3η		√	√	√	√	√

A3	1η	√		√	√		√
	2η			√	√		√
	3η	√	√		√		

Επίσης, η μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ότι:

- Στις 6 ομάδες αναπτύχθηκαν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Σε 4 περιπτώσεις έλαβαν χώρα φαινόμενα αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στη παλιά και νέα γνώση.
- Στις 8 ομάδες διενεργήθηκε αναστοχασμός πάνω στο πρόβλημα.
- Σε 5 ομάδες, οι μαθητές στην προσπάθεια κατασκευής της νέας γνώσης, επιχείρησαν έλεγχο εικασιών μέσω παραδειγμάτων ή μέσω μέτρησης.

Όσον αφορά τα αποτελέσματα της παρέμβασης στο τμήμα της Β΄ τάξης, οι 41 δυνατές στρατηγικές επίλυσης χωρίζονται σε 3 επίπεδα. Στο Επίπεδο Ι ανήκει η στρατηγική που δεν απαιτεί ούτε πυθαγόρειο ούτε τριγωνομετρία. Στην πρώτη κατηγορία του Επιπέδου ΙΙ ανήκουν οι 4 στρατηγικές που απαιτούν μόνο πυθαγόρειο, ενώ στη δεύτερη οι 16 που απαιτούν μόνο τριγωνομετρία. Στο Επίπεδο ΙΙΙ ανήκουν οι 20 στρατηγικές που απαιτούν συνδυασμό πυθαγορείου και τριγωνομετρίας. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει σε ποιες κατηγορίες ανήκουν οι στρατηγικές επίλυσης που ανέπτυξε κάθε ομάδα. Σε παρένθεση αναγράφεται το ελάχιστο και μέγιστο κόστος επίλυσης των στρατηγικών κάθε κατηγορίας.

Τμήμα	**Ομάδα**	**Κατηγορίες στρατηγικών επίλυσης**			
		Επίπεδο Ι	**Επίπεδο ΙΙ**		**Επίπεδο ΙΙΙ**
		4 πλ. (10)	Πυθαγ. (7-8)	Τριγ. αρ. (7-8)	Συνδ. (6-9)
Β2	1η		√		√
	2η		√	√	√
	3η		√	√	√

Η μελέτη των απομαγνητοφωνήσεων έδειξε ακόμη ότι:

- Το μεγάλο πλήθος των δυνατών στρατηγικών επίλυσης λειτούργησε θετικά στο να αντιμετωπίσουν οι μαθητές το πυθαγόρειο θεώρημα και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με βάση τα δομικά τους χαρακτηριστικά.
- Υπήρξε περίπτωση μαθήτριας, που μετακινήθηκε από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης των τριγωνομετρικών αριθμών.
- Στις 2 από τις 3 ομάδες αναπτύχθηκαν επικαλυπτόμενοι δυνητικοί χώροι λύσεων.
- Υπήρξαν περιπτώσεις δύο μαθητών που γενίκευσαν τις στρατηγικές επίλυσης μιας κατηγορίας και ενός μαθητή που επιχείρησε επιτυχημένη ανασκευή του συγκεκριμένου προβλήματος. Θεωρούμε ότι οι διεργασίες αυτές είναι προϊόν υψηλού επιπέδου αναστοχασμού και το σημαντικό είναι ότι το κίνητρό τους φαίνεται να είναι εσωτερικό και να μην έχει σχέση με το ελάχιστο κόστος επίλυσης.

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ, ΣΚΕΨΕΙΣ, ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Η έρευνα έδειξε ότι κάθε ομάδα, στην προσπάθεια αναζήτησης της βέλτιστης στρατηγικής, ανέπτυξε ικανοποιητικό πλήθος στρατηγικών επίλυσης. Οι μαθητές με

διάθεση συμμετοχής, μπήκαν στη διαδικασία να συντονίσουν και να ελέγξουν βασικές γνωστικές δεξιότητες, να διαχειριστούν μαθηματικές έννοιες βάσει των δομικών τους χαρακτηριστικών ή και να μετακινηθούν από το λειτουργικό στο δομικό επίπεδο κατανόησης. Σχεδόν σε όλες τις περιπτώσεις αλληλεπίδρασης επετεύχθη ανάπτυξη επικαλυπτόμενων δυνητικών χώρων λύσεων. Ανιχνεύσαμε περιπτώσεις, που η δυνατότητα επιλογής δεδομένων συνέβαλε στη δημιουργία φαινομένων αντιπαράθεσης και παλινδρόμησης ανάμεσα στην παλιά και νέα γνώση. Διαπιστώσαμε ότι η ύπαρξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης, έδωσε τη δυνατότητα στους μαθητές με ενεργητική διάθεση, να επιχειρηματολογήσουν για την επιλογή τους ή και να κρίνουν επιλογές συμμαθητών τους, να αποστασιοποιηθούν από τη δράση τους και να την εκλάβουν ως αντικείμενο αναστοχασμού.
Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα, ότι η ενασχόληση των μαθητών με τα προτεινόμενα προβλήματα, σε συνθήκες ομαδοσυνεργατικής διδασκαλίας, συνεισφέρουν τόσο στις μετά-δεξιότητες όσο και στην εννοιολογική ανάπτυξη, υπό δύο προϋποθέσεις. Πρώτον, ο μαθητής πρέπει να κατέχει τις βασικές γνωστικές δεξιότητες που απαιτεί το πρόβλημα και δεύτερον, να έχει τη βούληση να συμμετάσχει σε μαθηματικές δραστηριότητες υπό συνθήκες συνεργατικής μάθησης.

Αναφέρουμε ορισμένες σκέψεις, προεκτάσεις και ερωτήματα, που απορρέουν από τη φύση των μαθηματικών προβλημάτων με επιλογή δεδομένων.

- Ένα πλεονέκτημά τους είναι ότι επιτρέπουν στους μαθητές να εμπλακούν με το ίδιο πρόβλημα σε διαφορετικές χρονικές περιόδους, ώστε κάθε φορά, εφαρμόζοντας τη νέα γνώση να μειώνουν το κόστος επίλυσης. Πιστεύουμε ότι αυτή η πρακτική, συμβάλλει στη σύνδεση της παλιάς με τη νέα γνώση. Βοηθάει τους μαθητές να δουν τη μία ως συνέχεια της άλλης, και τις δύο ως μέρη μιας ενιαίας μαθηματικής ολότητας και όχι ξεκομμένες και ασυσχέτιστες μεταξύ τους.
- Τα προτεινόμενα προβλήματα μας παρέχουν τη δυνατότητα, με κατάλληλη αλλαγή στα κόστη πρόσβασης, να διαφοροποιήσουμε τη βέλτιστη στρατηγική επίλυσης, ανάλογα με το διδακτικό στόχο.
- Η εκχώρηση της επιλογής των δεδομένων στους ίδιους τους μαθητές, δημιουργεί μια άλλου είδους σχέση ανάμεσα στο μαθητή και τη πορεία επίλυσης. Η πορεία επίλυσης δεν προκαθορίζεται από το ίδιο το πρόβλημα, αλλά ο μαθητής, μέσω της επιλογής δεδομένων, συμμετέχει ενεργά στον καθορισμό της. Το ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο δημιουργεί κίνητρα ενδιαφέροντος, αν ενισχύει τη βούληση του μαθητή για την ενασχόλησή του με τα μαθηματικά.
- Όσες στρατηγικές επίλυσης αναπτύσσουν ο μαθητές, κατά την ενασχόλησή τους με ένα προτεινόμενο πρόβλημα, τόσα διαφορετικά προβλήματα, εν μέρει κατασκευάζουν και επιλύουν. Η κατασκευή και η επίλυση διενεργούνται ταυτόχρονα, με αποτέλεσμα να μην τις βλέπουν ως δύο διακριτές διαδικασίες όπως γίνεται συνήθως. Δεν καταπιάνονται μόνο με τη μία, την επίλυση, αλλά και με τις δύο ως αλληλοεξαρτώμενες δικές τους δράσεις.
- Οι πολλαπλοί τρόποι επίλυσης διαβαθμισμένου γνωστικού επιπέδου, επιτρέπουν την επιτυχή αντιμετώπιση του προβλήματος από ένα ευρύ φάσμα μαθητών. Το

ερώτημα είναι αν αυτό το πλαίσιο μπορεί να λειτουργήσει θετικά στους μαθητές που επιδεικνύουν συστηματική αποτυχία και αποστροφή στα μαθηματικά, ώστε να δουν με άλλο μάτι και τα μαθηματικά και τις ικανότητές τους στα μαθηματικά.

- Μια προοπτική και μια εναλλακτική μορφή των προτεινόμενων προβλημάτων είναι, τα προς επιλογήν δεδομένα να μην προκαθορίζονται εξ' αρχής, αλλά να τα αναζητούν και να τα συλλέγουν οι ίδιοι οι μαθητές χωρίς κανένα περιορισμό.
- Τα προβλήματα με επιλογή δεδομένων φαίνεται να είναι πιο κοντά στη φύση των πραγματικών προβλημάτων. Σ' ένα πραγματικό πρόβλημα, πάντα τίθεται το ερώτημα, όχι όμως ποια δεδομένα πρέπει να χρησιμοποιηθούν οπωσδήποτε για την αντιμετώπισή του.

Βιβλιογραφικές αναφορές

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des Phénomènes d'Enseignement des Mathématiques*, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université de Bordeaux I.

Edelman, G. (1992). *Bright Air, Brilliant Fire*. Basic Books, Inc. (ed.) Για την ελληνική γλώσσα: Εκδόσεις Κάτοπτρο 1996.

Leikin, R., & Lev, M. (2007). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park, & D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 161–168). Seoul, South Korea: PME.

Lerman, S. (2001). Accounting for accounts of learning mathematics: reading the ZPD in videos and transcripts. In D. Clarke (Ed.), *Perspectives on practice and meaning in mathematics and science classrooms*, (pp. 53-74). Dordrecht: Kluwer.

Mayer, R. E. (1998). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science 26*: 49-63.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the case of function. In Harel, G. and Dubinsky, E. (Eds.) *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, pp.59-84, Washington:MAA.

Sierpinska, A. & Lerman, S. (1997). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. *International Handbook of Mathematics Education* Kluwer International Handbooks of Education Volume 4, 827-876.

Von Glasersfeld, E. (1983). Learning as a constructive activity. In: J. C. Bergeron & N. Herscovics (ed*) Proceedings of the 5th Annual Meeting of the North American Group of Psychology in Mathematics Education*, Vol. 1 Montreal: PME-NA 41–101

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Βοσνιάδου Σ. (2001). *Εισαγωγή στην ψυχολογία. Τόμος Α΄*. Εκδόσεις Gutenberg.