ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Δ ένα σημείο της πλευράς ΑΓ. Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΓΔΕ και έστω Ζ η τομή της ΔΕ με την ΑΒ.

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta Z}}$ και Μ το μέσο της ΒΔ.

Α1. Να αποδείξετε ότι το $\overset{\Delta}{\mathrm{BEZ}}$ είναι ισόπλευρο.

Α2. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{EZO}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{O\Delta\Gamma}}$ είναι ίσα.

Α3. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{OM} \perp \mathrm{M\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε, στην πλευρά ΑΓ τα Ζ, Η και στην πλευρά ΑΒ τα Θ και Ι ώστε το εξάγωνο ΔΕΖΗΘΙ να έχει όλες τις πλευρές ίσες. Στο εσωτερικό του εξαγώνου σχηματίζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta EP}}$.

(Α1) Να αποδείξετε ότι τα τετράπλευρα ΡΔΙΘ και ΡΕΖΗ είναι ρόμβοι.

(Α2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{\Delta\widehat{E}Z} + \mathrm{E\widehat{Z}H} = 240°$ και ότι $\mathrm{\Delta\widehat{I}\Theta} = \mathrm{\Delta\widehat{E}Z}$.

(Α3) Να αποδείξετε ότι ΘΔ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 3

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στις προεκτάσεις της ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε ώστε ΔΒ = ΒΓ = ΓΕ. Η ευθεία που είναι κάθετη στη ΔΕ στο Ε τέμνει την ευθεία ΔΑ στο Ζ.

(Α1) Ν.δ.ο. $\mathrm{A\Gamma} \perp \mathrm{\Delta Z}$.

(Α2) Ν.δ.ο. ΑΖ = ΖΕ.

(Α3) Ν.δ.ο. ΓΖ // ΑΒ και ΓΔ = ΓΖ.

ΘΕΜΑ 4

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και στο ύψος του ΑΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Μ.

(Α1) Αν ΜΕ // ΑΒ το Ε στην ΑΓ ν.δ.ο ΜΕ = ΑΕ.

(Α2) Αν η παράλληλη από το Μ στην ΑΓ τέμνει την παράλληλη από το Γ στην ΑΒ στο Ζ να δειχθεί ότι ΒΖ = ΒΕ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι το $\overset{\Delta}{\mathrm{BEZ}}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 5

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Η ευθεία του ύψους ΑΔ τέμνει την κάθετη στην ΑΒ στο Β στο Ζ και ονομάζουμε Κ το μέσο του ΑΖ.

(Α1) Ν.δ.ο. $\mathrm{BZ} = \frac{1}{2}\mathrm{AZ}$.

(Α2) Ν.δ.ο. ΓΚ = ΒΖ.

(Α3) Ν.δ.ο. $\mathrm{BK} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 6

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β. Φέρνουμε την κοινή εφαπτομένη τους ΓΔ που είναι πλησιέστερα στο Α , όπου Γ , Δ είναι τα σημεία επαφής στους κύκλους (c_1) και (c_2) αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΓΑ και ΔΑ τέμνουν τους κύκλους (c_2) και (c_1) στο Ε και Ζ αντίστοιχα , τότε:

(Α1) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 180° - \Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$.

(Α2) Να αποδείξετε ότι ΒΔ διχοτόμος της $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E}$.

(Α3) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \Delta\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{Z}$.

ΘΕΜΑ 7

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β. Η εφαπτομένη του (c_1) στο Α τέμνει τον (c_2) στο Γ, η εφαπτομένη του (c_2) στο Α τέμνει τον (c_1) στο Δ και η ευθεία ΓΔ ξανατέμνει τον (c_1) στο σημείο Ε εξωτερικό του ΓΔ. Η ΕΒ ξανατέμνει τον (c_2) στο Ζ.

(Α1) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{Z}}\Gamma$.

(Α2) Να αποδείξετε ότι ΑΕΓΖ παραλληλόγραμμο.

(Α3) Να αποδείξετε ότι η ΕΒ περνά από το μέσο της ΑΓ.

ΘΕΜΑ 8

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β. Η εφαπτομένη του (c_1) στο Α τέμνει τον (c_2) στο Γ, η εφαπτομένη του (c_2) στο Α τέμνει τον (c_1) στο Δ. Αν οι προεκτάσεις των ΓΒ και ΔΒ τέμνουν τους κύκλους (c_1) και (c_2) στο Ε και Ζ αντίστοιχα , τότε:

(Α1) Ν.δ.ο. $\underline{\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E} = \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z}}$.

(Α2) Ν.δ.ο. ΑΔ = ΑΕ.

(Α3) Ν.δ.ο. ΓΕ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 9

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β και έχουν κέντρα Κ, Λ αντίστοιχα. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του $\overset{\Delta}{\mathrm{AK\Lambda}}$ τέμνει τους (c_1), (c_2) στα Γ, Δ αντίστοιχα.

(Α1) Ν.δ.ο. $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{K}}\Lambda$.

(Α2) Ν.δ.ο. τα σημεία Γ, Β, Λ, όπως και τα Δ, Β, Κ είναι συνευθειακά.

(Α3) Ν.δ.ο. ΑΒ διχοτομεί την $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\Delta$.

ΘΕΜΑ 10

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β και το κέντρο του (c_2) είναι εσωτερικό του (c_1) και η ακτίνα του (c_1) είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του (c_2). Στον (c_1) παίρνουμε το σημείο Γ ώστε ΑΒ = ΑΓ. Η ΒΓ τέμνει τον (c_2) στο Κ, η ΑΚ τέμνει τον (c_1) στο Δ και η ΒΔ τέμνει τον (c_2) στο Ε.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΔΑ διχοτόμος της $\mathrm{B}\widehat{\Delta}\Gamma$.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΑΔ διχοτόμος της $\Gamma\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{E}$.

(Α3) Ν.δ.ο. $\Gamma\mathrm{E} \perp \mathrm{A}\Delta$.

ΘΕΜΑ 11

Θεωρούμε σε τετράγωνο ΑΒΓΔ σημείο Ε της ΒΓ ώστε ΒΕ < ΕΓ.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ στο Θ. Φέρνουμε την ευθεία (ε) κάθετη στην ΑΕ στο σημείο Θ. Η (ε) τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ζ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΘΖΔ είναι εγγράψιμο.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΑΘ = ΘΖ.

(Α3) Στη ΘΖ παίρνουμε το σημείο Κ ώστε ΘΚ = ΘΕ.
Να αποδειχθεί ότι ΑΚ = ΖΕ και $\mathrm{AK} \perp \mathrm{ZE}$.

ΘΕΜΑ 12

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ τα σημεία Κ, Λ στην πλευρά ΓΔ και τα σημεία Μ, Ν στην ΒΓ ώστε $\Delta\mathrm{K} = \Lambda\Gamma = \Gamma\mathrm{M} = \mathrm{MN} = \frac{1}{3}\mathrm{AB}$.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΔΜ = ΑΚ και ΔΝ = ΑΛ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AK} \perp \Delta\mathrm{M}$ και $\mathrm{A}\Lambda \perp \Delta\mathrm{N}$.

(Α3) Αν Ε το σημείο τομής των ΔΝ και ΑΚ και Ζ το σημείο τομής των ΔΜ και ΑΛ τότε ΕΖ // ΓΔ.

ΘΕΜΑ 13

Έστω ΑΒΓΔ τετράγωνο και Μ μέσο της πλευράς ΑΒ. Η ευθεία (ε) είναι κάθετη στη ΓΜ στο Μ και τέμνει την πλευρά ΑΔ στο Ε και την προέκταση της ΓΒ στο Ζ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΜΕ = ΜΖ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{E\Gamma Z}}$ είναι ισοσκελές.

(Α3) Αν $\mathrm{Z\Theta} \perp \mathrm{E\Gamma}$ (Θ στην ΕΓ) ν.δ.ο. ΖΘ = ΑΒ.

ΘΕΜΑ 14

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα έτσι ώστε ΒΕ = ΓΖ.

(Α1) Ν.δ.ο. ΑΖ = ΔΕ και ΑΕ = ΒΖ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AZ} \perp \Delta\mathrm{E}$ και $\mathrm{BZ} \perp \mathrm{AE}$.

(Α3) Αν Θ η τομή των ΔΕ και ΑΖ και Ι η τομή των ΑΕ και ΒΖ να αποδειχθεί ότι τα σημεία Γ, Ε, Ι, Θ και Ζ ανήκουν στον ίδιο κύκλο.

ΘΕΜΑ 15

Θεωρούμε ορθογώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{\mathrm{A}} = 90°$) και κατασκευάζουμε εκτός αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ. Αν $\mathrm{EK} \perp \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{H\Lambda} \perp \mathrm{B\Gamma}$,

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΚΒ = ΓΛ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΕΚ + ΗΛ = ΒΓ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ε, Α, Η είναι συνευθειακά.

(Α4) Αν Μ το μέσο του ΕΗ , να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 16

Θεωρούμε το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ) έτσι ώστε οι ευθείες των μη παραλλήλων πλευρών του να τέμνονται κάθετα στο Ο. Αν τα Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντίστοιχα ,

(Α1) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{K\Lambda} = \dfrac{\Gamma\Delta - \mathrm{AB}}{2}$.

(Α3) Αν Η, Θ είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα, τότε να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΚΗΛΘ είναι ορθογώνιο. .

ΘΕΜΑ 17

Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, σημείο Ε της ΒΔ και το συμμετρικό Γ΄ του Γ ως προς το Ε. Αν είναι $\Gamma'\mathrm{Z} \perp \mathrm{AB}$ και $\Gamma'\mathrm{H} \perp \mathrm{A}\Delta$,

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΑΓ΄//ΒΔ

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΖΗ//ΑΓ

(Α3) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Ε, Ζ, Η είναι συνευθειακά.

ΘΕΜΑ 18

Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και έστω Μ τυχαίο σημείο του μικρού τόξου ΒΓ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι αν Ν σημείο της ΑΜ ώστε ΒΜ = ΜΝ τότε το $\overset{\Delta}{\mathrm{BMN}}$ είναι ισόπλευρο.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{ABN}} = \overset{\Delta}{\mathrm{BM\Gamma}}$.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι ΑΜ = ΒΜ + ΜΓ.

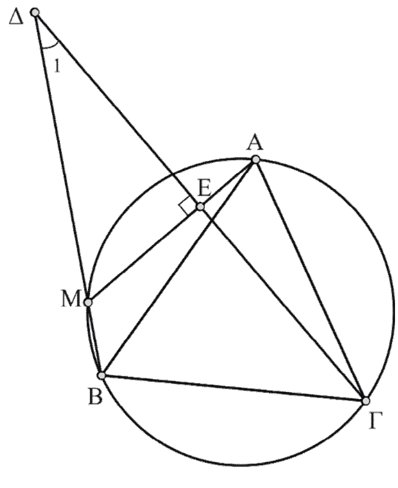
ΘΕΜΑ 19

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και από εσωτερικό σημείο Μ φέρνουμε παράλληλες στις πλευρές του τριγώνου. Υποθέτουμε ότι οι παράλληλες είναι ΔΕ // ΑΒ με Δ στη ΒΓ και Ε στην ΑΓ, ΖΗ // ΑΓ με Ζ στη ΒΓ και Η στην ΑΒ και ΙΘ // ΒΓ με Ι στην ΑΒ και Θ στην ΑΓ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{MZ\Delta}}, \overset{\Delta}{\mathrm{M\Theta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{MIH}}$ είναι ισόπλευρα.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα ΜΔ + ΜΕ + ΜΗ είναι σταθερό.

ΘΕΜΑ 20



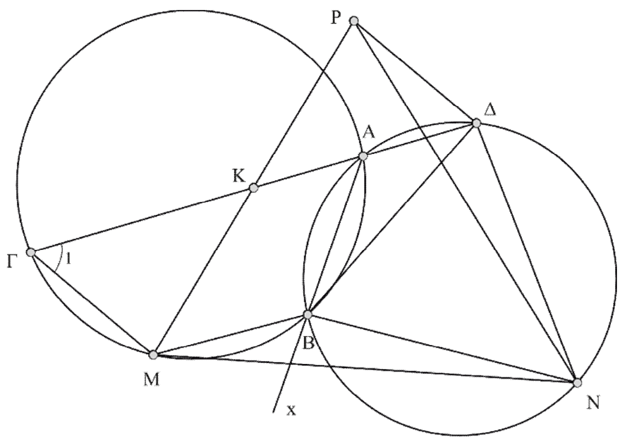
Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (c), όπως φαίνεται στο σχήμα. Παίρνουμε Μ τυχαίο σημείο του μικρού τόξου ΑΒ. Από το Γ φέρνουμε κάθετη στην ΑΜ που τέμνει την ΑΜ στο Ε και τη ΒΜ στο Δ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι 2ΜΕ = ΔΜ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΜΔ = ΜΓ.

ΘΕΜΑ 21

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Από το Α φέρνουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τον (c_1) στο Γ και τον (c_2) στο Δ. Ονομάζουμε Μ, Ν τα μέσα των τόξων $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}, \overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}$ των (c_1), (c_2) που δεν περιέχουν το Α και Κ το μέσο του ΓΔ.



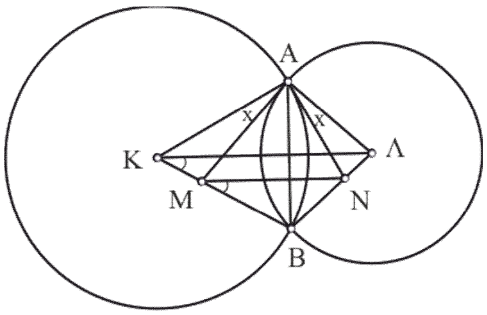
(Α1) Αν Ρ το συμμετρικό του Μ ως προς το Κ να αποδειχθεί ότι ΔΡ = ΜΒ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{MBN}$ και $\overset{\Delta}{P\Delta N}$ είναι ίσα.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι $NK \perp MK$.

ΘΕΜΑ 22

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β και έχουν κέντρα Κ και Λ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



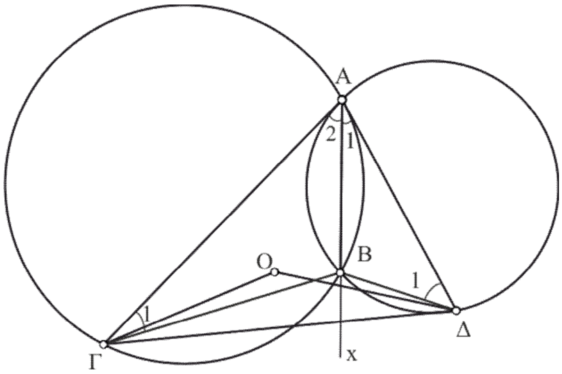
Η εφαπτομένη του (c_2) στο Α τέμνει την ΚΒ στο Μ και η εφαπτομένη του (c_1) στο Α τέμνει την ΒΛ στο Ν.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $K\widehat{A}M = \Lambda\widehat{A}N$.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $M\widehat{A}N + M\widehat{B}N = 180°$.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι $AB \perp MN$.

ΘΕΜΑ23



Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β, όπως φαίνεται στο σχήμα. Οι εφαπτόμενες των (c_2), (c_1) στο Α τέμνουν τους (c_1), (c_2) στα Γ, Δ αντίστοιχα.

(Α1) Να αποδείξετε ότι $\Gamma\widehat{B}\Delta = 2\Gamma\widehat{A}\Delta$.

(Α2) Αν Ο το περίκεντρο του $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΟΓΔ είναι εγγράψιμο.

(Α3) Να αποδείξετε ότι $OB \perp AB$.

ΘΕΜΑ 24

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και Μ τυχαίο σημείο της διαγωνίου ΒΔ. Από το Μ φέρνουμε ΕΖ // ΑΒ κα ΗΘ // ΒΓ, όπου Ε, Ζ σημεία στις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα και Η, Θ στις ΑΒ και ΓΔ.

(Α1) Να αποδείξετε ότι ΕΗ = ΘΖ.

(Α2) Να αποδείξετε ότι $M\Gamma \perp EH$.

(Α3) Αν Κ, Λ τα κέντρα των ορθογωνίων ΑΗΜΕ και ΓΖΜΘ τότε το μήκος ΚΛ είναι σταθερό.

ΘΕΜΑ 25

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και παίρνουμε το σημείο Ε στην ΑΒ και το σημείο Η στην προέκταση της ΒΓ ώστε ΑΕ = ΓΗ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΑΓ τέμνονται στο Ρ και η κάθετος στην ΔΕ στο Ρ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ.

(Α1) Να αποδείξετε ότι $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}} = \overset{\Delta}{\mathrm{\Delta \Gamma H}}$.

(Α2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{H} = 90°$.

(Α3) Να αποδείξετε ότι ΔΖ διχοτόμος της $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{H}$.

(Α4) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΕΖ, ΔΖΗ και να δείξετε ότι ΕΖ = ΑΕ + ΓΖ.

ΘΕΜΑ 26

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και παίρνουμε στην πλευρά ΑΒ το Μ στην πλευρά ΒΓ το Ν έτσι ώστε $\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{N} = 45°$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΜ και ΔΝ τέμνουν τη διαγώνιο ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΝ είναι εγγράψιμο.

(Α2) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta EN}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta MZ}}$ είναι ορθογώνια και ισοσκελή.

(Α3) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \mathrm{M}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$.

ΘΕΜΑ 27

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και από το Α φέρνουμε δύο ημιευθείες Αx και Αy στο εσωτερικό της $\widehat{\mathrm{A}}$. Φέρνουμε $\mathrm{\Delta E} \perp \mathrm{Ax}$, $\mathrm{B\Theta} \perp \mathrm{Ax}$ και $\mathrm{\Delta Z} \perp \mathrm{Ay}$, $\mathrm{BH} \perp \mathrm{Ay}$.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΑΖΕΔ είναι εγγράψιμο.

(Α2) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$.

(Α3) Να αποδείξετε ότι $\mathrm{ZE} \perp \mathrm{\Theta H}$.

ΘΕΜΑ 28

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ, στο εσωτερικό του οποίου παίρνουμε το σημείο Μ, το Μ και το Α να μην είναι στο ίδιο μέρος σχετικά με την διαγώνιο ΒΔ, ώστε $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 2\mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{B} = 30°$. Στην προέκταση της ΒΑ παίρνουμε σημείο Ε έτσι ώστε ΑΒ = ΑΕ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΒΜΔΕ είναι εγγράψιμο.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο ΒΜΔΕ είναι το Α.

(Α3) Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΑΒ

ΘΕΜΑ 29

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και το σημείο Ε στην πλευρά ΑΒ. Η διχοτόμος της $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\Gamma$ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ. Στη ΔΕ παίρνουμε το σημείο Η ώστε ΕΗ = ΑΕ και φέρνουμε την ευθεία ΑΗ που τέμνει τη ΓΔ στο Θ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΔΗ = ΔΘ.

(Α2) Να αποδείξετε ότι $\Delta\mathrm{Z} \perp \mathrm{A}\Theta$.

(Α3) Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ + ΓΖ.

ΘΕΜΑ 30

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και στο εσωτερικό του παίρνουμε σημείο Ε ώστε: $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B} = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{A} = 15°$

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΔΕ = ΕΓ.

(Α2) Εξωτερικά του τετραγώνου κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΖ. Να αποδειχθεί ότι ΖΒ = ΖΕ = ΖΑ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι το $\overset{\Delta}{\Gamma\mathrm{E}\Delta}$ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 31 (ΝΕΟ)

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) έχουν κέντρα Κ, Λ αντίστοιχα και τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου.
Η ευθεία ΚΑ τέμνει τον (c_1) στο Δ και τον (c_2) στο Ζ και η ευθεία ΑΛ τέμνει τον (c_2) στο Γ και τον (c_1) στο Ε. Η ευθεία ΕΖ ξανατέμνει τον (c_1) στο Η και τον (c_2) στο Θ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Δ, Β, Γ είναι συνευθειακά.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΔΕΖΓ είναι εγγράψιμο.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A}\Delta$ και $\mathrm{B}\Theta \perp \mathrm{A}\Gamma$.

ΘΕΜΑ 32 (ΝΕΟ)

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) έχουν κέντρα Κ, Λ αντίστοιχα και τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου.
Αν η ευθεία ΚΛ τέμνει τον (c_1) στο Γ και οι ευθείες ΓΑ, ΓΒ τέμνουν τον (c_2) στα Δ και Ε να αποδειχθεί ότι

(Α1) ΑΒ // ΕΔ.

(Α2) Τα τόξα ΑΔ και ΒΕ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 33 (ΝΕΟ)

Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) έχουν κέντρα Κ, Λ αντίστοιχα και τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου. Αν το Γ είναι ένα τυχαίο σημείο του (c_1) που δεν ανήκει στο μικρό τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και οι ΓΑ, ΓΒ τέμνουν τον (c_2) στα Ε και Δ αντίστοιχα να δείξετε ότι

(Α1) $\Delta\hat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{B}\hat{\mathrm{K}}\Gamma}{2}$

(Α2) $\Gamma\mathrm{K} \perp \Delta\mathrm{E}$.

ΘΕΜΑ 34 (ΝΕΟ)
Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου. Από το εξωτερικό τους σημείο Δ φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΔΓ του (c_1).Η ευθεία ΓΑ τέμνει τον (c_2) στο Ε και η ΔΕ τέμνει τον (c_2) στο Ζ ώστε το Ζ να είναι εσωτερικό του ΔΕ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $\Gamma\widehat{B}Z = \Delta\widehat{\Gamma}E + \Delta\widehat{E}\Gamma$.
(Α2) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος που περνά από τα Β, Γ, Ζ περνά και από το Δ.

ΘΕΜΑ 35 (ΝΕΟ)
Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου. Από το Β φέρνουμε ευθεία που τέμνει τον (c_1) στο Γ και τον (c_2) στο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος (c_3) του $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ τέμνει την ΑΒ στο Ε και οι ευθείες ΕΓ, ΕΔ τέμνουν τους (c_1), (c_2) στα Ζ και Η αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι

(Α1) $Z\widehat{A}\Gamma = \Delta\widehat{A}H$.
(Α2) τα Ζ, Β, Η είναι συνευθειακά.
(Α3) το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι εγγράψιμο.

ΘΕΜΑ 36 (ΝΕΟ)
Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) έχουν κέντρα Κ, Λ αντίστοιχα και τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου. Η ΚΒ τέμνει τον (c_2) ξανά στο Γ και η ΛΒ ξανατέμνει τον (c_1) στο Δ και η ΓΔ τέμνει τον (c_1) Ζ και τον (c_2) στο Ε.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $B\widehat{K}\Delta = B\widehat{\Lambda}\Gamma$.
(Α2) Να αποδειχθεί ότι το ΓΔΚΛ είναι εγγράψιμο.
(Α3) Να αποδειχθεί ότι ΒΖ = ΒΕ.

ΘΕΜΑ 37 (ΝΕΟ)
Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β. Μία ευθεία (ε) τέμνει τον κύκλο (c_1) στα Γ, Δ, τον (C_2) στα Ε και Ζ και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο Θ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $E\widehat{A}B = E\widehat{Z}B$.
(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\Gamma\widehat{A}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$.
(Α3) Να αποδειχθεί ότι $\Gamma\widehat{A}E = \Delta\widehat{B}Z$.

ΘΕΜΑ 38 (ΝΕΟ)
Δύο κύκλοι (c_1), (c_2) τέμνονται στα Α και Β, ώστε το μικρό τόξο ΑΒ του καθενός να είναι στο εσωτερικό του άλλου. Φέρνουμε τις διαμέτρους ΑΓ και ΑΔ των (c_1), (c_2) αντίστοιχα και η ΑΓ τέμνει τον (c_2) στο Ε και η ΑΔ τέμνει τον (c_1) στο Ζ.
(Α1) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Γ, Β, Δ είναι συνευθειακά
(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΑΒ, ΓΖ, ΔΕ συντρέχουν.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι το περίκεντρο του $\overset{\Delta}{\mathrm{AEZ}}$ είναι σημείο της ΑΒ.

ΘΕΜΑ 39 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\mathrm{A}\widehat{\Gamma}\Delta$ τέμνει την ΑΔ στο Κ. Από την κορυφή Β φέρνουμε κάθετη στη ΓΚ που τέμνει την ΑΓ στο Ε και την ΔΓ στο Ζ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΓΕ = ΔΚ.

(Α2) Αν Θ μέσο ΔΖ και Ο κέντρο του τετραγώνου να αποδειχθεί ότι ΓΘ = ΓΟ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι ΔΖ = 2ΕΟ.

ΘΕΜΑ 40 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ και παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΑΔ. Από τις κορυφές Α και Γ φέρνουμε $\mathrm{AZ} \perp \mathrm{BE}$ και $\Gamma\Theta \perp \mathrm{BE}$.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΒΖ = ΓΘ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι το τετράπλευρο ΓΔΕΘ είναι εγγράψιμο.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι ΔΘ = ΓΖ.

ΘΕΜΑ 41 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Φέρνουμε τις κάθετες ημιευθείες Αx και Δy που τέμνονται σε σημείο Ε που είναι εσωτερικό του τετραγώνου. Η Αx τέμνει την πλευρά ΓΔ στο Ζ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο Θ. Η Δy τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Η και την προέκταση της πλευράς ΑΒ στο Κ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι ΑΖ = ΔΗ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΒΚ = ΓΘ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{AH} \perp \mathrm{K}\Theta$.

ΘΕΜΑ 42 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε τετράγωνο ΑΒΓΔ. Με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΒ γράφουμε το τεταρτοκύκλιο (c_1) εντός του τετραγώνου. Με διάμετρο ΓΔ γράφουμε ημικύκλιο (c_2) εντός του τετραγώνου και παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε του (c_2). Η ΓΕ τέμνει το (c_1) στο Ζ και η ΔΖ τέμνει το (c_2) στο Θ.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι Θ μέσο του ΔΖ.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $2\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = \Delta\widehat{\Gamma}\mathrm{Z}$.

(Α3) Αν $\mathrm{ZK} \perp \mathrm{A}\Delta$ να αποδειχθεί ότι ΖΚ = ΖΕ.

ΘΕΜΑ 43 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΗ με Η εσωτερικό του τετραγώνου.

(Α1) Αν η ΔΗ τέμνει την ΑΒ στο Θ ν.δ.ο. το Η είναι μέσο του ΔΘ και $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\Theta = 15^\circ$.

(Α2) Αν Ε σημείο της διαγωνίου ΑΓ ώστε $\Gamma\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{E} = 30^\circ$ ν.δ.ο. $\mathrm{B}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{E} = \mathrm{B}\overset{\Delta}{\mathrm{H}}\Theta$.

(Α3) Αν Ζ στην προέκταση της ΑΓ ώστε ΕΓ = ΓΖ ν.δ.ο. το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Delta Z}}$ είναι ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 44 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\mathrm{\Gamma\Delta Z}}$, το Ζ εσωτερικό σημείο του τετραγώνου. Επίσης κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{AZE}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{ZEH}}$.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{A} = 15°$.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι $\Delta\mathrm{E} \perp \mathrm{EH}$.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι ΔΕ = ΓΗ.

ΘΕΜΑ 45 (ΝΕΟ)

Θεωρούμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ και παίρνουμε στην ΑΒ το σημείο Ε, στη ΒΓ το σημείο Ζ και στην προέκταση της ΒΓ το Η ώστε $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{Z}\widehat{\Delta}\mathrm{H} = 45°$.

(Α1) Να αποδειχθεί ότι $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{E} = \Gamma\widehat{\Delta}\mathrm{H}$.

(Α2) Να αποδειχθεί ότι ΔΕ = ΔΗ.

(Α3) Να αποδειχθεί ότι ο κύκλος με κέντρο το Δ και ακτίνα ΑΔ εφάπτεται στην ΕΖ και ότι $\mathrm{EZ} = \mathrm{AE} + \Gamma\mathrm{Z}$.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΑΡΝΙΚΙΟΥ

ΑΡΓΥΡΗΣ ΓΑΜΒΡΕΛΛΗΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΝΑΒΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΑΠΟΓΛΗ

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΚΑΡΑΣΜΑΝΟΓΛΟΥ

ΚΩΣΤΑΣ ΜΑΛΛΙΑΚΑΣ

ΜΑΡΤΗΣ ΜΑΡΤΑΚΗΣ

ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ ΜΠΟΥΡΝΗΣ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΠΟΥΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΡΕΝΕΣΗΣ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΣΕΪΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΤΑΤΙΟΥ

ΤΑΣΟΣ ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ