ΘΕΜΑ 1

Ένα Λύκειο έχει 400 μαθητές από τους οποίους οι 200 είναι μαθητές της Α΄ τάξης. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή, η πιθανότητα να είναι μαθητής της Γ΄ τάξης είναι 20%. Να βρείτε:

i. Το πλήθος των μαθητών της Γ΄ τάξης

ii. Την πιθανότητα ώστε ο μαθητής να είναι της Α΄ τάξης

iii. Το πλήθος των μαθητών της Β΄ τάξης.

ΘΕΜΑ 2

Αν Α, Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με P(Α΄) = 3P(Α), P(Β΄) = 1/3 και $P(A \cup B) = 3P(A \cap B)$,

Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A), \quad P(B), \quad P(A \cap B), \quad P(A \cup B)$.

ΘΕΜΑ 3

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, όπου P(A) είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - 5x + 2 = 0$ και P(B) η πιθανότητα στη ρίψη ενός ζαριού να φέρουμε ένδειξη μικρότερη του 5.

i. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(B)

ii. Να αποδείξετε ότι τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα

iii. Αν επί πλέον γνωρίζουμε ότι το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι βέβαιο, να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A \cap B), \quad P(A - B), \quad P((A-B) \cup (B-A))$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σύνολα: $\Omega = \{x \in N \,/\, -2 \le x \le 7\}$,

$A = \{x \in N \,/\, 2x + 6 \ge 0 \ \text{ και } \ 3x - 14 < 0\}$

$B = \{x \in Z \,/\, (3x-2)(x^2 - 4x) = 0\}$

i. Να βρείτε με αναγραφή τα παραπάνω σύνολα.

ii. Να βρείτε τα σύνολα Β΄ ως προς το Ω, $A \cup B$, $A \cap B$, Α – Β, Β – Α.

iii. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα Α, Β ενδεχόμενα του Ω, να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: Α, Β΄, Α – Β, $A \cup B$, $A \cap B$.

ΘΕΜΑ 5

Έστω Α, Β ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω με $P(A \cap B) = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2$, $P(A) = \lambda$ και $P(B) = \lambda - 1/4$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το λ ώστε τα Α, Β να είναι ξένα μεταξύ τους.

ii. Για την τιμή του λ που βρήκατε να υπολογίσετε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A\text{-}B)$, $P(B\text{-}A)$.

ΘΕΜΑ 6

i. Οι αριθμοί α, β είναι μη μηδενικοί και διάφοροι μεταξύ τους και ισχύει $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{2000} \cdot (\beta^4)^{504}}{\alpha^5 \cdot \alpha^{-19} \cdot \sqrt[4]{\beta^8}}$

ΘΕΜΑ 7

i. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $2\alpha(3 - \beta)$

ii. Να εξετάσετε πότε ισχύει η ισότητα $2\alpha^2 + \beta^2 + 9 = 2\alpha(3 - \beta)$

ΘΕΜΑ 8

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: $d(2x, 3y) = 3y - 2x$

i. Να αποδείξετε ότι $y \geq \frac{2x}{3}$.

ii. Να υπολογίσετε τα x, y, αν επιπλέον ισχύει $3y \leq 2x$ και $x^5 = -243$

ΘΕΜΑ 9

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ και $\gamma = 2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 2$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \cdot \gamma < \alpha + \beta \cdot \gamma < \alpha + \beta + \gamma$.

iii. Να αποδείξετε ότι ο $\sqrt{2} + 1$ είναι η τετραγωνική ρίζα του 2α - 1.

ΘΕΜΑ 10

Για τον αριθμό x ισχύει: $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 11) \leq 0$.

i. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x - 1$, $x + 1$.

ii. Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $x - 1$ και $x + 1$.

iii. Να βρείτε το διάστημα μέσα στο οποίο παίρνει τιμές ο αριθμός x.

iv. Να γράψετε χωρίς απόλυτη τιμή την παράσταση $A = |x^2 - 1| + 5$.

ΘΕΜΑ 11

Δίνεται την εξίσωση $\left(\lambda^2 - 4\right)x - \lambda^2 + 6\lambda - 8 = 0 \quad (1)$, η οποία είναι ταυτότητα.

i. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

ii. Αν $\lambda = 2$, να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{\lambda\left(2x - 3\right)}{6} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{\lambda\left(x + 2\right)}{3}$.

iii. Αν $\lambda = 2$ να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{x^2 - \lambda^2 x + 2\lambda} < 3\lambda + 1$.

ΘΕΜΑ 12

i. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6$.

ii. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in R$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $x^2 - 2\lambda x - \lambda + 6 = 0$, (1).

iii. Αν η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες, να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε οι ρίζες να είναι αντίστροφες .

iv. Αν η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες με $x_1, x_2 \neq 0$, να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}$.

ΘΕΜΑ 13

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + 1 = 0,\ \lambda \in R \quad (1)$.

i. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες.

ii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η (1) να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες.

iii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες.

iv. Να βρείτε τον αριθμό $\lambda \in \mathrm{R}$ ώστε $3x_1^2 x_2 + 3x_2^2 x_1 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 0$, όπου $x_1,\ x_2$ είναι οι 2 άνισες ρίζες της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 14

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \frac{|\lambda|}{4} = 0,\ \lambda \in \mathrm{R}\ ,\ (1)$.

i. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η (1) να έχει μία διπλή πραγματική ρίζα.

ii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η (1) να έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

iii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να είναι αδύνατη στο R.

iv. Να βρείτε το $\lambda \in \mathrm{R}$ ώστε $\lambda^2 + 7P - \frac{1}{2} = 0$, όπου P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 15

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 + (\alpha + \beta)x + \beta = 0\ ,\ \alpha \neq 0\ \ (1)$ με $\Delta^2 - 8\Delta + 16 = 0$, όπου Δ η διακρίνουσα της.

i. Να αποδείξετε ότι η (1) έχει δυο άνισες πραγματικές ρίζες για κάθε α, β.

ii. Έστω $\alpha > \beta$.

A. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta + 2$.

B. Αν $\mathrm{S} - \mathrm{P} = \alpha$, όπου $\mathrm{S},\ \mathrm{P}$ το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1), να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

ΘΕΜΑ 16

i. Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας με γενικό όρο $\gamma_\nu = \dfrac{1}{\nu^2+1}$

ii. Να εξετάσετε αν αυτοί οι όροι σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.

iii. Να αποδείξετε ότι $\gamma_\nu > \gamma_{\nu+1}$.

ΘΕΜΑ 17

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3\nu - 2$.

i. Να βρείτε τους 3 πρώτους όρους της.

ii. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί: –14, 28, 95 είναι όροι της ακολουθίας αυτής.

iii. Να βρείτε τον όρο $\alpha_{\nu+1}$ και να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_ν είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά ω = 3.

iv. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε ο ένατος όρος της να ισούται με 3 – 2x.

ΘΕΜΑ 18

Έστω η ακολουθία με γενικό όρο $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^\nu$.

i. Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{3}{8}$, 48, 2013 είναι όροι της.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τον όρο $\alpha_{\nu+1}$

iii. Να αποδείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε τον λόγο της λ

ΘΕΜΑ 19

i. Να βρείτε το x ώστε οι αριθμοί x + 6, 3 – x, 9 – x να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

ii. Αν x = – 3 και ο 9 – x είναι ο τέταρτος όρος της παραπάνω γεωμετρικής προόδου να βρείτε τον λόγο λ και τον έβδομο όρος της.

ΘΕΜΑ 20

i. Να αποδείξετε ότι $1+2+3+...+\nu=\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$, για κάθε $\nu\in N^*$

ii. Να γράψετε το γινόμενο: $2\cdot4\cdot8\cdot16\cdot...\cdot1024$, σαν μια δύναμη του 2.

iii. Να αποδείξετε ότι $2\cdot4\cdot8\cdot16\cdot...\cdot2^{\nu}=\sqrt{2^{\nu^2+\nu}}$, για κάθε $\nu\in N^*$.

ΘΕΜΑ 21

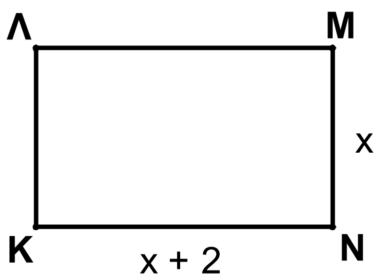
i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\sqrt{3},\sqrt{6},\sqrt{12}$ αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου της οποίας να βρείτε το λόγο λ.

ii. Να βρείτε τον 12ο όρο και το άθροισμα των 10 πρώτων όρων αν $\alpha_1=\sqrt{3}$

iii. Να γράψετε την παράσταση $K=\dfrac{\alpha_7+\alpha_8}{\lambda-1}$ με ρητό παρονομαστή.

ΘΕΜΑ 22

Δίνεται το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΚΛΜΝ του σχήματος με διαστάσεις x + 2 και x.



i. Να εκφράσετε την περίμετρο του ορθογωνίου σαν συνάρτηση του x.

ii. Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου σαν συνάρτηση του x.

iii. Αν το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι 63 cm^2, να υπολογίσετε την περίμετρό του.

ΘΕΜΑ 23

Έστω το σημείο Μ(λ^2 - 7λ + 6, $|\lambda-1|$ - 3), όπου $\lambda\in R$.

i. Ποιο το $\lambda\in R$, ώστε το σημείο Μ να ανήκει στον θετικό ημιάξονα Oy.

ii. Ποιο το $\lambda\in R$, ώστε το σημείο Μ να βρίσκεται στο 2ο τεταρτημόριο.

iii. Αν λ = 2 να βρεθούν τα συμμετρικά του Μ ως προς τον άξονα y΄y και ως προς την διχοτόμο 1ης - 3ης γωνίας.

ΘΕΜΑ 24

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$ και να γράψετε τον τύπο της χωρίς ριζικό στον παρονομαστή.

ii. Να υπολογίσετε την παράσταση $K=f(2)\cdot f(72)$.

iii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha=[f(5)-f(3)]\cdot[f(5)+f(3)]-f(f(625))$ είναι ακέραιος.

ΘΕΜΑ 25

i. Να λυθεί η εξίσωση $x^2+5x-6=0$

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\frac{2x-2}{x^2+5x-6}$

iii. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f.

ΘΕΜΑ 26

i. Να λυθεί η ανίσωση $-x^2-3x+4\geq 0$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{-x^2-3x+4}$.

iii. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-2,f(-2))$ ως προς τους άξονες x΄x και y΄y, την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και την διχοτόμο $y=x$ της $1^{ης}$ - $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων

ΘΕΜΑ 27

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\alpha x-4}{x} & \text{αν } x<0\\ \beta-1+\alpha\sqrt{x} & \text{αν } x\geq 0\end{cases}$

Η γραφική της παράσταση τέμνει τον x΄x στο (-2, 0) και τον y΄y στο (0, 3).

i. Να βρείτε τα α και β.

ii. Να βρείτε το λ, ώστε το σημείο $M(\lambda^2, -2)$ να ανήκει στην C_f.

ΘΕΜΑ 28

Έστω οι συναρτήσεις f, g, με $f(x) = x^3 - x$ και $g(x) = x^2 - 1$ με $x \in R$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.

ii. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την C_g.

iii. Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_g που βρίσκονται κάτω από τον άξονα y΄y.

ΘΕΜΑ 29

Έστω ευθεία (ε) με εξίσωση y = α x + β , τέτοια ώστε να σχηματίζει γωνία ω = 60^0 με τον άξονα x΄x και να διέρχεται από το σημείο $M(\sqrt{48}, -2)$.

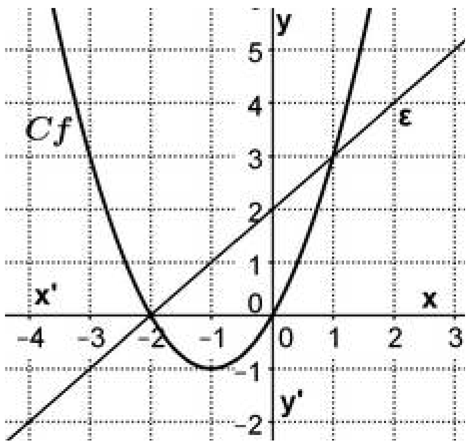
i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ii. Να εξετάσετε αν διέρχεται από το σημείο $N(\sqrt{300}, -16)$.

iii. Να αποδείξετε ότι κανένα σημείο της δεν βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο.

ΘΕΜΑ 30

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f(x) και μιας ευθείας (ε).



i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) είναι η y = x + 2

ii. Να βρείτε τα f(-3), f(-2), f(0), f(1).

iii. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0.

iv. Να λύσετε την ανίσωση f(x) < x + 2.

v. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x) = -2.

ΘΕΜΑ 31

Σε μία κάλπη υπάρχουν κόκκινες, πράσινες και άσπρες σφαίρες οι οποίες είναι όμοιες μεταξύ τους. Αν οι κόκκινες είναι 5 και η πιθανότητα να επιλέξουμε στην τύχη μία κόκκινη είναι 25%, ενώ η πιθανότητα τυχαίας επιλογής μίας πράσινης είναι 40%, να βρείτε:

i. Το πλήθος των σφαιρών που υπάρχουν στην κάλπη
ii. Το πλήθος των πράσινων σφαιρών
iii. Την πιθανότητα να επιλέξουμε μία άσπρη σφαίρα.

ΘΕΜΑ 32

Έστω P(A) η πιθανότητα ενός ενδεχομένου A το οποίο δεν είναι ούτε αδύνατο ούτε βέβαιο.

i. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς

$$\frac{1}{\mathrm{P(A)}},\ \frac{\mathrm{P(A)}+1}{2},\ 0,\ \mathrm{P(A)}-1,\ 1,\ \mathrm{P(A)}.$$

ii. Να βρείτε από την διατεταγμένη σειρά, μια τριάδα αριθμών που να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και μια τριάδα αριθμών που να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΜΑ 33

Για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύουν: $|x| \le 2$ και $|y| \le 3$

i. Να αποδείξετε ότι: $|-3x + 7y + 1| \le 28$.
ii. Να βρείτε τα x, y αν ισχύει επιπλέον $|x| + |y| = 5$

ΘΕΜΑ 34

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + \gamma = 0$,με $\gamma \in \mathrm{R}$, $x_1 < 0$ και $x_2 = x_1^2 + 1$.

i. Να βρείτε τις ρίζες της, x_1, x_2.
ii. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό γ.

ΘΕΜΑ 35

i. Έστω (α_ν) μια αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. Να γράψετε τις παραστάσεις $\mathrm{K} = \alpha_3 + \alpha_5$ και $\Lambda = \alpha_1 \cdot \alpha_7$ σε συνάρτηση με το α_1 και το ω.

ii. Να βρείτε τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου (α_ν) , αν $\mathrm{K} = 22$ και $\Lambda = -23$.

ΘΕΜΑ 36

Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) ο δέκατος όρος της ισούται με 69 και ο εικοστός πρώτος με 102.

i. Να βρείτε τα α_1, ω.

ii. Να βρείτε τον τριακοστό πρώτο όρο της.

iii. Να βρείτε το άθροισμα των όρων μεταξύ του δέκατου και του πεντηκοστού όρου.

ΘΕΜΑ 37

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, διαφορετικοί μεταξύ τους. Αν οι α, β, γ είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά ω και οι α, α + β, 3γ + α είναι οι τρεις πρώτοι όροι γεωμετρικής προόδου, τότε:

i. Να εκφράσετε τους β, γ ως συνάρτηση του α και του ω.

ii. Να εκφράσετε τους α, α + β, 3γ + α ως συνάρτηση του α και του ω και να υπολογίσετε το ω.

iii. Να βρείτε τον 15^{ο} όρο της αριθμητικής προόδου και τον 8^{ο} της γεωμετρικής προόδου, το άθροισμα των 15 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου και των 8 της γεωμετρικής προόδου.

iv. Να βρείτε ποιοι όροι της αριθμητικής προόδου βρίσκονται ανάμεσα στον 4^{ο} και 5^{ο} όρο της γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΜΑ 38

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ και $\gamma = \dfrac{1}{2}$.

i. Να βρείτε τον γεωμετρικό μέσο β των α και γ.

ii. Να βρείτε τον $5^{ο}$ όρο της γεωμετρικής προόδου που έχει τρεις πρώτους όρους τους αριθμούς α, β, γ,…

iii. Να βρείτε το άθροισμα των 4 πρώτων όρων αυτής της γεωμετρικής προόδου.

ΘΕΜΑ 39

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$, α, β $\neq$ 0, που έχει γραφική παράσταση ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 4) και τον άξονα x΄x στο σημείο Α, έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ (Ο η αρχή των αξόνων) να ισούται με 8 τετραγωνικές μονάδες.

i. Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της συνάρτησης f ;

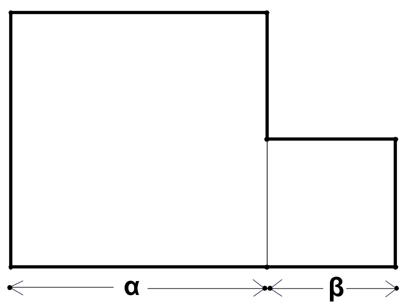
ii. Ποια είναι η συνάρτηση f αν γνωρίζουμε ότι η γραφική της παράσταση σχηματίζει αμβλεία γωνία ω με τον άξονα x΄x και ποια είναι η γωνία ω ;

ΘΕΜΑ 40

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$.

ii. Να αποδείξετε ότι $(\alpha+\beta)^2\geq 2\alpha\beta$. Πότε ισχύει η ισότητα;

iii. Έστω το παρακάτω οικόπεδο που αποτελείται από δύο τετράγωνα με πλευρές α και β. Είναι γνωστό ότι τα α, β είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-49x+550=0$, (α, β σε μέτρα).



Α) Να βρείτε το εμβαδόν του οικοπέδου χωρίς να υπολογίσετε τα α, β.

Β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = 550\cdot\frac{\alpha}{\beta} + 550\cdot\frac{\beta}{\alpha} - \frac{\alpha^3+\beta^3}{49}$$

ΘΕΜΑ 41

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^6$ με πεδίο ορισμού το R.

i. Να γράψετε σαν μια δύναμη με βάση το 2 την παράσταση $K = \frac{f(4) \cdot f(8)}{f(2)}$

ii. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $\Lambda = f(x) - x^3$, ώστε να έχει παράγοντα 1ου βαθμού ως προς x.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $g(x) = \frac{14f(x) + 14x}{x^7 + x^2}$.

ΘΕΜΑ 42

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 - x + 2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να αποδείξετε ότι $(2f(-1) + 3f(0)) \cdot \sqrt{3} - 5\sqrt{6} = f(1)$

iii. Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = \frac{2}{f(0)}$ και $\rho_2 = \sqrt{8} + f(1)$.

ΘΕΜΑ 43

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa^2 \sqrt{9 - x^2}$, $\kappa \in R$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{5}, 8)$, να υπολογίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

iii. Για κ = 2 να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

ΘΕΜΑ 44

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{10}{\sqrt{-x^2 + 3x + 10}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να αποδείξετε ότι $f(0)-\dfrac{9}{\sqrt{10}+1}=1$.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $(x-5)\cdot[f(x)]^2=100$.

ΘΕΜΑ 45

Έστω η συνάρτηση $f(x)=(\lambda-3)x+\beta$, που έχει γραφική παράσταση ευθεία, η οποία τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 6) και είναι παράλληλη στην διχοτόμο $1^{ης}$ – $3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

i. Να βρείτε τα λ και β.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\sqrt{f(x)+x^2}$.

iii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\kappa=g(3)-g(-2)$ και $\mu=\dfrac{g(0)}{2}$.

ΘΕΜΑ 46

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x-1$ με $x\in R$.

i. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση $K=f(x^2)+f(3x)+f(-\dfrac{5}{2})$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2)+f(3x)=-f(-\dfrac{5}{2})$.

ΘΕΜΑ 47

Έστω η συνάρτηση $f(x)=2x^3$ με $x\in R$.

i. Να γράψετε σαν μια δύναμη την παράσταση $K=\dfrac{f(4)\cdot f(8)}{f(1)}$.

ii. Να αποδείξετε ότι οι τιμές $f(\dfrac{1}{2}), f(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}), f(\sqrt[3]{2}), f(2)$, με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=-128$.

ΘΕΜΑ 48

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \lambda \cdot x + 2$, $\lambda \neq 0$, που έχει γραφική παράσταση ευθεία.

i. Ποια τα σημεία τομής Μ, Ν της ευθείας με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα;

ii. Ποιο το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ σαν συνάρτηση του λ, όπου Ο η αρχή των αξόνων;

iii. Ποιο το λ ώστε το εμβαδόν (ΟΜΝ) να ισούται με 4 τ. μον.;

ΘΕΜΑ 49

Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 με εξισώσεις : $2y = 4x - 12$ και $y = (\lambda^5 - 30)x + 67$.

i. Να βρείτε τα σημεία τομής της ε_1 με τους άξονες x΄x και y΄y.

ii. Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

iii. Να εξετάσετε αν η ε_1 διέρχεται από το σημείο $Μ(\mu + 3, 2\mu)$.

iv. Αν $\mu = -2$ να βρείτε το συμμετρικό του Μ ως προς τον y΄y και την $y = x$.

ΘΕΜΑ 50

i. Ποια τα α, β, γ αν ισχύει $|\alpha - 1| + |\beta - 1| + |\gamma - 1| = 0$;

ii. Αν $|2P(A) - 1| + |3P(B) - 1| + |6P(A \cap B) - 1| = 0$, να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί:

Α. Ένα τουλάχιστον από τα Α, Β

Β. Κανένα από τα Α, Β

Γ. Μόνο το Β

ΘΕΜΑ 51

Αν ισχύει $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ να αποδείξετε ότι:

i. $2\alpha + 3\gamma < 2\beta + 3\delta$

ii. $6\alpha - \delta < 6\beta - \gamma$

ΘΕΜΑ 52

Δίνονται οι παραστάσεις : $A = |2x - 1|$ και $B = |x + 3|$.

i. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων 2x – 1, x + 3 για τις διάφορες τιμές του x.

ii. Να γράψετε την παράσταση Π = Α – Β + x χωρίς απόλυτη τιμή.

ΘΕΜΑ 53

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{|x-14|}{x-14}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

ΘΕΜΑ 54

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2-11x+\gamma=0$, (1), $\gamma\in R$ η οποία έχει δύο πραγματικές ρίζες x_1 και x_2 με $\frac{x_1}{3}+\frac{x_2}{4}=3$.

i. Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης (1), καθώς και την τιμή του γ.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $d\left(x,2x_1\right)=2d\left(x,x_2\right)$.

ΘΕΜΑ 55

i. Να βρείτε τους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας με γενικό όρο $\beta_\nu=\frac{(-1)^\nu}{2\nu}$

ii. Να εξετάσετε αν αυτοί οι όροι σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο.

iii. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
$A = |\beta_1 - \beta_2| - |\beta_2 - \beta_3| + |\beta_4 - \beta_3| - |\beta_5 - \beta_4|$

ΘΕΜΑ 56

Ένας μαθητής αποφάσισε να διαβάσει ένα βιβλίο με 1000 σελίδες. Την πρώτη ημέρα διάβασε 64 σελίδες και στη συνέχεια διάβαζε κάθε μέρα τις μισές σελίδες από ότι διάβασε την προηγούμενη. Αφού διάβασε συνολικά 6 ημέρες ξεκουράστηκε για μία εβδομάδα. Την 14^{η} μέρα διάβασε 5 σελίδες και συνέχισε να διαβάζει κάθε μέρα 3 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Την τελευταία ημέρα διάβασε 65 σελίδες.

i. Πόσες σελίδες διάβασε τις πρώτες 6 ημέρες;

ii. Πόσες ημέρες διάβασε μετά τη 13^{η} ημέρα;

iii. Πόσες σελίδες χρειάζεται ακόμα για να το τελειώσει;

ΘΕΜΑ 57

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y.

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση.

iv. Να αποδείξετε ότι οι τιμές $f(5),\ f(9),\ f(13)$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 58

Στο διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία μιας ομάδας φοιτητών σε ένα μάθημα.

Μαθητές	4	8	4	3	1
Βαθμολογία	3	5	7	8	10

Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα ο βαθμός του να είναι: **i)** 5 **ii)** τουλάχιστον 8 **iii)** το πολύ 7 **iv)** 3 ή 10.

ΘΕΜΑ 59

Για τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν:

$P(A\cup B)'=20\%$, P(A - B) = 30% και P($A\cap B$) = 10%.

Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων.

Κ: Να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα Α, Β.

Μ: Να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα Α, Β.

Χ: Να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα Α, Β.

ΘΕΜΑ 60

Θεωρούμε το δειγματικό χώρο Ω={0,1,2,…,10}, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και τα ενδεχόμενά του:

$A = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \Omega / \text{οι ευθείες } (\varepsilon): y = (\lambda^2 - 3\lambda) \cdot x + 4 \text{ και } (\delta): y = 2\lambda x \text{ να είναι} \\ \text{παράλληλες} \end{array} \right\}$

$B = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \Omega / \lambda \text{ τεταγμένες των σημείων τομής των συναρτήσεων} \\ f(x) = x^2 + x \text{ και } g(x) = x + 4 \end{array} \right\}$

i. Να γράψετε με αναγραφή των στοιχείων τους τα σύνολα Α, Β.

ii. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενο Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

iii. Να βρείτε τις πιθανότητες: $P(A')$, $P(A \cup B)$, $P(A - B)$.

ΘΕΜΑ 61

Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 7x + 1 = 0$.

i. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της χωρίς να την λύσετε.

ii. Να εξηγήσετε γιατί δεν είναι δυνατόν οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να παριστάνουν τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ δύο ενδεχομένων Α και Β ενός πειράματος τύχης.

ΘΕΜΑ 62

Έστω Α, Β δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω που δεν είναι αδύνατα, ούτε βέβαια και $P(A - B) \neq 0$.

i. Ποιο το πρόσημο της παράστασης $K = P^2(A) - P(A) \cdot P(A \cap B)$.

ii. Λύστε την ανίσωση $(P^2(A) - P(A) \cdot P(A \cap B)) \cdot x < P(A - B) \cdot P(A)$.

ΘΕΜΑ 63

Δίνεται η ανίσωση $3(x - 2) - 2(5 - x) > 2(x + 3) - 19$

i. Να λύσετε την ανίσωση αυτή, να παραστήσετε γραφικά τις λύσεις της και να βρείτε την ελάχιστη ακέραια λύση της.

ii. Να εξηγήσετε αν είναι δυνατόν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α να είναι λύση της ανίσωσης αυτής.

ΘΕΜΑ 64

Δίνεται η εξίσωση $|x^2-1|+|x-1|+|x^2-x|=0$.

- **i.** Να λύσετε την εξίσωση.
- **ii.** Αν $P(A)$ η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α, κάποιου δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $|P^2(A)-1|+|P(A)-1|+|P^2(A)-P(A)|=0$, να αποδείξετε ότι το Α είναι το βέβαιο ενδεχόμενο.

ΘΕΜΑ 65

Δίνεται το σύνολο Κ = {1, 2, 3, 4, 6}. Επιλέγουμε τυχαία 3 διαφορετικούς αριθμούς από το σύνολο αυτό και τους διατάσσουμε κατά αύξουσα σειρά, δημιουργώντας ένα δειγματικό χώρο Ω που περιέχει όλες αυτές τις τριάδες αριθμών.

- **i.** Να γράψετε τον δειγματικό χώρο Ω
- **ii.** Αν επιλέξουμε τυχαία μια τέτοια τριάδα (α, β, γ) αριθμών από το Ω ποια η πιθανότητα των ενδεχομένων:

  Α: «α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου»

  Β: «α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου»

ΘΕΜΑ 66

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-x^2+x}{2}$ και το σύνολο

$\Omega=\{f(0),f(2),f(3),f(\sqrt{2}),f(\frac{1}{2})\}$. Επιλέγω τυχαία μια τιμή από το σύνολο Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

- **i.** Α: «η τιμή να είναι ακέραιος αριθμός»
- **ii.** Β: «η τιμή να είναι άρρητος αριθμός»
- **iii.** Γ: «η τιμή να είναι φυσικός αριθμός»

ΘΕΜΑ 67

- **i.** Να βρείτε τους αριθμούς x, y έτσι ώστε: $(2x - 1)^2 + (3y - 2)^2 = 0$.
- **ii.** Αν για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $4[P(A)]^2 + 9[P(B)]^2 - 4P(A) - 12P(B) + 5 = 0$, να αποδείξετε ότι: P(A)=1/2 και P(B)=2/3
- **iii.** Να αποδείξετε ότι τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.
- **iv.** Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α είναι 1/3, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα Α, Β και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το $A \cup B$ είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

ΘΕΜΑ 68

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ και $P(B) = 3\lambda - 6$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- **i.** Να βρείτε το πρόσημο του $f(\chi) = \chi^2 – 4\chi + 3$ για τις διάφορες τιμές του χ.
- **ii.** Να βρείτε το διάστημα στο οποίο παίρνει τιμές το λ.
- **iii.** Αν γνωρίζετε ότι $A \subseteq B$ και $\lambda = 13/6$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$ και $P(A \cap B)$.

ΘΕΜΑ 69

Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν οι ανισότητες $-2 < x < y$ και $-2 < y < 1$.

Α. Να αποδείξετε ότι $-2 < \chi < 1$

Β. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = |x + 3y + 8| + |2x + y - 3| + x - 2y$, είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 70

Ξέρουμε ότι $1< x < 2$.

Α. Να βρείτε το πρόσημο των παραστάσεων $x – 1$ και $x – 2$

Β. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{7\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} - \frac{2\sqrt{9x^2 - 36x + 36}}{x - 2}.$$

ΘΕΜΑ 71

Για τον αριθμό x ισχύει (x – 1)(x – 3) < 0.

i. Να συγκρίνετε τους αριθμούς x – 1 και x – 3

ii. Να δικαιολογήσετε ότι ο αριθμός x παίρνει τιμές μεταξύ 1 και 3.

ΘΕΜΑ 72

Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad (1)$, $\alpha, \beta, \gamma \in R$.

i. Για $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1).

ii. Για $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ και $\gamma = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες εκ των οποίων η μία είναι ανεξάρτητη από τις τιμές των α και β.

iii. Αν $\alpha = -2$ και $\gamma = 4$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες και να βρείτε το γινόμενο τους.

ΘΕΜΑ 73

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 1)x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda = 0,\ \lambda \in R - \{1\},\ (1)$.

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες για κάθε $\lambda \in R - \{1\}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $|S| = 2$, όπου S είναι το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 74

i. Να βρείτε το $x \in N$, ώστε οι αριθμοί: x – 1, x^2 – x, 4x – 2 με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

ii. Αν το x^2 – x είναι ο 5ος όρος αυτής της αριθμητικής προόδου να βρείτε την διαφορά της ω, τον πρώτο και τον εικοστό όρο της.

iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.

ΘΕΜΑ 75

Σε ένα κυρτό πολύγωνο η μικρότερη γωνία του είναι 60^o και κάθε άλλη γωνία του είναι μεγαλύτερη κατά 20^o από την προηγούμενή της. Να βρείτε το πλήθος των πλευρών του.

ΘΕΜΑ 76

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος για την οποία ισχύουν $α_4 = 80$ και $α_9 = 2560$.

- **i.** Να βρείτε τον πρώτο όρο και τον λόγο της.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι οι όροι περιττής τάξης $α_1, α_3, α_5, \ldots$ της παραπάνω γεωμετρικής προόδου αποτελούν επίσης διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου της οποίας να βρείτε το λόγο.
- **iii.** Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = α_1 + α_3 + α_5 + \ldots + α_{11}$.

ΘΕΜΑ 77

Δίνεται η ακολουθία: $α_ν = 4 \cdot ν - 3$.

- **i.** Να δείξετε ότι η ακολουθία ορίζει αριθμητική πρόοδο της οποίας να βρείτε τον $α_1$ και τη διαφορά ω.
- **ii.** Να υπολογίσετε τον $α_{17}$ και το άθροισμα $S = α_8 + α_9 + α_{10} + \ldots + α_{17}$.
- **iii.** Μεταξύ των όρων $α_{11}$ και $α_{21}$ της αριθμητικής προόδου να παρεμβάλετε 7 αριθμούς οι οποίοι μαζί με τους $α_{11}$ και $α_{21}$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας νέας αριθμητικής προόδου.

ΘΕΜΑ 78

Κάποιος άρχισε να αποταμιεύει χρήματα στο τέλος κάθε μήνα, αρχίζοντας με 3 Ευρώ στο τέλος του Γενάρη του 2010. Κάθε επόμενο μήνα αποταμίευε τα διπλάσια από ότι τον προηγούμενο, μέχρι το τέλος του Δεκέμβρη της ίδιας χρονιάς. Την επόμενη χρονιά άρχισε να τα ξοδεύει. Στο τέλος του Γενάρη ξόδεψε 285 Ευρώ και στη συνέχεια κάθε μήνα ξόδευε 40 Ευρώ περισσότερα από τον προηγούμενο μήνα.

- **i.** Πόσα χρήματα αποταμίευσε κατά τη διάρκεια όλης της χρονιάς 2010;
- **ii.** Πόσα ξόδεψε στους 8 πρώτους μήνες 2011;
- **iii.** Να εξετάσετε αν θα ξοδέψει όλα τα χρήματα μετά από 20 μήνες από τότε που άρχισε να τα ξοδεύει.

ΘΕΜΑ 79

Έστω η παράσταση $K = 5\alpha^2 - 8\alpha\beta + 3\beta^2$.

i. Να γίνει γινόμενο η παράσταση Κ.

ii. Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης Κ αν $\alpha > \beta > 0$.

iii. Να υπολογίσετε το Κ αν $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ και $\beta = \sqrt{5} - \sqrt{3}$.

iv. Να λύσετε την εξίσωση $5x^2 - 8\beta \cdot x + 3\beta^2 = 0$, για κάθε $\beta \in R$.

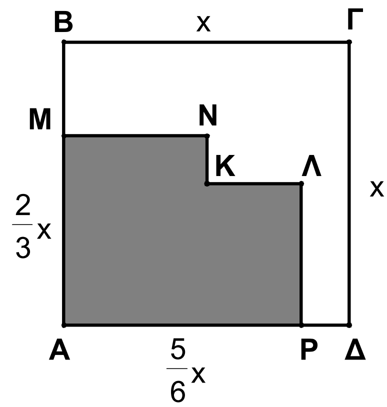
ΘΕΜΑ 80

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του σχήματος πλευράς x με κέντρο το σημείο Κ.

i. Να εκφράσετε την περίμετρο του πολυγώνου ΑΜΝΚΛΡ σαν συνάρτηση του x.

ii. Να εκφράσετε το εμβαδόν του πολυγώνου ΑΜΝΚΛΡ σαν συνάρτηση του x.

iii. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 36 cm^2, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου ΑΜΝΚΛΡ.



ΘΕΜΑ 81

Έστω η εξίσωση $x^2 - 3\beta x + 2\beta^2 = 0$.

i. Να αποδείξετε ότι έχει δύο άνισες και ομόσημες πραγματικές ρίζες για κάθε $\beta \in R^*$.

ii. Ποιο το β αν οι ρίζες της είναι αντίστροφες;

iii. Αν β < 0 και $x > \beta$, να αποδείξετε ότι

$$\left|x^2 - 3\beta x + 2\beta^2\right| - \left|3\beta x - 3\beta^2\right| - \left|x^2\right| = -\beta^2.$$

ΘΕΜΑ 82

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 – 2(κ – 5)\cdot x – (κ – 5)$, όπου $κ \in IR$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $κ \in IR$ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

ii. Αν x_1, x_2 είναι οι άνισες ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να λύσετε ως προς κ την εξίσωση:

$$16(x_1\cdot x_2)^4 – 5(x_1 + x_2)^2 + 4 = 0.$$

iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $κ \in IR$ ισχύει: $|f(x)| – f(x) = 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ΘΕΜΑ 83

i. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

1. $x^2 – 6x + 9$

2. $x^2 + x – 6$

ii. Να δείξετε ότι: $(x^2 + x – 6)\cdot(x^2 – 6x + 9) – 2(x^2 – 9)= (x^2 – 9)(x^2 – 5x + 4)$

iii. Να λύσετε την εξίσωση: $(x^2 + x – 6)\cdot(x^2 – 6x + 9) = 2(x^2 – 9)$

ΘΕΜΑ 84

i. Να αποδείξετε ότι :

$(2x – 1)(8x + 4) + (2x + 1)(9x + 1) + (9x + 1)(17x – 3) =(17x – 3)(11x+2)$

ii. Να λυθεί η ανίσωση:

$(2x – 1)(8x + 4) + (2x + 1)(9x + 1) < (9x + 1)(3 – 17x)$

ΘΕΜΑ 85

i. Να λυθεί η εξίσωση: $5x^2 + 11x + 2 =0$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{5}{x^2} + \frac{11}{x} < -2$.

ΘΕΜΑ 86

i. Να αποδείξετε ότι :

$(x^4 – 11x^3 + 24x^2) – (4x^2 – 44x + 96) = (x^2 – 4)(x^2 – 11x + 24)$

ii. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 – 11x^3 + 24x^2 = 4x^2 – 44x + 96$

ΘΕΜΑ 87

i. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 4\sqrt{3}x + 9 = 0$.

ii. Να λυθεί η ανίσωση: $x^4 - 4\sqrt{3}x^2 + 9 > 0$.

ΘΕΜΑ 88

i. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

1. $x^2 - 9x + 8$

2. $3x^2 + 16x - 12$

ii. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x^2 - 9x + 8}{x - 1} + \frac{3x^2 + 16x - 12}{3x - 2} = -3$.

ΘΕΜΑ 89

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - \lambda^2 = 0$ με $\lambda \neq 0$. **(1)**

i. Να δείξετε ότι η εξίσωση **(1)** έχει πάντοτε ετερόσημες πραγματικές ρίζες.

ii. Αν ο αριθμός $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ είναι ρίζα της **(1)**, να βρείτε τις τιμές του λ καθώς και την άλλη ρίζα της εξίσωσης.

iii. Αν $\lambda = -1$ και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης **(1)** , να δείξετε

ότι: $x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 0$.

ΘΕΜΑ 90

Δίνεται γεωμετρική πρόοδος α_ν με $\alpha_1 = 3$ λόγο $\lambda = 3$.

i. Να υπολογίσετε το S_{10}.

ii. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $\beta_\nu = \frac{1}{\alpha_\nu}$ είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρείτε το λόγο της.

iii. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{3^2} + \frac{1}{\sqrt{3^2}}\right)^2 + \left(\sqrt{3^3} + \frac{1}{\sqrt{3^3}}\right)^2 + \ldots + \left(\sqrt{3^{10}} + \frac{1}{\sqrt{3^{10}}}\right)^2$$

ΘΕΜΑ 91 (ΝΕΟ)

Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και P(A), P(B) αντίστοιχα οι πιθανότητες τους. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση $x^2 + P(A)x + \frac{1}{16} = 0$ έχει μία διπλή ρίζα.

i. Να βρεθεί η πιθανότητα $P(A)$

ii. Αν οι αριθμοί $P(A\cap B)$, $P(A - B)$, $P(A)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α, Β.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $|P[(A - B)\cup(A\cap B)]x| > \omega$ όπου ω η διαφορά της αριθμητικής προόδου ....., $P(A\cap B)$, $P(A - B)$, $P(A)$, ...

ΘΕΜΑ 92 (ΝΕΟ)

Έστω τα ενδεχόμενα Α, Β ενός δειγματικού χώρου Ω και P(A), P(B) αντίστοιχα οι πιθανότητες τους. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = P(A)x + P(A - B)$ διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$.

i. Να δείξετε ότι $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

ii. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

iii. Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου …, $f(0)$, $f(3)$, $f(6)$, …. αν ο αριθμός P(A) είναι λύση της εξίσωσης $2P^2(A) = |1 - P(A)|$

ΘΕΜΑ 93 (ΝΕΟ)

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 +(\alpha + 1)x + 1 \neq 0$, $\alpha \neq 0$ (1) η οποία δεν είναι αδύνατη στο R. Έστω επίσης οι αριθμοί Δ, $|\Delta + 3|$, $3\Delta + 6$ αποτελούν διαδοχικούς αριθμούς αριθμητικής προόδου, όπου Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (1).

i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα

ii. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και να υπολογίσετε διπλή ρίζα της εξίσωσης (1).

ΘΕΜΑ 94 (ΝΕΟ)

Έστω η εξίσωση $\mu x^2 + (3 + \mu)x +6 = 0$, με $\mu < 0$ και $|\mu| > 1$ (1) και η γεωμετρική πρόοδος S, P, 18, … , όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1).

i. Να αποδείξετε ότι $\mu = -2$

ii. Για $\mu = -2$ να παραγοντοποιήσετε και να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $\mu x^2 + (3 + \mu)x +6$.

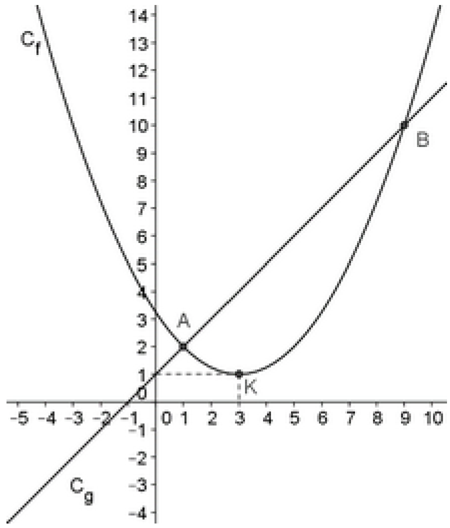
iii. Για μ = – 2 να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και το λόγο λ της γεωμετρικής προόδου και να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 8 πρώτων όρων της ισούται με $S_8 = -\frac{185}{2}\cdot(6^4+1)$.

ΘΕΜΑ 95 (ΝΕΟ)

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = \alpha x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{13}{4}$, $g(x) = x + 1$

των οποίων οι γραφικές παραστάσεις φαίνονται στο διπλανό σχήμα.



i. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g και να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{1}{4}$.

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά ότι οι συντεταγμένες των σημείων τομής των C_f, C_g είναι $A(1,2)$ και $B(9,10)$.

iii. Από το διπλανό σχήμα να γράψετε το διάστημα των x για τα οποία η C_f βρίσκεται «κάτω» από τη C_g και να το επαληθεύσετε αλγεβρικά.

ΘΕΜΑ 96 (ΝΕΟ)

Δίνονται οι παραστάσεις $A = x^2 - 3x + 2$ και $B = y^2 - 3y + 2$.

i. Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 + B^2 = 0$.

ii. Να βρείτε τι είδους συμμετρία παρουσιάζουν μεταξύ τους τα σημεία Κ, Λ των οποίων οι συντεταγμένες x και y είναι λύσεις της εξίσωσης του ερωτήματος (**i**), αν γνωρίζετε ότι δεν ανήκουν στη διχοτόμο της γωνίας xOy των αξόνων.

iii. Να δείξετε ότι η ευθεία ΚΛ όπου Κ και Λ είναι τα σημεία του ερωτήματος **(ii)** είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας x’Oy.

ΘΕΜΑ 97 (ΝΕΟ)

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Ρ(Α), Ρ(Β) αντίστοιχα οι πιθανότητές τους.

i. Να αποδείξετε ότι : $P(A \cup B) = P(A - B) + P(B)$.

ii. Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί τουλάχιστον ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β είναι 1, η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β είναι $\frac{1}{3}$ και ισχύει $\left[P(A)+\frac{4}{3}\right]^{2016}=2\cdot 4\cdot 8\cdot \ldots \cdot 2^{63}$ τότε να υπολογίσετε:

α. την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Α.

β. την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο Β

γ. την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

ΘΕΜΑ 98 (ΝΕΟ)

Δίνεται η εξίσωση $\frac{1}{2}\alpha\beta x^2+(\alpha+\beta-2)x+1-\frac{3}{\alpha}-\frac{1}{2\alpha\beta}=0$ (1) με α, β ε R^* .

i. Να βρείτε τις λύσεις της (1) για α = – 1 και β = 2.

ii. Για α = – 1 και β = 2 να αποδείξετε ότι $17\frac{x_1}{x_2}=6\sqrt{2}-19$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1) με $x_1>x_2$

iii. **α.** Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β ε R^* αν η (1) έχει μια διπλή ρίζα.

β. Για τις τιμές των α, β ε R^* που βρήκατε στο (iiiα) να βρείτε τη διπλή ρίζα της (1).

ΘΕΜΑ 99 (ΝΕΟ)

i. Να λύσετε την εξίσωση $2x^2+7x-22=0$.

ii. Να βρείτε το $x\in Z$, αν είναι γνωστό ότι οι αριθμοί $x+3,\ 10,\ 8x+4$ είναι διαδοχικοί όροι μιας γεωμετρικής προόδου.

iii. Να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση $K=|8x^2+28x-88|$ αν $x\in(-\frac{11}{2},2)$.

ΘΕΜΑ 100 (ΝΕΟ)

Έστω $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x}{2}-1 & \text{αν } x\le 1\\ \alpha x^4-\beta & \text{αν } x>1\end{cases}$

i. Να βρείτε τα α, β ώστε $f(0)+f(1)=0$ και $f(2)=64$.

ii. Αν α = 4 και β = 0 να λύσετε την εξίσωση: $|f(-1)-x|=f(\frac{3}{2})$.

ΘΕΜΑ 101 (ΝΕΟ)

i. Να βρεθεί το πρόσημο του Κ = 1 – 3x^2 + 6x για τις διάφορες τιμές του x.

ii. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{\sqrt{8-2|x|}}{x-3}$

iii. Αν $x\in[0, 2]$, να λυθεί η εξίσωση : $[(x-3)f(x)]^2 = |-3x^2+6x| + 3x^2$.

ΘΕΜΑ 102 (ΝΕΟ)

i. Να βρείτε το πρόσημο της $f(x) = x^2 - 4x + 3$, για τις διάφορες τιμές του x.

ii. Να αποδείξετε ότι $[f(\sqrt{2})]^2-19f(f(3))=-40\sqrt{2}$

iii. Αν $x\in[2,3)$ και $A=\frac{|x^2-4x+3|+|x-3|}{x^2-9}$ να αποδείξετε ότι $A=\frac{-x}{x+3}$

ΘΕΜΑ 103 (ΝΕΟ)

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + α$, με x ε R έτσι ώστε $f(\sqrt{2})=6$.

i. Να υπολογίσετε το α και το $f(-\sqrt{2})$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = α – 1.

ΘΕΜΑ 104 (ΝΕΟ)

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=-x^2+3x-2$ και $g(x)=2x-4$.

i. Ποια τα συμμετρικά του σημείου $M(4,f(4))$ ως προς τους άξονες x΄x, y΄y, την αρχή των αξόνων Ο και την ευθεία y = x ;

ii. Για ποια x, η C_f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x ;

iii. Ποια τα σημεία τομής των C_f και C_g;

ΘΕΜΑ 105 (ΝΕΟ)

Έστω πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ με μήκη πλευρών

ΑΒ = x – 2, ΒΓ = x + 1, ΓΔ = 2x + 1, ΔΕ = 15 – x και ΕΑ = 4x + 1.

i. Να εκφράσετε σαν συνάρτηση του x την περίμετρο του πενταγώνου ΑΒΓΔΕ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το x, αν είναι γνωστό ότι τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ αποτελούν με την σειρά αυτή διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε την περίμετρο του τότε.

ΘΕΜΑ 106 (ΝΕΟ)

i. Να λύσετε την ανίσωση $|x - 1| \leq 12$.

ii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{12 - |x - 1|}$.

iii. Να βρείτε τα συμμετρικά του σημείου Μ(– 2, f(– 2)) ως προς τους άξονες x΄x και y΄y, την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) και την ευθεία y = x.

ΘΕΜΑ 107 (ΝΕΟ)

i. Να λύσετε την ανίσωση $|x| \leq 2$.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $-x^2 + 3x > 0$.

iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x) = \sqrt{2 - |x|} + \dfrac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x}}$.

ΘΕΜΑ 108 (ΝΕΟ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Αν $|x| < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση

$A(x) = [f(x)]^2 + |x - 3| + |x + 2|$ και να λύσετε την εξίσωση A(x) = 7.

ΘΕΜΑ 109 (ΝΕΟ)

Έστω η συνάρτηση f(x) = x + 1 με x ϵ R και 0 < α < β.

i. Να αποδείξετε ότι f(α) < f(β)

ii. Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τις τιμές $f(\beta)$, $f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $f(0)$, $f(\alpha)$, $f(\alpha - \beta)$.

ΘΕΜΑ 110 (ΝΕΟ)

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = 2x – 1.

- **i.** Να λύσετε την εξίσωση $f(0)+f(-1)+f(1)+f(-x)=x$.
- **ii.** Να υπολογίσετε το $\lambda \in R$ αν γνωρίζουμε ότι $\lambda \cdot f(\frac{1}{2})-2f\left(\frac{\lambda}{2}\right)=3-\frac{\lambda}{2}$.

ΘΕΜΑ 111 (ΝΕΟ)

- **i.** Να λύσετε την εξίσωση $\alpha^4 = 16$.
- **ii.** Να λύσετε την εξίσωση $\beta^2 - 2\beta = 15$.
- **iii.** Να εξηγήσετε γιατί οι ευθείες $y = \alpha x + 7|\alpha|$ και $y = \beta x + 14$, όπου α, β οι λύσεις των προηγούμενων εξισώσεων, τέμνονται σε σταθερό σημείο το οποίο να βρείτε.

ΘΕΜΑ 112 (ΝΕΟ)

Έστω η συνάρτηση $f:[-1,2]\to R$, με τύπο $f(x)=-3x+2$.

- **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α της συνάρτησης.
- **ii.** Να αποδείξετε ότι $-4\le f(x)\le 5$, για κάθε $x\in A$.
- **iii.** Να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση

ΘΕΜΑ 113 (ΝΕΟ)

Έστω η ευθεία (ε_1), με εξίσωση y = 3x – 6 και Κ, Λ τα σημεία που τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

- **i.** Ποιο το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ.
- **ii.** Ποια η εξίσωση της ευθείας (ε_2), που είναι παράλληλη στην (ε_1) και τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Β(0, 9).
- **iii.** Ποιές οι αποστάσεις (ΒΛ) και (ΚΓ), όπου Γ το σημείο τομής της (ε_2) με τον άξονα x΄x.

ΘΕΜΑ 114 (ΝΕΟ)

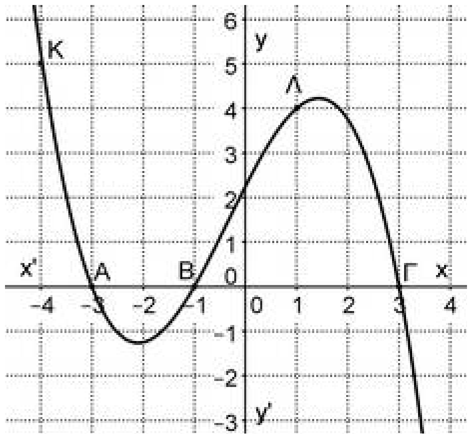
Δίνονται οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ με εξισώσεις $y = (λ^2 + 2)x + 7$ και $y = 3λx - 7$.

Να βρείτε τις τιμές του $λ \in R$ ώστε:

- **i.** η ευθεία $ε_2$ να διέρχεται από το σημείο Α(1, 2).
- **ii.** οι ευθείες $ε_1$, $ε_2$ να είναι παράλληλες.

ΘΕΜΑ 115 (ΝΕΟ)

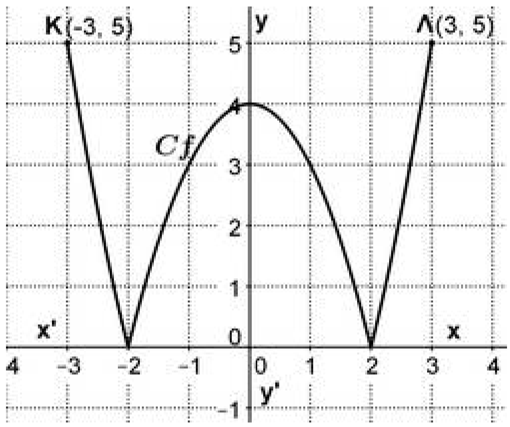
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



- **i.** Να βρείτε τις ρίζες της f.
- **ii.** Να βρείτε τις τιμές f(-4), f(-3), f(1), f(-1), f(3)
- **iii.** Να βρείτε τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από τον x΄x
- **iv.** Να λύσετε την ανίσωση f(x) < 0
- **v.** Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης f(x) = 2

ΘΕΜΑ 116 (ΝΕΟ)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, που έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Α.



- **i.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού Α.
- **ii.** Να βρείτε το σύνολο τιμών f(Α).
- **iii.** Να βρείτε τις τιμές f(0), f(-2), f(2).
- **iv.** Να λύσετε στο Α την εξίσωση f(x) = 5.

ΘΕΜΑ 117 (ΝΕΟ)

Δίνεται η ακολουθία $α_ν$ με άθροισμα των ν πρώτων όρων της $S_ν = 5ν^2 – ν$.

i. Να βρείτε το άθροισμα των ν-1 πρώτων όρων της

ii. Να βρείτε τον τύπο που δίνει τον νιοστό της όρο.

iii. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε το $α_1$ και το ω

iv. Να βρείτε τον όρο $α_ν$ της αριθμητικής προόδου που ισούται με 164.

v. Να βρείτε το πλήθος ν των πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου που έχει άθροισμα $S_ν = 594$.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΑΡΝΙΚΙΟΥ

ΑΡΓΥΡΗΣ ΓΑΜΒΡΕΛΛΗΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΝΑΒΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΑΠΟΓΛΗ

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΚΑΡΑΣΜΑΝΟΓΛΟΥ

ΚΩΣΤΑΣ ΜΑΛΛΙΑΚΑΣ

ΜΑΡΤΗΣ ΜΑΡΤΑΚΗΣ

ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ ΜΠΟΥΡΝΗΣ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΠΟΥΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΡΕΝΕΣΗΣ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΣΕΪΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΤΑΤΙΟΥ

ΤΑΣΟΣ ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ