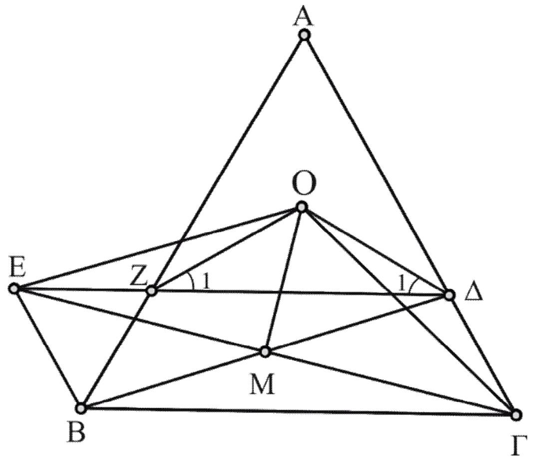
ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ – ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΔΩΔΕΚΑΝΗΣΟΥ

ΘΕΜΑ 1

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>



(Α1) Αφού ΔΖ // ΒΓ θα έχουμε ότι το $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ισόπλευρο. Τότε $E\hat{Z}B = Z\hat{B}\Gamma = 60^\circ$ (εντός εναλλάξ παραλλήλων) και $Z\hat{B}E = \Delta\hat{A}B = 60^\circ$ (εντός εναλλάξ παραλλήλων) . Άρα $\overset{\Delta}{BEZ}$ ισόπλευρο.

(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{OEZ}$ και $\overset{\Delta}{O\Delta\Gamma}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^\circ}$ ΕΖ = ΔΓ γιατί ΕΖ = ΕΒ και ΕΒ = ΔΓ.

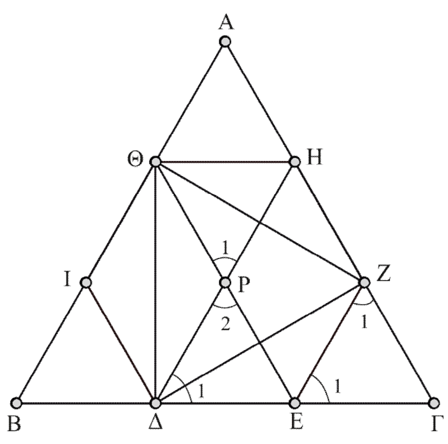
$\boxed{2^\circ}$ ΟΖ = ΟΔ αφού το Ο είναι το περίκεντρο του $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ και

$\boxed{3^\circ}$ $E\hat{Z}O = O\hat{\Delta}\Gamma = 150^\circ$ αφού $\hat{Z}_1 = \hat{\Delta}_1 = 30^\circ$.

(Α3) Από το (Α2) έχουμε ΟΓ = ΟΕ οπότε $\overset{\Delta}{OE\Gamma}$ ισοσκελές και αφού το Μ είναι το μέσο της ΕΓ, γιατί είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΒΓΔΕ θα έχουμε ότι $OM \perp E\Gamma$, άρα $O\widehat{M}\Gamma = 90^\circ$.

ΘΕΜΑ 2

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>

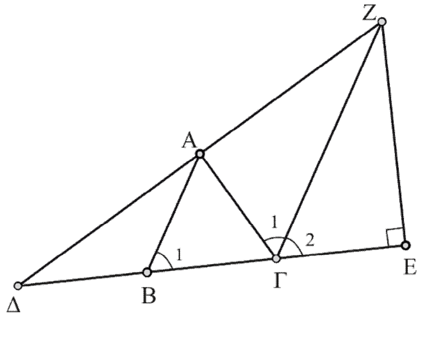


(Α1) Είναι $\hat{\Delta}_1 = \hat{B} = 60^\circ$, άρα ΡΔ // ΑΒ $\Rightarrow$ ΡΔ = // ΙΘ, άρα ΡΔΙΘ παραλληλόγραμμο. Όμως ΔΡ = ΔΙ, άρα ρόμβος. Όμοια ΡΕ = // ΗΖ άρα ΡΕΖΗ ρόμβος.

(Α2) $\Delta\hat{E}Z + E\hat{Z}H = 60^\circ + \hat{Z}_1 + 60^\circ + \hat{E}_1 =$ $= 120^\circ + (\hat{E}_1 + \hat{Z}_1) = 120^\circ + 180^\circ - 60^\circ = 240^\circ$ Το $\overset{\Delta}{\Theta P H}$ είναι ισόπλευρο, άρα $\hat{P}_1 = \hat{P}_2 = 60^\circ$ οπότε $\Theta\hat{P}\Delta + H\hat{P}E = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$. Όμως $\Theta\hat{P}\Delta = \Theta\hat{I}\Delta$ και $H\hat{P}E = H\hat{Z}E$, οπότε: $\Theta\hat{I}\Delta + H\hat{Z}E = H\hat{Z}E + \Delta\hat{E}Z \Rightarrow \Delta\hat{I}\Theta = \Delta\hat{E}Z$.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Theta I\Delta}$ και $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ είναι ίσα διότι $\boxed{1^\circ}$ ΘΙ = ΔΕ $\boxed{2^\circ}$ ΙΔ = ΕΖ $\boxed{3^\circ}$ $\Theta\hat{I}\Delta = \Delta\hat{E}Z$ από το (Α2) άρα ΘΔ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 3



<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>

(Α1) Αφού ΑΒ διάμεσος στο $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ και

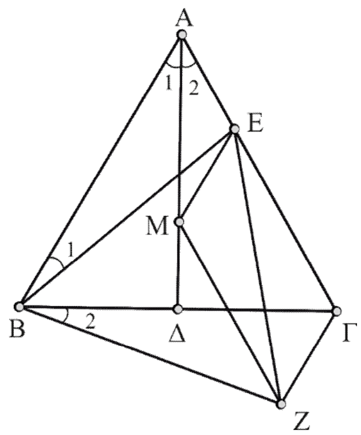
$AB = \frac{\Delta\Gamma}{2} \Rightarrow \Gamma\widehat{A}\Delta = 90°$.

(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Gamma Z}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma E Z}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΓΖ κοινή $\boxed{2°}$ ΑΓ = ΓΕ και είναι ορθογώνια. Οπότε ΑΖ = ΖΕ.

(Α3) Είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_2$ από (Α2) και αφού

$A\widehat{\Gamma}E = 180° - 60° = 120° \Rightarrow \widehat{\Gamma}_2 = 60°$. Οπότε $\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{B}_1$, άρα ΑΒ // ΓΖ. Στο $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma Z}$ είναι ΑΓ διχοτόμος και ύψος άρα είναι ισοσκελές οπότε ΓΔ = ΓΖ.

ΘΕΜΑ 4



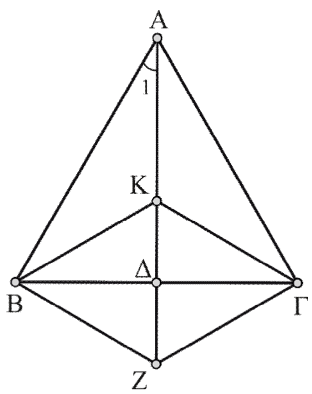
ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(Α1) Είναι ΑΔ διχοτόμος της $\widehat{A}$, άρα $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 30°$ και αφού $ME // AB \Rightarrow A\widehat{M}E = \widehat{A}_1 = 30° = \widehat{A}_2$, άρα ΑΕ = ΜΕ.

(Α2) Το τετράπλευρο ΜΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, άρα ΜΕ = ΓΖ = ΑΕ. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABE}$ και $\overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΑΒ = ΒΓ (ισόπλευρο) $\boxed{2°}$ ΑΕ = ΓΖ $\boxed{3°}$ $B\widehat{\Gamma}Z = A\widehat{B}\Gamma = B\widehat{A}E = 60°$ (γιατί ΓΖ // ΑΒ) .
Άρα ΒΕ = ΒΖ.

(Α3) Από
Α2)$\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 \Rightarrow \widehat{B}_1 + E\widehat{B}\Gamma = \widehat{B}_2 + E\widehat{B}\Gamma \Rightarrow 60° = E\widehat{B}Z$ άρα $\overset{\Delta}{EBZ}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 5



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(Α1) Αφού ΑΔ ύψος και $\overset{\Delta}{AB\Delta}$ ισόπλευρο$\Rightarrow$ ΑΔ διχοτόμος, άρα $\widehat{A}_1 = 30°$, άρα $BZ = \frac{1}{2}AZ$.

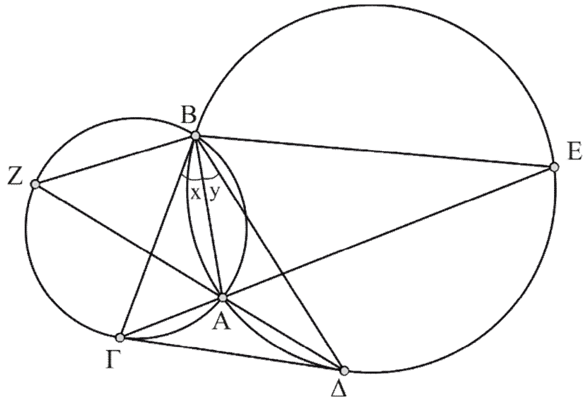
(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABZ}$ και $\overset{\Delta}{A\Gamma Z}$ είναι ίσα διότι:
$\boxed{1°}$ ΑΒ = ΑΓ $\boxed{2°}$ ΒΖ = ΖΓ και $\boxed{3°}$ ΑΖ κοινή.
Άρα $A\widehat{\Gamma}Z = 90°$ και αφού ΓΚ διάμεσος από ορθή γωνία θα είναι $\Gamma K = \frac{AZ}{2}$, οπότε ΚΓ = ΒΖ.

(Α3) Το τετράπλευρο ΒΚΓΖ είναι ρόμβος γιατί έχει τις Πλευρές ίσες με $\frac{1}{2}AZ$, άρα ΒΚ // ΖΓ και αφού $Z\Gamma \perp A\Gamma \Rightarrow BK \perp A\Gamma$.

2ος Τρόπος
Επειδή ΚΑ=ΚΓ και ΒΑ=ΒΓ έχουμε ότι η ΒΚ μεσοκάθετος της ΑΓ .

ΘΕΜΑ 6

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση



(A1) Είναι $\widehat{\Gamma B \Delta} = \hat{x} + \hat{y}$, $\hat{x} = \widehat{A\Gamma\Delta}, \hat{y} = \widehat{A\Delta\Gamma}$ (χορδή εφαπτομένη αντίστοιχη εγγεγραμμένη). Στο $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ είναι $\widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Delta\Gamma} = 180° - \widehat{\Gamma A \Delta}$. Άρα $\widehat{\Gamma B \Delta} = 180° - \widehat{\Gamma A \Delta}$.

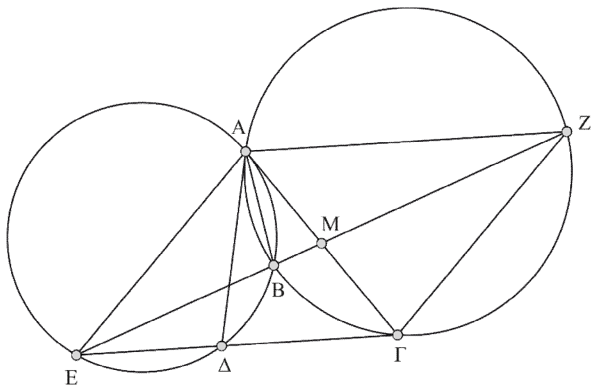
(A2) Έχουμε $\widehat{\Delta A E} = \widehat{\Delta B E}$ (εγγ. στο ίδιο τόξο) και $\widehat{\Delta A E} = \widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Delta\Gamma}$ (εξωτερική), άρα $\widehat{\Delta B E} = \widehat{\Gamma B \Delta}$, οπότε ΒΔ διχοτόμος της $\widehat{\Gamma B E}$.

(A3) Είναι $\widehat{Z B \Gamma} = \widehat{Z A \Gamma}$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, $\widehat{Z A \Gamma} = \widehat{\Delta A E} = \widehat{\Delta B E}$.
Άρα $\widehat{Z B \Gamma} = \widehat{\Delta B E}$, οπότε $\widehat{\Delta B Z} = \widehat{\Gamma B E}$.

ΘΕΜΑ 7

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(A1) Είναι $\widehat{A E B} = \widehat{B A \Gamma}$ (χορδή – εφαπτομένη) $\widehat{B A \Gamma} = \widehat{B Z \Gamma}$ (εγγεγρ. στο ίδιο τόξο). Άρα $\widehat{B E A} = \widehat{\Gamma Z B}$.

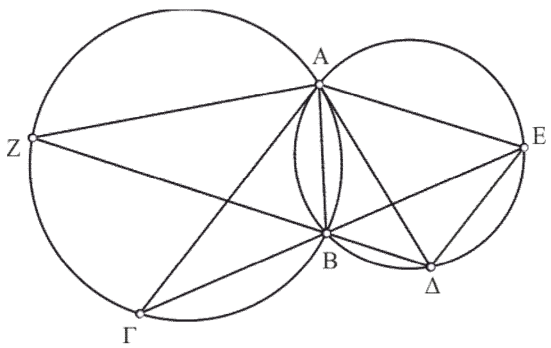


(A2) Όμοια $\widehat{A Z B} = \widehat{B A \Delta}$ (χορδή – εφαπτομένη) και $\widehat{B A \Delta} = \widehat{B E \Delta}$, άρα $\widehat{A Z E} = \widehat{Z E \Gamma}$, οπότε έχουν ΑΖ // ΓΕ και ΑΕ // ΓΖ οπότε ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(A3) Αφού ΑΕΓΖ Παραλληλόγραμμο $\Rightarrow$ το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι το κοινό μέσο των διαγωνίων, άρα Μ μέσο ΑΓ.

ΘΕΜΑ 8

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση



(Α1) Έχουμε ότι $\hat{\Gamma} = \hat{Z}$ εγγ. στο ίδιο τόξο και $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}B$. Άρα $\Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{A}Z = 180° - (\hat{\Gamma} + A\hat{E}B)$.

2ος τρόπος

Είναι $Z\hat{A}\Gamma = Z\hat{B}\Gamma$ (εγγ. στο ίδιο τόξο) και όμοια $\Delta\hat{A}E = \Delta\hat{B}E$. Όμως $Z\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{B}E$ (κατακορυφήν) άρα $Z\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}E$, οπότε

$$Z\hat{A}\Delta = Z\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E + \Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E.$$

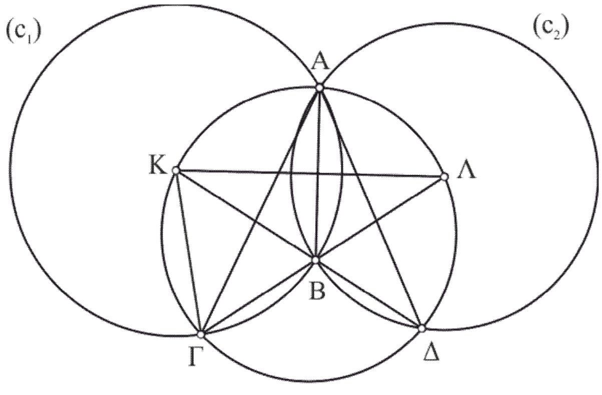
(Α2) Έχουμε $A\hat{B}E = A\hat{\Delta}E$ βαίνουν στο ίδιο τόξο και $A\hat{E}\Delta = A\hat{E}B + B\hat{E}\Delta$. $A\hat{\Gamma}B = B\hat{A}\Delta$ και $A\hat{E}B = B\hat{A}\Gamma$ (χορδή – εφαπτομένη). Από το $\overset{\Delta}{A\Gamma B}$ έχουμε: $A\hat{B}E = B\hat{A}\Gamma + A\hat{\Gamma}B$ (εξωτερική). Ακόμη $B\hat{E}A = B\hat{A}\Gamma$. Άρα:

$A\hat{\Delta}E = A\hat{B}E = A\hat{\Gamma}B + \Gamma\hat{A}B = B\hat{A}\Delta + A\hat{E}B = B\hat{E}\Delta + A\hat{E}B = A\hat{E}\Delta$. Οπότε το $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ ισοσκελές, άρα ΑΔ = ΑΕ.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Gamma E}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΑΕ = ΑΔ $\boxed{2°}$ $A\hat{\Delta}Z = A\hat{E}\Gamma$ και $\boxed{3°}$ $E\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{A}Z$, άρα ΓΕ = ΔΖ.

ΘΕΜΑ 9

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση



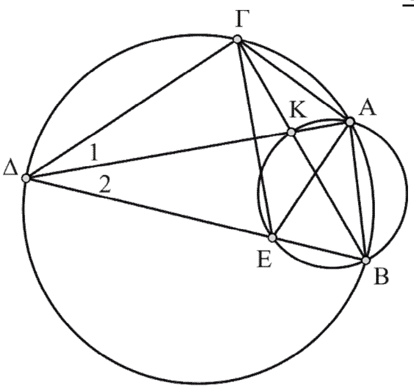
(Α1) Η $A\hat{\Gamma}B$ είναι εγγεγραμμένη στον (c_1), άρα $A\hat{\Gamma}B = \frac{1}{2}A\hat{K}B = A\hat{K}\Lambda$.

(Α2) Στον περιγεγραμμένο (c) του $\overset{\Delta}{AK\Lambda}$ οι γωνίες $A\hat{\Gamma}\Lambda$ και $A\hat{K}\Lambda$ βαίνουν στο ίδιο τόξο, άρα είναι ίσες δηλαδή $A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}\Lambda$, οπότε τα Γ, Β, Λ συνευθειακά. Όμοια τα Δ, Β, Κ.

(Α3) Έχουμε $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}B\hat{K}\Gamma$ εγγεγραμμένη στον (c_1). Στον (c): $\Delta\hat{K}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta$,

άρα: $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}\Gamma\hat{A}\Delta \Rightarrow 2B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}\Delta \Rightarrow B\hat{A}\Gamma = B\hat{A}\Delta$. Άρα ΑΒ διχοτόμος της $\Gamma\hat{A}\Delta$.

ΘΕΜΑ 10



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(Α1) Αφού ΑΒ = ΑΓ $\Rightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A\Gamma}$, άρα ΔΑ διχοτόμος της $B\hat{\Delta}\Gamma$ οπότε $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$.

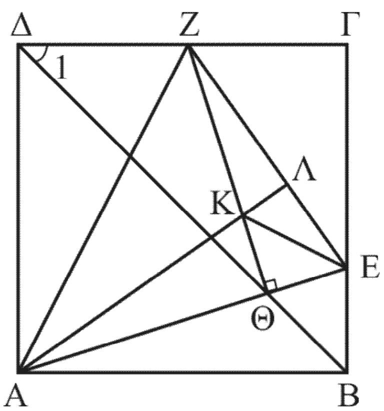
(Α2) Είναι $\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$ εγγεγραμμένες στον (c_1) και $K\hat{A}E = K\hat{B}E$ εγγεγραμμένες στο (c_2), άρα $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta E}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^\circ}$ ΑΔ κοινή $\boxed{2^\circ}$ $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ από (Α1) και

$\boxed{3^\circ}$ $\Gamma\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}E$ από (Α2), οπότε ΔΕ = ΔΓ και συνεπώς το $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma E}$ είναι ισοσκελές, άρα $\Delta A \perp \Gamma E$.

ΘΕΜΑ 11



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(Α1) Αφού $A\hat{\Theta}Z = 90° = A\hat{\Delta}Z \Rightarrow$ ΑΘΖΔ εγγράψιμο.

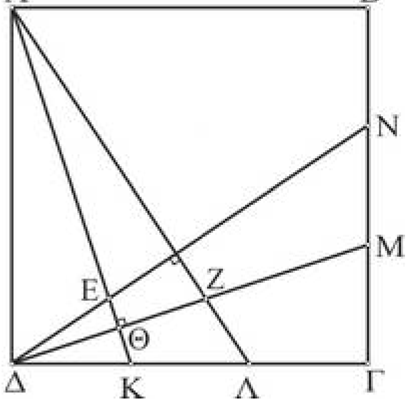
(Α2) Αφού ΑΘΖΔ εγγράψιμο $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = 45° = \Theta\hat{A}Z$ και συνεπώς $A\hat{Z}\Theta = 45°$ διότι $A\hat{\Theta}Z = 90°$. Άρα $\overset{\Delta}{A\Theta Z}$ ορθογώνιο και ισοσκελές $\Rightarrow$ ΑΘ = ΘΖ.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Theta K}$ και $\overset{\Delta}{Z\Theta E}$ είναι ίσα γιατί:

$\boxed{1^o}$ ΑΘ = ΘΖ από το (Α2) $\boxed{2^o}$ ΚΘ = ΘΕ από υπόθεση και είναι ορθογώνια, άρα ΑΚ = ΖΕ.

Αν Λ το σημείο τομής της ΑΚ και της ΖΕ τότε το τετράπλευρο ΑΘΛΖ είναι εγγράψιμο γιατί $\Theta\hat{A}\Lambda = \Theta\hat{Z}\Lambda$ και συνεπώς $A\hat{\Theta}Z = A\hat{\Lambda}Z = 90°$.

ΘΕΜΑ 12



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση

(Α1)Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma M}$ είναι ίσα διότι:

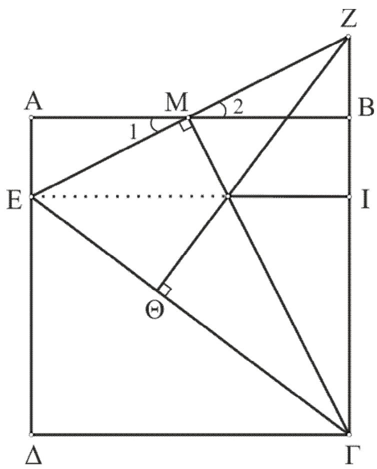
$\boxed{1^o}$ ΑΔ = ΔΓ $\boxed{2^o}$ ΔΚ = ΓΜ

από υπόθεση και είναι ορθογώνια, άρα ΑΚ = ΔΜ. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta\Lambda}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta N}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1^o}$ ΑΔ = ΔΓ $\boxed{2^o}$ ΔΛ = ΓΝ αθροίσματα ίσων τμημάτων και ορθογώνια, άρα ΑΛ = ΔΝ.

(Α2) Από την ισότητα $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma M}$ έχουμε ότι: $\Delta\hat{A}K = \Gamma\hat{\Delta}M$. Αν Θ η τομή των ΑΚ και ΔΜ τότε $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{K} = 90° \Rightarrow \mathrm{A}\widehat{\Delta}\Theta + \Delta\widehat{\mathrm{A}}\Theta = 90°$, άρα το τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$ είναι ορθογώνιο, οπότε $\mathrm{AK} \perp \Delta\mathrm{M}$. Με όμοιο τρόπο έχουμε $\mathrm{A}\Lambda \perp \Delta\mathrm{N}$.

(Α3) Στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{Z}$ τα ΑΕ και ΔΕ είναι ύψη, οπότε το Ε είναι το ορθόκεντρο του $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{Z}$, άρα ΖΕ ύψος, οπότε $\mathrm{ZE} \perp \mathrm{A}\Delta$. Είναι $\Gamma\Delta \perp \mathrm{A}\Delta$, άρα ΕΖ // ΓΔ.

ΘΕΜΑ 13



<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>

(Α1) Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{M}}\mathrm{E}$ και $\mathrm{B}\overset{\Delta}{\mathrm{M}}\mathrm{Z}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1^o}$ ΑΜ = ΜΒ (Μ μέσο ΑΒ) $\boxed{2^o}$ $\widehat{\mathrm{A}} = \widehat{\mathrm{B}} = 90°$ και $\boxed{3^o}$ $\widehat{\mathrm{M}}_1 = \widehat{\mathrm{M}}_2$ κατακορυφή. Άρα ΜΕ = ΜΖ.

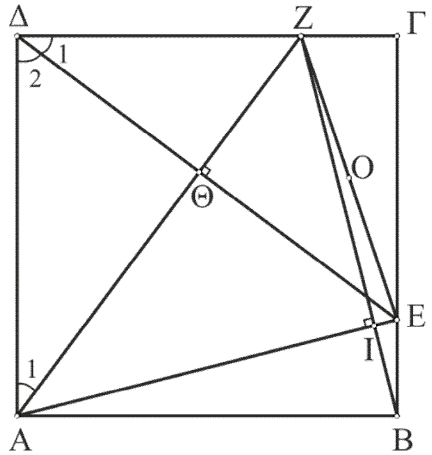
(Α2) Στο $\Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ το ΓΜ είναι διάμεσος και ύψος άρα είναι ισοσκελές.

(Α3) Φέρνουμε $\mathrm{EI} \perp \Gamma\mathrm{Z}$. Τότε ΕΙ = ΑΒ γιατί ΑΒΙΕ ορθογώνιο. Τα τρίγωνα $\mathrm{E}\overset{\Delta}{\mathrm{I}}\mathrm{Z}$ και $\mathrm{E}\overset{\Delta}{\mathrm{Z}}\Theta$ είναι ίσα γιατί έχουν: $\boxed{1^o}$ ΕΖ κοινή $\boxed{2^o}$ $\mathrm{Z}\widehat{\mathrm{E}}\Theta = \mathrm{E}\widehat{\mathrm{Z}}\mathrm{I}$ αφού $\Gamma\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{Z}$ ισοσκελές και ορθογώνια. Άρα ΖΘ = ΕΙ οπότε ΖΘ = ΑΒ.

ΘΕΜΑ 14

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>

(Α1) Τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{Z}$ και $\Gamma\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{E}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1^o}$ ΑΔ = ΔΓ $\boxed{2^o}$ ΔΖ = ΒΕ διαφορά των ίσων τμημάτων ΓΔ = ΒΓ και ΒΕ = ΓΖ και είναι ορθογώνια, άρα ΑΖ = ΔΕ. Όμοια τα τρίγωνα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\mathrm{B}$ και $\mathrm{B}\overset{\Delta}{\Gamma}\mathrm{Z}$ είναι ίσα, άρα ΑΕ = ΒΖ.



(Α2) Από την ισότητα $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{Z} = \Gamma\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{E}$ έχουμε ότι $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\Delta}_1$. Όμως $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 90°$, άρα και $\widehat{\mathrm{A}}_1 + \widehat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε το $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\Theta$ ορθογώνιο, άρα $\mathrm{AZ} \perp \Delta\mathrm{E}$. Ομοια $\mathrm{BZ} \perp \mathrm{AE}$

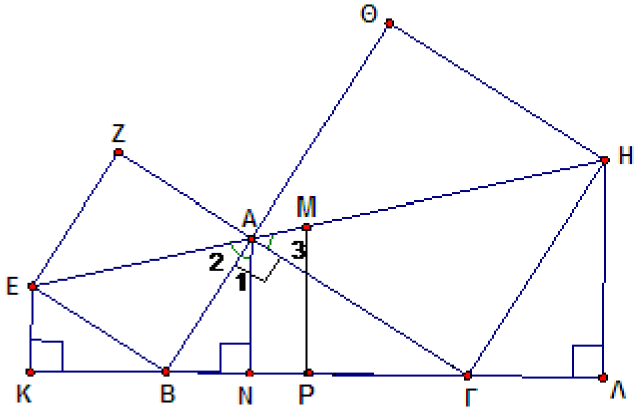
(Α3) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΓΕΖ αν Ο μέσο του ΖΕ έχουμε ότι $\mathrm{O}\Gamma = \frac{1}{2}\mathrm{EZ}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{Z}\overset{\Delta}{\mathrm{E}}\Theta$ έχουμε $\Theta\mathrm{O} = \frac{1}{2}\mathrm{ZE}$ και από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{Z}\overset{\Delta}{\mathrm{I}}\mathrm{E}$ έχουμε $\mathrm{OI} = \frac{1}{2}\mathrm{EZ}$. Άρα ΟΓ = ΟΕ = ΟΙ = ΟΘ = ΟΖ.

Οπότε ο κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα $\frac{1}{2}\mathrm{EZ}$ περνά από τα Γ, Ε, Ι, Θ, Ζ.

2ος τρόπος
Τα ΓΕΘΖ και ΓΕΙΖ είναι εγγράψιμα και επειδή έχουν τρεις κοινές κορυφές , είναι εγγράψιμα στον ίδιο κύκλο . Άρα Γ, Ε, Ι, Θ, Ζ ομοκυκλικά .

ΘΕΜΑ 15

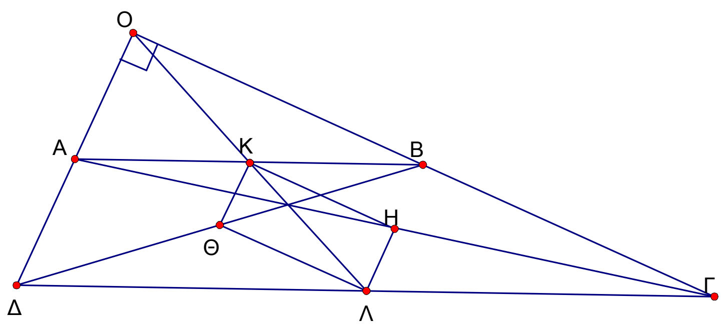
ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση



(Α1) Φέρνουμε ΑΝ⊥ΒΓ. Τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{EKB}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{ABN}}$ είναι ίσα γιατί : $\boxed{1^{o}}$ ΕΒ = ΑΒ επειδή ΑΒΕΖ τετράγωνο
$\boxed{2^{o}}$ $\widehat{\mathrm{B}}_1 = \widehat{\mathrm{A}}_1$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές, και είναι ορθογώνια, άρα ΑΝ = ΚΒ (1).
Ομοίως τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\mathrm{AN\Gamma}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{\Gamma\Lambda H}}$ είναι ίσα, άρα ΑΝ = ΓΛ(2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΚΒ = ΓΛ.
(Α2) ΕΚ + ΗΛ = ΝΒ + ΝΓ = ΒΓ , από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, είναι ΕΚ = ΝΒ και ΗΛ = ΓΝ.
(Α3) $\widehat{\mathrm{A}}_2 = \widehat{\mathrm{A}}_3 = 45°$, γιατί οι διαγώνιοι των τετραγώνων ΑΒΕΖ και ΑΓΗΘ διχοτομούν τις γωνίες τους. Οπότε $\mathrm{E}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = 45° + 90° + 45° = 180°$.
(Α4) Το τετράπλευρο ΕΚΛΗ είναι τραπέζιο γιατί $\mathrm{EK} \perp \mathrm{B\Gamma}$ και $\mathrm{H\Lambda} \perp \mathrm{B\Gamma}$, οπότε ΚΕ//ΗΛ και ΕΗ, ΚΛ τέμνονται.
Φέρνουμε τη διάμεσο ΜΡ του τραπεζίου. Επειδή ΜΡ//ΚΕ//ΗΛ, θα είναι ΜΡ⊥ΒΓ (3).
Το Ν είναι το μέσο του ΚΛ άρα ΚΝ = ΝΛ και ΚΒ=ΓΛ από (Α1) οπότε ΒΝ = ΝΓ ως διαφορές ίσων τμημάτων, δηλαδή ΜΡ διάμεσος του τριγώνου $\overset{\triangle}{\mathrm{BM\Gamma}}$ και ύψος από (3) άρα το τρίγωνο είναι ισοσκελές. Επίσης $\mathrm{MP} = \frac{\mathrm{EK}+\mathrm{H\Lambda}}{2} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$ από (Α2), δηλαδή έχει την ιδιότητα διαμέσου από ορθή γωνία άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\mathrm{BM\Gamma}}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

ΘΕΜΑ 16

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση



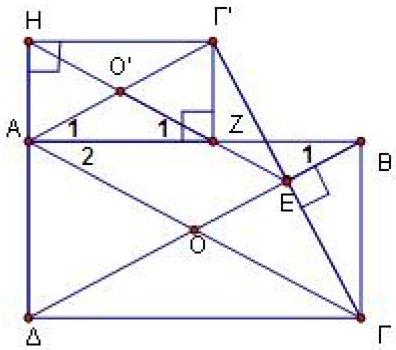
(Α1) Φέρνουμε την ΟΚ. Είναι $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B} = 90°$ και ΟΚ διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, οπότε

ΟΚ = ΑΚ = ΚΒ άρα $\mathrm{A\widehat{O}K = O\widehat{A}K}$.
Φέρνουμε την ΟΛ. Ομοίως ΟΛ = ΔΛ = ΛΓ άρα $\Delta\widehat{\mathrm{O}}\Lambda = \mathrm{O}\widehat{\Delta}\Lambda$
Όμως $\mathrm{O\widehat{A}K} = \mathrm{O}\widehat{\Delta}\Lambda$ ως εντός , εκτός και επί τ'αυτά (ΑΒ//ΔΓ, τέμνουσα ΟΔ).
Οπότε και $\mathrm{A\widehat{O}K} = \Delta\widehat{\mathrm{O}}\Lambda$ άρα το Κ ανήκει στην ΟΛ, δηλαδή τα Ο, Κ, Λ είναι συνευθειακά σημεία.

(Α2) Είναι $\mathrm{K}\Lambda = \mathrm{O}\Lambda - \mathrm{OK} = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{\mathrm{AB}}{2} = \frac{\Gamma\Delta - \mathrm{AB}}{2}$ αφού ΟΚ,ΟΛ διάμεσοι που αντιστοιχούν στις υποτείνουσες των τριγώνων $\mathrm{A\overset{\Delta}{O}B}$ και $\Delta\overset{\Delta}{\mathrm{O}}\Gamma$ αντίστοιχα.

(Α3) Στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\mathrm{B}$ το ΚΘ συνδέει τα μέσα των ΑΒ και ΔΒ οπότε ΚΘ// = $\frac{\mathrm{A}\Delta}{2}$. Ομοίως στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Delta}\Gamma$ θα είναι $\Lambda\mathrm{H} = // \frac{\mathrm{A}\Delta}{2}$, άρα ΚΘ// = ΛΗ, οπότε το τετράπλευρο ΚΗΛΘ είναι παραλληλόγραμμο. Επίσης το ΗΘ συνδέει τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου άρα $\mathrm{H}\Theta = // \frac{\Gamma\Delta - \mathrm{AB}}{2} = \mathrm{K}\Lambda$ από (Α2). Δηλαδή το παραλληλόγραμμο ΚΗΛΘ έχει ίσες διαγώνιες οπότε είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 17



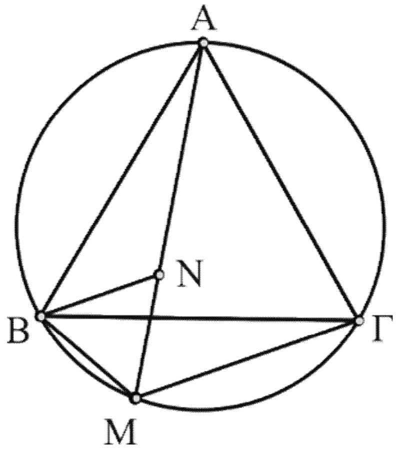
<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - Λύση</u>

(Α1) Έστω Ο το κέντρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, τότε το Ο είναι το μέσο της διαγωνίου ΑΓ και Ε το μέσο του ΓΓ΄, λόγω συμμετρίας. Οπότε στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\Gamma'$ το ΟΕ συνδέει μέσα άρα $\mathrm{OE} // \mathrm{A}\Gamma'$, δηλαδή ΒΔ//ΑΓ΄.

(Α2) Το ΑΖΓ΄Η είναι ορθογώνιο (έχει 3 ορθές) οπότε επειδή η διαγώνιοί του είναι ίσες θα είναι $\widehat{\mathrm{Z}}_1 = \widehat{\mathrm{A}}_1$ (1).Όμως ΒΔ//ΑΓ΄ οπότε $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{B}}_1$ (2)(ως εντός εναλλάξ, τέμνουσα ΑΒ). Επίσης $\widehat{\mathrm{A}}_2 = \widehat{\mathrm{B}}_1$ (3)(επειδή το ΑΒΓΔ έχει ίσες διαγώνιες). Από (1), (2), (3) προκύπτει ότι $\widehat{\mathrm{Z}}_1 = \widehat{\mathrm{A}}_2$, οπότε ΗΖ//ΖΓ γιατί σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

(Α3) Στο ΑΖΓ΄Η οι διαγώνιοι ΗΖ και ΑΓ΄ τέμνονται στο κέντρο του Ο΄, άρα το Ο΄ είναι το μέσο της ΑΓ΄. Έτσι στο τρίγωνο $\mathrm{A}\overset{\Delta}{\Gamma}\Gamma'$, επειδή ΑΓ΄// ΟΕ προκύπτει ότι η Ο΄Ζ διέρχεται από το μέσο Ε της ΓΓ΄.

ΘΕΜΑ 18



<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ</u>

(Α1) Είναι $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = \text{Α}\widehat{\text{Μ}}\text{Β} = 60°$ εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

Αφού ΒΜ = ΜΝ θα έχουμε ότι το $\overset{\Delta}{\text{ΒΝΜ}}$ είναι ισόπλευρο.

(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΝ}}$ και $\overset{\Delta}{\text{ΒΓΜ}}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1°}$ ΑΒ = ΒΓ (ισόπλευρο)

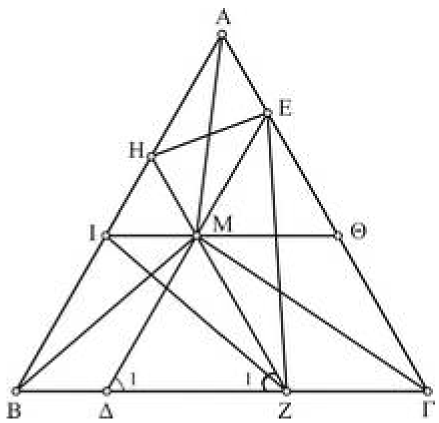
$\boxed{2°}$ ΒΝ = ΒΜ (από το Α1) και

$\boxed{3°}$ $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ν} = \Gamma\hat{\text{Β}}\text{Μ}$ διότι $\text{Α}\hat{\text{Β}}\text{Ν} + \text{Ν}\hat{\text{Β}}\Gamma = 60° = \text{Ν}\hat{\text{Β}}\Gamma + \Gamma\hat{\text{Β}}\text{Μ}$.

(Α3) Αφού $\overset{\Delta}{\text{ΑΒΝ}} = \overset{\Delta}{\text{ΒΓΜ}}$ έχουμε ΑΝ = ΜΓ και συνεπώς:
ΑΜ = ΑΝ + ΝΜ = ΜΓ + ΜΒ.

ΘΕΜΑ 19

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ</u>



(Α1)Αφού ΜΔ // ΑΒ $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\text{Β}} = 60°$ και αφού

ΜΖ // ΑΓ $\Rightarrow \hat{\text{Ζ}}_1 = \hat{\Gamma} = 60°$. Άρα $\overset{\Delta}{\text{ΜΔΖ}}$ ισόπλευρο

Όμοια τα άλλα.

(Α2) Από την κατασκευή έχουμε ότι τα ΙΜΔΒ, ΜΘΓΖ είναι παραλληλόγραμμα, άρα ΜΙ = ΒΔ = ΗΜ, ΜΘ = ΓΖ = ΜΕ, άρα: ΜΔ + ΜΕ + ΜΗ = ΔΖ + ΓΖ + ΒΔ = ΒΓ.

ΘΕΜΑ 20

<u>ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ</u>

(Α1)Το ΑΜΒΓ εγγεγραμμένο άρα $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\Delta = \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60°$

οπότε από το ορθογώνιο $\overset{\Delta}{\Delta\text{ΜΕ}}$ έχουμε $\text{ΜΕ} = \frac{1}{2}\text{Μ}\Delta$.

(Α2) Έχουμε $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\Gamma = \text{Α}\hat{\text{Β}}\Gamma = 60°$ βαίνουν στο ίδιο τόξο

οπότε $\text{Α}\widehat{\text{Μ}}\Gamma = \text{Α}\widehat{\text{Μ}}\Delta = 60°$ άρα στο $\overset{\Delta}{\text{Μ}\Delta\Gamma}$ η ΜΕ είναι ύψος και διχοτόμος οπότε είναι ισοσκελές, άρα ΜΔ = ΜΓ.

ΘΕΜΑ 21

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Είναι ΓΚ = ΚΔ, ΜΚ = ΚΡ, άρα το ΓΜΔΡ παραλληλόγραμμο, οπότε ΡΔ = ΓΜ. Όμως ΓΜ = ΜΒ οπότε ΜΒ = ΡΔ.

(Α2) Είναι $\hat{\Gamma}_1 = \Gamma\hat{\Delta}P$ εντός εναλλάξ των ΓΜ // ΡΔ και $\hat{\Gamma}_1 = M\hat{B}x$ διότι ΑΒΜΓ εγγεγραμμένο στον (c_1), άρα $\Gamma\hat{\Delta}P = M\hat{B}x$. Ακόμη $A\hat{\Delta}N = x\hat{B}N$ διότι ΑΔΝΒ εγγεγραμμένο στον (c_2), άρα $P\hat{\Delta}N = M\hat{B}N$.

Άρα τα τρίγωνα $M\overset{\Delta}{B}N$ και $P\overset{\Delta}{\Delta}N$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1^\circ}$ ΜΒ = ΡΔ

$\boxed{2^\circ}$ ΔΝ = ΝΒ $\boxed{3^\circ}$ $M\hat{B}N = P\hat{\Delta}N$, οπότε ΝΡ = ΝΜ.

(Α3) Το $M\overset{\Delta}{N}P$ είναι ισοσκελές και το Κ μέσο της ΡΜ οπότε $NK \perp PM$.

ΘΕΜΑ 22

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) $K\hat{A}M = K\hat{A}N - M\hat{A}N = 90^\circ - M\hat{A}N$ και $\Lambda\hat{A}N = \Lambda\hat{A}M - N\hat{A}M = 90^\circ - N\hat{A}M$. Άρα $K\hat{A}M = \Lambda\hat{A}N = x$.

(Α2) $K\hat{A}\Lambda = x + 90^\circ$ και $K\hat{A}\Lambda = K\hat{B}\Lambda$. Ακόμη $M\hat{A}N = K\hat{A}N - x = 90^\circ - x$, οπότε $M\hat{A}N + M\hat{B}N = 90^\circ - x + 90^\circ + x = 180^\circ$.

(Α3) Από (Α2)$\Rightarrow$ ΑΜΒΝ εγγράψιμο, οπότε $B\hat{M}N = B\hat{A}N$ (εγγεγραμμενες στο ίδιο τόξο) . Επίσης $B\hat{A}N = A\hat{K}\Lambda = \Lambda\hat{K}B$ (η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης επίκεντρης) οπότε $B\hat{M}N = B\hat{K}\Lambda$. Άρα ΜΝ // ΚΛ και αφού $AB \perp K\Lambda \Rightarrow AB \perp MN$.

ΘΕΜΑ23

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Είναι $A\hat{\Gamma}B = \hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$ και $A\hat{\Delta}B = \hat{\Delta}_1 = \hat{A}_2$ (χορδή – εφαπτομένη). Στο $A\overset{\Delta}{B}\Gamma$ $\Gamma\hat{B}x = \hat{\Gamma}_1 + \hat{A}_2$ και όμοια στο $A\overset{\Delta}{B}\Delta$ $\Delta\hat{B}x = \hat{\Delta}_1 + \hat{A}_1$. Άρα $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{\Gamma}_1 + \hat{\Delta}_1 = 2\Gamma\hat{A}\Delta$.

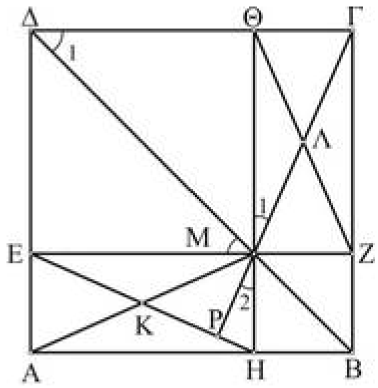
(Α2) Αφού Ο περίκεντρο έχουμε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = 2\Gamma\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta$. Άρα το ΒΟΓΔ είναι εγγράψιμο.

(Α3) $O\hat{B}A = \Gamma\hat{B}A - O\hat{B}\Gamma = \Gamma\hat{B}A - O\hat{\Delta}\Gamma$. Έχουμε $O\overset{\Delta}{\Gamma}\Delta$ ισοσκελές, άρα

$\Gamma\hat{\Delta}O = \dfrac{180^\circ - \Gamma\hat{O}\Delta}{2} \Rightarrow \Gamma\hat{\Delta}O = 90^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$. Έχουμε $\Gamma\hat{B}A = \Delta\hat{B}A$ και

$\Gamma\hat{B}A + \Delta\hat{B}A + \Gamma\hat{B}\Delta = 360^\circ \Rightarrow 2\Gamma\hat{B}A = 360^\circ - 2\Gamma\hat{A}\Delta \Rightarrow \Gamma\hat{B}A = 180^\circ - \Gamma\hat{A}\Delta$, οπότε $O\widehat{B}A = 180° - \Gamma\widehat{A}\Delta - 90° + \Gamma\widehat{A}\Delta = 90°$.

ΘΕΜΑ 24



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Τα τρίγωνα $E\overset{\Delta}{M}H$ και $Z\overset{\Delta}{M}\Theta$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^o}$ ΜΕ = ΜΘ αφού του ΔΕΜΘ είναι τετράγωνο διότι $\widehat{\Delta}_1 = \Delta\widehat{M}E = 45^o$, άρα ΕΜ = ΔΕ = ΜΘ = ΔΘ.

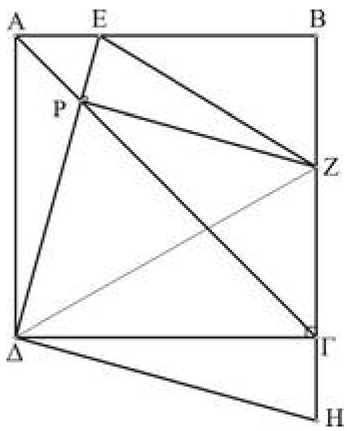
$\boxed{2^o}$ ΜΗ = ΜΖ διότι ΜΖΒΗ τετράγωνο, και είναι ορθογώνια, άρα ΕΗ = ΖΘ.

(Α2) Η ευθεία ΓΜ τέμνει την ΕΗ στο Ρ. Από το (Α1) έχουμε ότι $M\widehat{H}E = M\widehat{Z}\Theta = \Theta\widehat{\Gamma}M$ άρα $\Theta\widehat{\Gamma}M + \widehat{M}_1 = 90° \Rightarrow M\widehat{H}E + \widehat{M}_2 = 90°$ αφού $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$ κατακορυφήν.

(Α3) Αν το Μ δεν είναι το κέντρο του τετραγώνου ΑΒΓΔ τότε στο τρίγωνο $A\overset{\Delta}{M}\Gamma$ η ΚΛ συνδέει μέσα των πλευρών ΑΜ και ΜΓ οπότε $K\Lambda = \dfrac{A\Gamma}{2}$.

Όταν το Μ είναι το κέντρο του τετραγώνου τότε ΑΚ = ΚΜ = ΜΛ = ΛΓ $\Rightarrow K\Lambda = \dfrac{1}{2}A\Gamma$. Δηλαδή το ΚΛ είναι σταθερό για κάθε σημείο Μ που ανήκει στη διαγώνιο ΒΔ.

ΘΕΜΑ 25



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Είναι $A\overset{\Delta}{\Delta}E = \Delta\overset{\Delta}{\Gamma}H$ διότι:

$\boxed{1^o}$ ΑΔ = ΔΓ πλευρές τετραγώνου

$\boxed{2^o}$ ΑΕ = ΓΗ υπόθεση και είναι ορθογώνια, άρα $A\widehat{\Delta}E = \Gamma\widehat{\Delta}H$.

(Α2) $E\widehat{\Delta}H = E\widehat{\Delta}\Gamma + \Gamma\widehat{\Delta}H = E\widehat{\Delta}\Gamma + A\widehat{\Delta}E = 90°$.

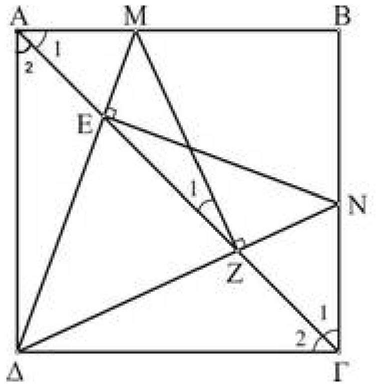
(Α3) Το τετράπλευρο ΔΓΖΡ είναι εγγράψιμο γιατί $\Delta\widehat{P}Z = Z\widehat{\Gamma}\Delta = 90°$, άρα $P\widehat{\Gamma}Z = P\widehat{\Delta}Z = 45°$,οπότε $Z\widehat{\Delta}H = 90° - 45° = 45°$, άρα ΔΖ διχοτόμος της $E\widehat{\Delta}H$.

(Α4) Τα $\Delta\overset{\Delta}{E}Z$ και ΔZH έχουν:

$\boxed{1^o}$ ΔΕ = ΔΗ από το (Α1) $\boxed{2^o}$ ΔΖ κοινή και $\boxed{3^o}$ $E\widehat{\Delta}Z = Z\widehat{\Delta}H = 45°$

άρα ίσα οπότε ΕΖ = ΖΗ = ΖΓ + ΓΗ = ΖΓ + ΑΕ

ΘΕΜΑ 26



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Αφού $\mathrm{E}\widehat{\Delta}\mathrm{N} = 45° = \widehat{\Gamma}_1 \Rightarrow$ ΓΔΕΝ είναι εγγράψιμο.

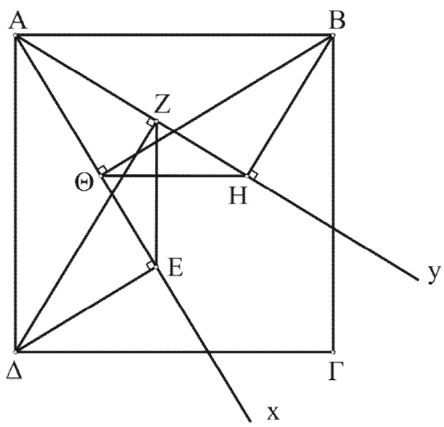
(Α2) Από το εγγράψιμο αυτό προκύπτει ότι:

$\mathrm{E}\widehat{\mathrm{N}}\Delta = \widehat{\Gamma}_2 = 45°$, άρα το $\overset{\Delta}{\mathrm{E}\Delta\mathrm{N}}$ ισοσκελές με ίσες γωνίες $45° \Rightarrow \Delta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{N} = 90°$. Όμοια το ΑΔΖΜ εγγράψιμο διότι $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \mathrm{M}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = 45°$, οπότε $\Delta\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = \widehat{\mathrm{A}}_2 = 45°$.

(Α3) $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{M}}\mathrm{Z} = 180° - 45° - \widehat{\mathrm{Z}}_1 = 135° - \widehat{\mathrm{Z}}_1$ και στο $\overset{\Delta}{\mathrm{EMZ}}$: $\mathrm{M}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = 180° - 45° - \widehat{\mathrm{Z}}_1 = 135° - \widehat{\mathrm{Z}}_1$. Άρα ίσες.

ΘΕΜΑ 27

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Αφού $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{Z}}\Delta = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\Delta = 90° \Rightarrow$ Το ΑΖΕΔ εγγράψιμο.

(Α2) Από το εγγράψιμο του (Α1) έχουμε ότι:

$\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z}$. Όμως $\mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} + \Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = 90°$ και $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H} + \mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\Delta = 90°$ και αφού $\Delta\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{Z} = \mathrm{H}\widehat{\mathrm{A}}\Delta \Rightarrow \mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$, άρα $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$.

2ος τρόπος

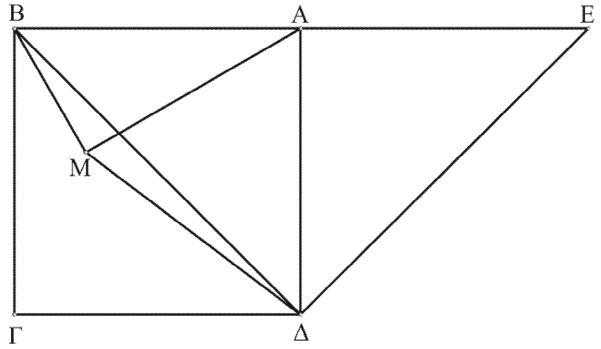
Από το εγγράψιμο του (Α1) έχουμε ότι: $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z}$. Όμως $\mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = \mathrm{A}\widehat{\Delta}\mathrm{Z}$ ως οξείες με πλευρές κάθετες. Άρα $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H}$.

(Α3) Το τετράπλευρο ΑΒΗΘ είναι εγγράψιμο γιατί $\mathrm{A}\widehat{\Theta}\mathrm{B} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{H}}\mathrm{B} = 90°$. Οπότε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{H} = \mathrm{H}\widehat{\Theta}\mathrm{E}$. Έχουμε $\mathrm{H}\widehat{\Theta}\mathrm{E} + \Theta\widehat{\mathrm{E}}\mathrm{Z} = \mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\mathrm{H} + \mathrm{B}\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{H} = 90°$, οπότε $\mathrm{ZE} \perp \Theta\mathrm{H}$.

ΘΕΜΑ 28

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta E}}$ ορθογώνιο και ισοσκελές, άρα $\widehat{\mathrm{E}} = 45°$. Στο $\overset{\triangle}{\mathrm{BM\Delta}}$ είναι $\mathrm{B\widehat{M}\Delta} = 180° - 30° - 15° = 135°$, άρα $\mathrm{B\widehat{M}\Delta} + \widehat{\mathrm{E}} = 180°$, οπότε το ΒΕΑΜ εγγράψιμο.

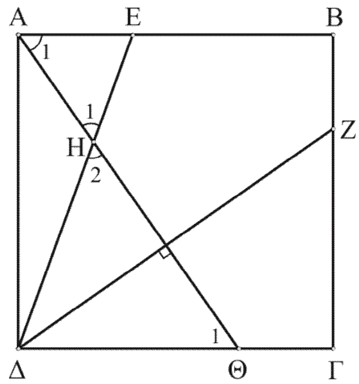


(Α2) Αφού ΑΒ = ΑΔ = ΑΕ το Α είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου (c) στο τετράπλευρο ΒΜΔΕ.

(Α3) Η γωνία $\mathrm{M\widehat{B}\Delta} = 30°$ είναι εγγεγραμμένη στον (c) και έχει αντίστοιχη επίκεντρη την $\mathrm{\Delta\widehat{A}M}$, άρα $\mathrm{\Delta\widehat{A}M} = 2 \cdot \mathrm{M\widehat{B}\Delta} = 60°$. Το $\overset{\triangle}{\mathrm{AM\Delta}}$ είναι ισοσκελές και έχει μία γωνία $60°$, άρα θα είναι ισόπλευρο οπότε ΜΒ = ΑΒ.

ΘΕΜΑ 29

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Το $\overset{\triangle}{\mathrm{AEH}}$ είναι ισοσκελές αφού ΕΑ = ΕΗ, άρα $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\mathrm{H}}_1$. Ακόμη $\widehat{\mathrm{A}}_1 = \widehat{\Theta}_1$ εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται από ΑΘ και $\widehat{\mathrm{H}}_1 = \widehat{\mathrm{H}}_2$ κατακορυφήν, άρα $\widehat{\Theta}_1 = \widehat{\mathrm{H}}_2$, οπότε ΔΗ = ΔΘ.

(Α2) Στο ισοσκελές $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta H\Theta}}$, ΔΖ διχοτόμος, άρα $\mathrm{\Delta Z} \perp \mathrm{A\Theta}$.

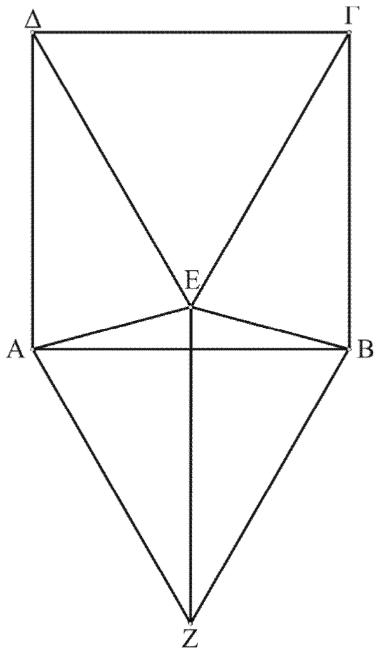
(Α3) Τα $\overset{\triangle}{\mathrm{A\Delta\Theta}}$ και $\overset{\triangle}{\mathrm{\Delta\Gamma Z}}$ είναι ίσα γιατί:

$\boxed{1°}$ ΑΔ = ΔΓ πλευρές τετραγώνου

$\boxed{2°}$ $\mathrm{\Gamma\widehat{\Delta}Z} = \mathrm{\Delta\widehat{A}\Theta}$ διότι είναι συμπληρωματικές της $\widehat{\Theta}_1$ και $\boxed{3°}$ $\mathrm{A\widehat{\Delta}\Theta} = \mathrm{\Delta\widehat{\Gamma}Z} = 90°$.

Άρα ΓΖ = ΔΗ. Οπότε ΔΕ = ΔΗ + ΕΗ = ΓΖ + ΑΕ.

ΘΕΜΑ 30



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{B\Gamma E}}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1^\circ}$ ΑΕ = ΕΒ $\boxed{2^\circ}$ ΑΔ = ΒΓ τετράγωνο και $\boxed{3^\circ}$ $\mathrm{\Delta\widehat{A}E} = \mathrm{\Gamma\widehat{B}E} = 75^\circ$, άρα ΔΕ = ΕΓ.

(Α2) Αφού ΕΑ = ΕΒ και ΖΑ = ΖΒ $\Rightarrow$ ΕΖ μεσοκάθετος του ΑΒ, άρα ΕΖ διχοτόμος της $\mathrm{A\widehat{E}B}$. Άρα

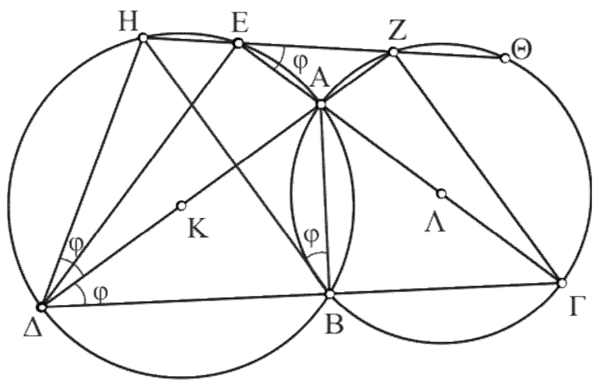
$$\mathrm{A\widehat{E}Z} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$$. Επίσης

$\mathrm{E\widehat{A}Z} = 60^0 + 15^0 = 75^\circ$, άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{ZAE}}$ ισοσκελές $\Rightarrow$ ΖΕ = ΖΑ = ΖΒ.

(Α3) Το ΑΔΕΖ είναι ρόμβος διότι ΑΔ = // ΕΖ οπότε είναι παραλληλόγραμμο και αφού ΑΖ = ΑΔ θα είναι ρόμβος οπότε ΔΕ = ΑΔ = ΔΓ. Όμοια εργαζόμαστε στον ρόμβο ΒΓΕΖ. Οπότε ΓΕ=ΒΓ=ΔΓ. ‘Αρα $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta E\Gamma}}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 31

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) ΑΔ διάμετρος, άρα $\mathrm{A\widehat{B}\Delta} = 90^\circ$ και ΑΓ διάμετρος, άρα $\mathrm{A\widehat{B}\Gamma} = 90^\circ$, οπότε $\mathrm{A\widehat{B}\Delta} + \mathrm{A\widehat{B}E} = 180^\circ$, οπότε Δ, Β, Γ συνευθειακά.

(Α2) ΑΔ διάμετρος $\Rightarrow \mathrm{\Delta\widehat{E}\Gamma} = 90^\circ$ και ΑΓ διάμετρος άρα $\mathrm{A\widehat{Z}\Gamma} = 90^\circ$. Οπότε το ΓΔΕΖ εγγράψιμο.

(Α3) ΓΔΕΖ εγγράψιμο

$\mathrm{\Gamma\widehat{E}Z} = \varphi = \mathrm{Z\widehat{\Delta}\Gamma}$. Το ΔΗΕΑ εγγεγραμμένο άρα $\mathrm{\Gamma\widehat{E}Z} = \mathrm{H\widehat{\Delta}A} = \varphi$.

Έχουμε $\mathrm{H\widehat{\Delta}A} = \mathrm{H\widehat{B}A}$ γιατί είναι εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο.

Αφού $\mathrm{A\widehat{B}H} + \mathrm{H\widehat{B}\Delta} = 90^\circ \Rightarrow \mathrm{H\widehat{B}\Delta} + \varphi = 90^\circ$,άρα $\mathrm{BH} \perp \mathrm{A\Delta}$. Όμοια $\mathrm{B\Theta} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

2ος τρόπος

Αφού ΓΔΕΖ εγγράψιμο, $\mathrm{\Gamma\widehat{E}Z} = \varphi = \mathrm{Z\widehat{\Delta}\Gamma}$. Το ΔΗΕΑ εγγεγραμμένο άρα

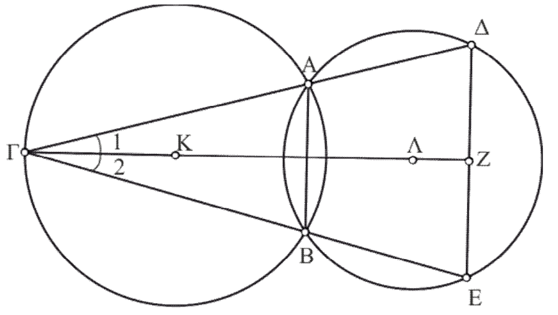
$\mathrm{\Gamma\widehat{E}Z} = \mathrm{H\widehat{\Delta}A} = \varphi$.

Άρα $\mathrm{A\widehat{\Delta}B} = \mathrm{H\widehat{\Delta}A}$. Τότε_ $\overset{\Delta}{\mathrm{KH\Delta}} = \overset{\Delta}{\mathrm{KB\Delta}}$ οπότε ΔΒ=ΔΗ και αφού ΚΗ=ΚΒ η ΔΚ μεσοκάθετος

του ΒΗ . Όμοια $\mathrm{B\Theta} \perp \mathrm{A\Gamma}$.

ΘΕΜΑ 32

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

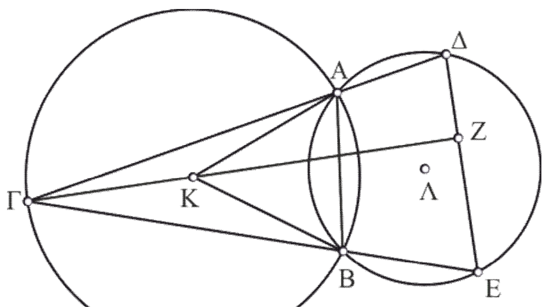


(Α1) Η ΓΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΒ, άρα $\overset{\Delta}{\Gamma A B}$ ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$ και $AB \perp \Gamma K$.
Έστω Ζ η τομή της ΓΚ με τη ΔΕ.
Είναι $\hat{\Delta} = A\hat{B}\Gamma$ και $\hat{E} = B\hat{A}\Gamma$ γιατί ΑΒΕΔ εγγεγραμμένο, άρα $B\hat{A}\Gamma = \hat{\Delta}$ οπότε ΑΒ // ΔΕ.

(Α2) Το τετράπλευρο ΑΔΕΒ είναι τραπέζιο. Επειδή είναι εγγεγραμμένο είναι ισοσκελές. Άρα ΑΔ = ΒΕ, οπότε και τα τόξα ΑΔ και ΒΕ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 33

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Από το εγγεγραμμένο ΑΒΕΔ έχουμε ότι $\Delta\hat{E}B = B\hat{A}\Gamma$ και $B\hat{A}\Gamma = \frac{1}{2}B\hat{K}\Gamma$ γιατί είναι εγγεγραμμένη στον (c_1) και η $B\hat{K}\Gamma$ είναι η αντίστοιχη επίκεντρη.

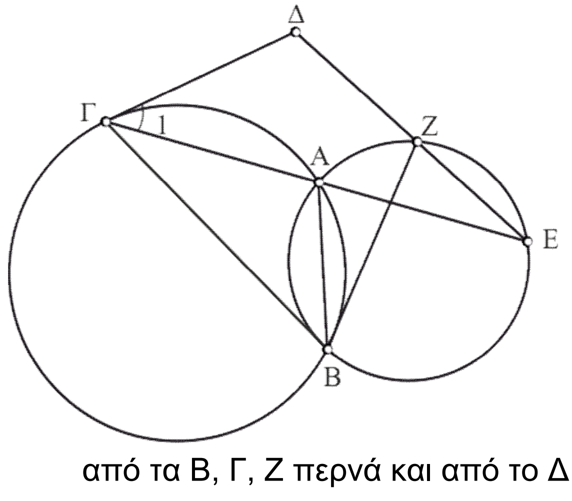
(Α2) Αν Ζ η τομή της ΓΚ και της ΔΕ θα αποδείξουμε ότι $Z\hat{E}\Gamma + Z\hat{\Gamma}E = 90°$.

Ισχύει $K\hat{\Gamma}B = K\hat{B}\Gamma$ γιατί $\overset{\Delta}{KB\Gamma}$ ισοσκελές. Στο $\overset{\Delta}{BK\Gamma}$ έχουμε:

$$2B\hat{\Gamma}K + \Gamma\hat{K}B = 180° \Rightarrow B\hat{\Gamma}K + \frac{1}{2}\Gamma\hat{K}B = 90° \Rightarrow \Gamma Z \perp \Delta E.$$

ΘΕΜΑ 34

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

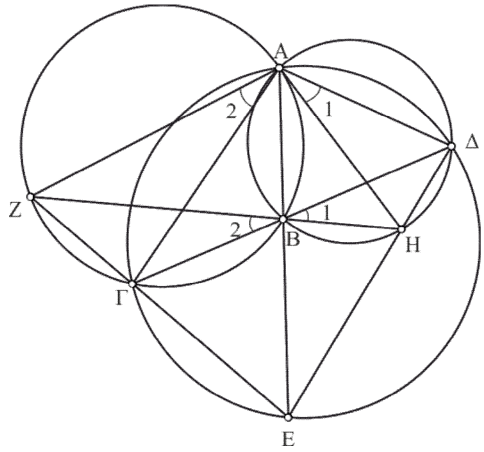


(Α1) Είναι $A\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma}_1$ χορδή – εφαπτομένη και $A\hat{B}Z = A\hat{E}Z$ βαίνουν στο ίδιο τόξο.
Άρα $Z\hat{B}\Gamma = \Delta\hat{\Gamma}E + \Delta\hat{E}\Gamma$.

(Α2) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta E}$ έχουμε:
$\Delta\hat{\Gamma}E + \hat{\Delta} + \Gamma\hat{E}\Delta = 180°$, άρα $\hat{\Delta} + \Gamma\hat{B}Z = 180°$
οπότε το ΒΓΔΖ είναι εγγράψιμο, άρα ο κύκλος που περνά από τα Β, Γ, Ζ περνά και από το Δ.

ΘΕΜΑ 35

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



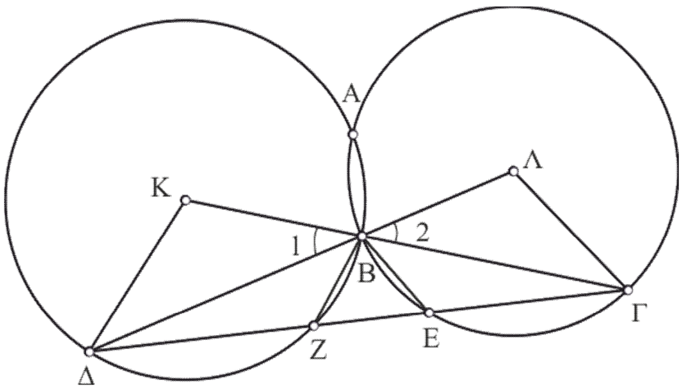
(Α1) Έχουμε $\Gamma\widehat{A}E = \Gamma\widehat{\Delta}E = B\widehat{A}H$, άρα $\Gamma\widehat{A}B = B\widehat{A}H$. Ακόμη $E\widehat{\Gamma}\Delta = E\widehat{A}\Delta$ εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο στον (c_3) και οι γωνίες ΖΑΒ και ΕΓΔ είναι ίσες γιατί ΑΒΓΖ εγγεγραμμένο, άρα $Z\widehat{A}B = B\widehat{A}\Delta$ και αφού $\Gamma\widehat{A}B = B\widehat{A}H \Rightarrow \Gamma\widehat{A}Z = H\widehat{A}\Delta$.

(Α2) Είναι $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ και $\widehat{B}_2 = \widehat{A}_2$, όμως από (Α1) $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, άρα $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2$, οπότε Ζ, Β Η συνευθειακά.

(Α3) Έχουμε $Z\widehat{H}E = B\widehat{A}\Delta$ γιατί ΑΒΗΔ εγγεγραμμένο και $E\widehat{A}Z = B\widehat{A}\Delta$ από (Α1), άρα $Z\widehat{A}E = Z\widehat{H}E$ οπότε ΑΖΕΔ εγγράψιμο.

ΘΕΜΑ 36

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Τα τρίγωνα $B\overset{\Delta}{K}\Delta$ και $B\overset{\Delta}{\Lambda}\Gamma$ είναι ισοσκελή και έχουν $\widehat{B}_1 = \widehat{B}_2 = x$, οπότε $B\widehat{K}\Delta = 180° - 2x = B\widehat{\Lambda}\Gamma$.

(Α2) Αφού $\Delta\widehat{K}\Gamma = \Delta\widehat{\Lambda}\Gamma$ έχουμε ΓΔΚΛ εγγράψιμο

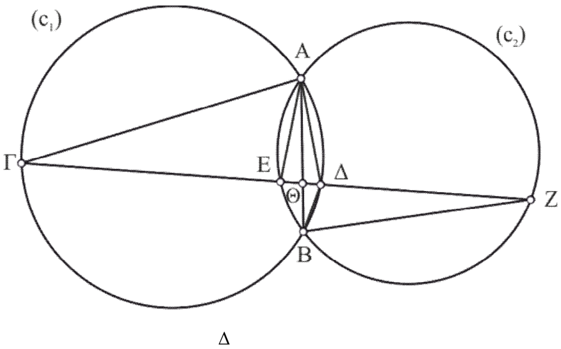
(Α3) Είναι

$$B\widehat{Z}\Delta = \frac{1}{2}\left(\widehat{BA\Delta}\right) = \frac{1}{2}(360° - \widehat{K}) =$$

$= 180° - 90° + x = 90° + x$ και $B\widehat{E}\Gamma = 90° + x$. Οπότε $B\widehat{Z}E = B\widehat{E}\Gamma$, άρα ΒΖ = ΒΕ.

ΘΕΜΑ 37

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Είναι $E\widehat{A}B = E\widehat{Z}H$ εγγεγραμμένες στον (c_2) στο ίδιο τόξο $\widehat{EB}$.

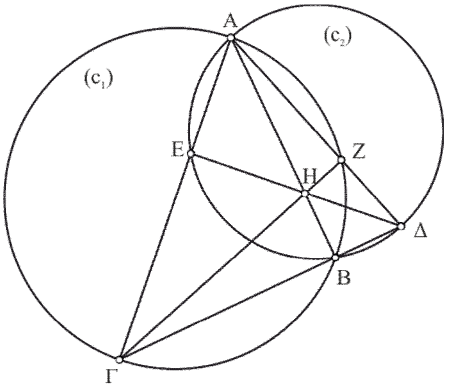
(Α2) Είναι $\Gamma\widehat{A}B = \Gamma\widehat{\Delta}B$ εγγεγραμμένες στον (c_1) στο ίδιο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

(Α3) Έχουμε $\Gamma\widehat{A}E = \Gamma\widehat{A}B - E\widehat{A}B = \Gamma\widehat{\Delta}B - E\widehat{Z}B$.

Στο τρίγωνο $B\overset{\Delta}{\Delta}Z$ έχουμε

$\Gamma\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}Z + \Delta\hat{Z}B$ οπότε $\Gamma\hat{A}E = \Delta\hat{B}Z$.

ΘΕΜΑ 38



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Αφού ΑΓ, ΑΔ διάμετροι $\Rightarrow A\hat{B}\Gamma = 90° = A\hat{B}\Delta$, άρα $A\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Delta = 180°$, οπότε Γ, Β, Δ συνευθειακά.

(Α2) Είναι $A\hat{Z}\Gamma = 90° \Rightarrow \Gamma Z$ ύψος του $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ και $A\hat{E}\Delta = 90°$, άρα ΕΔ ύψος και αφού ΑΒ ύψος του $\overset{\Delta}{A\Gamma\Delta}$ θα έχουμε ότι ΑΒ, ΓΖ, ΔΕ συντρέχουν στο ορθόκεντρο Η.

(Α3) Αφού $H\hat{Z}A = A\hat{E}H = 90° \Rightarrow$ το ΑΕΗΖ είναι εγγράψιμο και το κέντρο του είναι το μέσο της ΑΗ οπότε βρίσκεται πάνω στην ΑΒ.

2ος Τρόπος

Επειδή $\overset{\Delta}{AEH}$ και $\overset{\Delta}{AZH}$ ορθογώνια τρίγωνα , αν Μ το μέσο της ΑΗ τότε $EM = ZM = \dfrac{AH}{2} = MA = MH$. Άρα το μέσο Μ της ΑΗ είναι το περίκεντρο $\overset{\Delta}{AEZ}$.

ΘΕΜΑ 39

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta K}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1°}$ ΒΓ = ΓΔ (τετράγωνο)

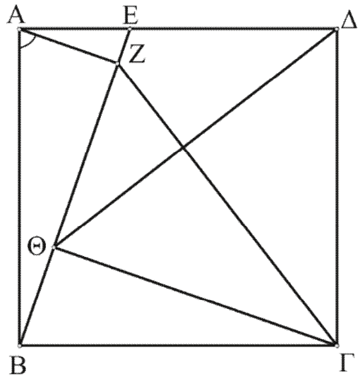
$\boxed{2°}$ $\Gamma\hat{B}Z = \Delta\hat{\Gamma}K$ έχουν πλευρές κάθετες και είναι οξείες

$\boxed{3°}$ ορθογώνια. Άρα ΚΔ = ΓΖ. Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{E\Gamma Z}$ είναι ισοσκελές γιατί η ΓΚ είναι ύψος και διχοτόμος άρα ΕΓ = ΓΖ = ΔΚ.

(Α2) Στο $\overset{\Delta}{B\Delta Z}$ η ΟΘ συνδέει μέσα άρα ΟΘ // ΒΖ οπότε $O\Theta \perp \Gamma K$ άρα το $\overset{\Delta}{O\Gamma\Theta}$ είναι ισοσκελές οπότε ΓΘ = ΓΟ.

(Α3) Αφού ΟΓ = ΓΘ και ΓΕ = ΓΖ $\Rightarrow O\Gamma - \Gamma E = \Gamma\Theta - \Gamma Z \Leftrightarrow OE = \Theta Z = \dfrac{1}{2}\Delta Z$.

ΘΕΜΑ 40



ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ

(Α1) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{ABZ}$ και $\overset{\Delta}{B\Gamma\Theta}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΑΒ = ΒΓ (τετράγωνο) $\boxed{2°}$ $B\hat{A}Z = \Gamma\hat{B}\Theta$ γιατί έχουν πλευρές κάθετες και είναι ορθογώνια. Άρα ΓΘ = ΒΖ.

(Α2) Αφού $\Gamma\hat{\Theta}E + \Gamma\hat{\Delta}E = 90° + 90° = 180° \Rightarrow \Gamma\Delta E\Theta$ εγγράψιμο.

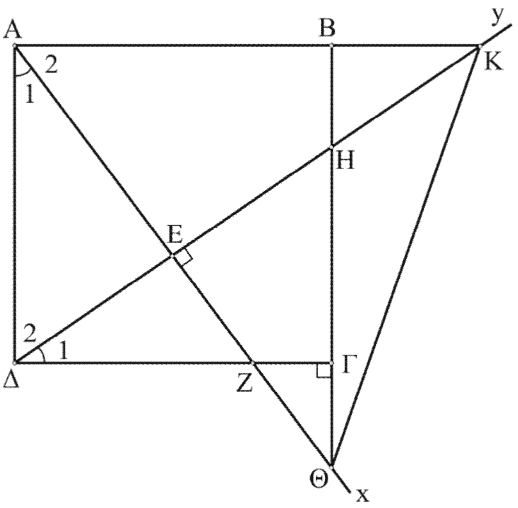
(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Gamma Z}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta\Theta}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^\circ}$ ΒΓ = ΓΔ (τετράγωνο) $\boxed{2^\circ}$ ΒΖ = ΓΘ από το (Α1) και

$\boxed{3^\circ}$ γωνία ΔΓΘ ίση με γωνία ΖΒΓ ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών . Άρα ΔΘ = ΓΖ.

ΘΕΜΑ 41

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{A\Delta Z}$ και $\overset{\Delta}{\Delta\Gamma H}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^\circ}$ ΑΔ = ΓΔ (τετράγωνο)

$\boxed{2^\circ}$ $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ έχουν τις πλευρές κάθετες και είναι οξείες και $\boxed{3^\circ}$ είναι ορθογώνια. Άρα ΑΖ = ΔΗ.

(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AB\Theta}$ και $\overset{\Delta}{A\Delta K}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1^\circ}$ ΑΒ = ΑΔ (τετράγωνο)

$\boxed{2^\circ}$ $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_2$ συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\widehat{\Delta}_1$, $\widehat{A}_1$ και $\boxed{3^\circ}$ είναι ορθογώνια.

Οπότε $B\Theta - B\Gamma = AK - AB \Rightarrow \Gamma\Theta = BK$.

2ος τρόπος

Μπορούμε να συγκρίνουμε απευθείας τα ορθογώνια τρίγωνα $\overset{\Delta}{BKH}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma Z\Theta}$ που έχουν

$\boxed{1^\circ}$ ΓΖ = ΒΗ (διαφορές ίσων τμημάτων)

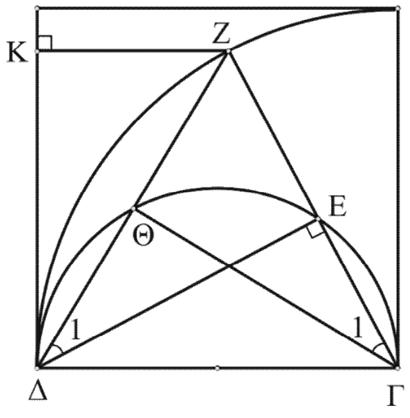
$\boxed{2^\circ}$ $\Gamma\widehat{Z}\Theta = B\widehat{H}K$ (γιατί $\Gamma\widehat{Z}\Theta = E\widehat{Z}\Delta = 90 - \widehat{\Delta}_1$ και $B\widehat{H}K = \Gamma\widehat{H}Z = 90 - \widehat{\Delta}_1$) και

$\boxed{3^\circ}$ είναι ορθογώνια. Άρα ΒΚ= ΓΘ.

(Α3) Στο τρίγωνο $\overset{\Delta}{A\Theta K}$ ΒΘ και ΚΕ είναι ύψη άρα και το ΑΗ θα είναι ύψος αφού Η ορθόκεντρο του $\overset{\Delta}{A\Theta K}$ οπότε $AH \perp K\Theta$.

ΘΕΜΑ 42

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Αφού ΓΔ διάμετρος θα έχουμε $\Delta E \perp Z\Gamma$ και $\Gamma\Theta \perp \Delta Z$.

Αφού $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta Z}$ ισοσκελές με ΔΓ = ΓΖ και ΓΘ ύψος θα είναι ΓΘ διάμεσος, άρα Θ μέσο ΔΖ.

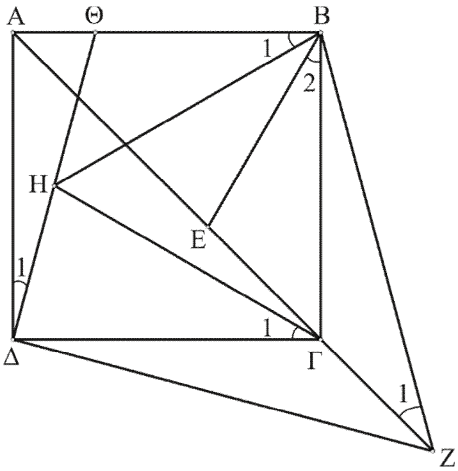
(Α2) Είναι $Z\widehat{\Delta}A = \Delta\widehat{\Gamma}\Theta$ γιατί είναι οξείες με κάθετες πλευρές,

άρα $2Z\widehat{\Delta}A = \Delta\widehat{\Gamma}Z$.

(Α3) Είναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$ εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο, οπότε η γωνία Δ_1 είναι ίση με την γωνία ΖΔΑ, άρα ΔΖ διχοτόμος της $E\widehat{\Delta}A$ και άρα ΖΕ = ΖΚ αφού κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

ΘΕΜΑ 43

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1)Αφού $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta H}$ ισοσκελές και $\hat{\Gamma}_1 = 30° \Rightarrow \Delta\hat{H}\Gamma = \Gamma\hat{\Delta}H = 75°$, άρα $\hat{\Delta}_1 = 15°$ και

αφού το Η είναι στη μεσοκάθετο της ΒΓ η οποία είναι παράλληλη στη ΓΔ θα είναι Η μέσο της ΔΘ.

(Α2) Αφού

$\Delta\hat{H}\Gamma = 75°, \Gamma\hat{H}B = 60° \Rightarrow \Theta\hat{H}B = 45°$. Όμως

$A\hat{\Theta}\Delta = 90° - 15° = 75° \Rightarrow B\hat{\Theta}H = 105°$, και

$\hat{B}_1 = 30°$.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Theta H}$ και $\overset{\Delta}{BE\Gamma}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1°}$ ΒΗ = ΒΓ (ισόπλευρο) $\boxed{2°}$ $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = 30°$

και $\boxed{3°}$ $E\hat{\Gamma}B = B\hat{H}\Theta = 45°$, άρα ΕΓ = ΘΗ και ΒΘ = ΒΕ.

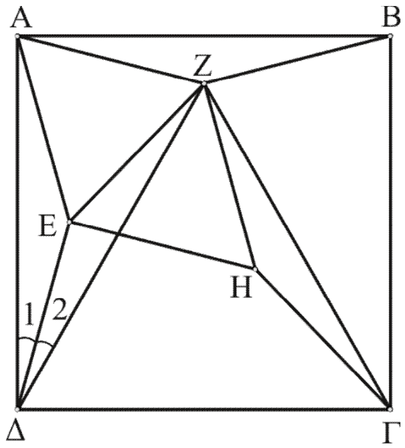
(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{B\Delta\Theta}$ και $\overset{\Delta}{BEZ}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1°}$ ΕΖ = 2ΕΓ = 2ΘΗ = ΔΘ $\boxed{2°}$ $B\hat{\Theta}H = B\hat{E}Z = 105°$ και $\boxed{3°}$ ΒΕ = ΒΘ.

Άρα ΒΔ = ΒΖ και επειδή ΖΑ μεσοκάθετος του ΒΔ έχω ότι ΖΔ=ΒΖ, άρα $\overset{\Delta}{B\Delta Z}$ ισόπλευρο.

ΘΕΜΑ 44

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1) Είναι ΔΑ = ΔΖ και $A\hat{\Delta}Z = 90° - 60° = 30°$.

Άρα $\Delta\hat{Z}A = \Delta\hat{A}Z = 75°$. Αφού

$Z\hat{A}E = A\hat{Z}E = 60°$, άρα $E\hat{A}\Delta = 15°$ και

$E\hat{Z}\Delta = 15°$. Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AE\Delta}$ και $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΑΔ = ΔΖ $\boxed{2°}$ ΑΕ = ΕΖ και

$\boxed{3°}$ $E\hat{A}\Delta = E\hat{Z}\Delta = 15°$, άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 15°$.

(Α2) Στο $\overset{\Delta}{AE\Delta}$ είναι $A\hat{E}\Delta = 150°$,

$A\hat{E}Z = Z\hat{E}H = 60°$, άρα

$H\hat{E}\Delta = 360° - 150° - 120° = 90°$.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Delta EZ}$ και $\overset{\Delta}{\Gamma ZH}$ είναι ίσα διότι:

$\boxed{1°}$ ΔΖ = ΖΓ ισόπλευρο $\boxed{2°}$ ΕΖ = ΖΗ ισόπλευρο και

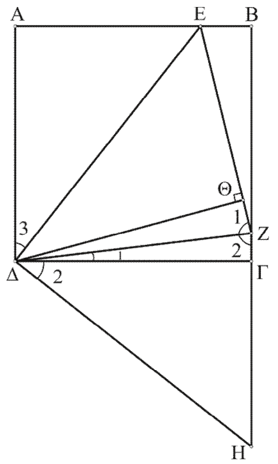
$\boxed{3°}$ $E\hat{Z}\Delta = H\hat{Z}\Gamma = 15°$ διότι $E\hat{Z}\Delta = 75° - 60° = 15°$ και $E\hat{Z}H = \Delta\hat{Z}\Gamma = 60°$, άρα

$E\hat{Z}\Delta = H\hat{Z}\Gamma = 15°$.

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΔΕ = ΗΓ.

ΘΕΜΑ 45

ΥΠΟΔΕΙΞΗ - ΛΥΣΗ



(Α1)Έχουμε $\widehat{\Delta}_1+\widehat{\Delta}_2=45°$ και $\widehat{\Delta}_3+45°+\widehat{\Delta}_1=90°\Rightarrow\widehat{\Delta}_3+\widehat{\Delta}_1=45°$ οπότε: $\widehat{\Delta}_1+\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Delta}_3+\widehat{\Delta}_1\Rightarrow\widehat{\Delta}_2=\widehat{\Delta}_3$.

(Α2) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{A\Delta E}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta\Gamma H}}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΑΔ = ΔΓ (τετράγωνο) $\boxed{2°}$ $\widehat{\Delta}_3=\widehat{\Delta}_2$ από (Α1) και $\boxed{3°}$ ορθογώνια, άρα ΔΕ = ΔΗ.

(Α3) Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{E\Delta Z}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{Z\Delta H}}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΔΖ κοινή $\boxed{2°}$ ΔΕ = ΔΗ από (Α2) και $\boxed{3°}$ $\mathrm{E\widehat{\Delta}Z}=\mathrm{Z\widehat{\Delta}H}=45°$. Αν $\mathrm{\Delta\Theta}\perp\mathrm{EZ}$ τότε τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta\Theta Z}}$ και $\overset{\Delta}{\mathrm{\Delta Z\Gamma}}$ είναι ίσα διότι: $\boxed{1°}$ ΔΖ κοινή $\boxed{2°}$ $\widehat{Z}_1=\widehat{Z}_2$ από την προηγούμενη σύγκριση και ορθογώνια, άρα ΔΘ = ΔΓ οπότε ο κύκλος (c) με κέντρο το Δ και ακτίνα ΑΔ εφάπτεται στην ΕΖ. Αφού ΕΑ, ΕΘ εφαπτόμενες του κύκλου (c), έχουμε ΕΑ = ΕΘ, άρα ΕΖ = ΕΘ + ΘΖ = ΑΕ + ΖΓ.

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΑΡΝΙΚΙΟΥ

ΑΡΓΥΡΗΣ ΓΑΜΒΡΕΛΛΗΣ

ΧΡΗΣΤΟΣ ΚΑΝΑΒΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΑ ΚΑΠΟΓΛΗ

ΑΧΙΛΛΕΑΣ ΚΑΡΑΣΜΑΝΟΓΛΟΥ

ΚΩΣΤΑΣ ΜΑΛΛΙΑΚΑΣ

ΜΑΡΤΗΣ ΜΑΡΤΑΚΗΣ

ΑΠΟΣΤΟΛΗΣ ΜΠΟΥΡΝΗΣ

ΜΙΧΑΛΗΣ ΜΠΟΥΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΡΕΝΕΣΗΣ

ΒΑΣΙΛΗΣ ΣΕΪΤΗΣ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΣΤΑΤΙΟΥ

ΤΑΣΟΣ ΣΩΤΗΡΑΚΗΣ