ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ 2008
ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Αν ισχύει ότι $8x+10y=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης
$$\mathrm{A}=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y.$$

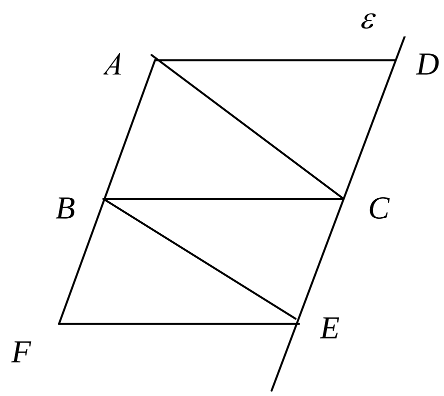
Λύση (1ος τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y\\&=2008-2\cdot2\cdot\left(4x+5y\right)-6\cdot\left(8x+10y\right)\\&=2008-2\cdot\left(8x+10y\right)-6\cdot\left(8x+10y\right)=2008-2\cdot1-6\cdot1=2000.\end{aligned}$$
(2ος τρόπος)
$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=2008-4\left(4x+5y\right)-48x-60y\\&=2008-16x-20y-48x-60y\\&=2008-64x-80y=2008-8\left(8x+10y\right)=2008-8\cdot1=2000.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2
Σε μία ατελή διαίρεση ενός τριψήφιου φυσικού αριθμού a με τον αριθμό 5, το πηλίκο είναι μεγαλύτερο κατά 5 του εξαπλάσιου του υπολοίπου. Ποιες είναι οι δυνατές τιμές του αριθμού a;

Λύση
Αν π είναι το πηλίκο και υ είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης, τότε σύμφωνα με την υπόθεση του προβλήματος έχουμε $\pi=6\upsilon+5$ και
$$a=5\left(6\upsilon+5\right)+\upsilon,\ \upsilon\in\{1,2,3,4\}\Leftrightarrow a=31\upsilon+25,\ \ \upsilon\in\{1,2,3,4\}.$$
Η τιμή $\upsilon=0$ αποκλείεται γιατί η διαίρεση είναι ατελής.
- Για $\upsilon=1$, λαμβάνουμε $a=31\cdot1+25=56$.
- Για $\upsilon=2$, λαμβάνουμε $a=31\cdot2+25=87$.
- Για $\upsilon=3$, λαμβάνουμε $a=31\cdot3+25=118$
- Για $\upsilon=4$, λαμβάνουμε $a=31\cdot4+25=149$.

Άρα οι δυνατές τιμές του τριψήφιου αριθμού a είναι : $a=118$ ή $a=149$.

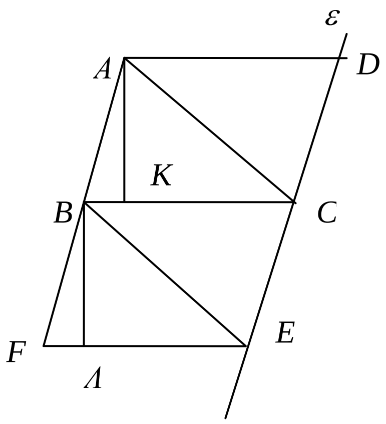
Πρόβλημα 3
Δίνεται το τρίγωνο ABC και η ευθεία ε που περνάει από το C και είναι παράλληλη προς την πλευρά AB. Επιπλέον δίνεται ότι
$$CD=CE=AB.$$
Στην προέκταση της AB προς το B παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $BF=AB$.
α) Να βρεθούν τα τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα και έχουν ίσο εμβαδόν.
Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



β) Τι μέρος του εμβαδού του σχήματος $AFED$ είναι το εμβαδόν του τριγώνου ABC;

Λύση

α) Τα τετράπλευρα $ABCD$ και $BFEC$ έχουν τις απέναντι πλευρές τους παράλληλες, οπότε είναι παραλληλόγραμμα. Άρα θα έχουν τις απέναντι πλευρές τους ίσες, δηλαδή είναι $AD = BC = FE$. Έτσι τα τρίγωνα $ABC, BFE,$ BEC και ACD έχουν ίσες βάσεις.



Τα τρίγωνα ABC και ACD έχουν προς τις ίσες βάσεις τους ύψη ίσα προς το ύψος του παραλληλογράμμου $ABCD$ ως προς τη βάση BC. Ομοίως τα ύψη των τριγώνων $BFE,$ BEC προς τις ίσες βάσεις τους είναι ίσα. Επιπλέον, αν $AK \perp BC$ και $B\Lambda \perp FE$, τότε τα τρίγωνα ABK και $BF\Lambda$ είναι ίσα, αφού είναι ορθογώνια που έχουν ίσες υποτείνουσες και $A\hat{B}K = B\hat{F}\Lambda$ (εντός εναλλάξ στις παράλληλες BC, EF με τέμνουσα τη BF). Άρα θα έχουν και $AK = B\Lambda$ Επομένως τα τρίγωνα $ABC, BFE,$ BEC και ACD έχουν ίσα ύψη προς τις ίσες βάσεις τους, οπότε θα έχουν και ίσα εμβαδά.

(β) Επειδή $E_{AFED} = E_{ABC} + E_{ACD} + E_{BFE} + E_{BEC} = 4E_{ABC}$ έπεται ότι

$$\frac{E_{ABC}}{E_{AFED}} = \frac{E_{ABC}}{4E_{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

Πρόβλημα 4

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε εξαψήφιος θετικός ακέραιος της μορφής $A = ababab$, όπου a, b ψηφία, διαιρείται με το 3.

(β) Να προσδιορίσετε τους εξαψήφιους θετικούς ακέραιους της μορφής $A = ababab$, όπου a, b ψηφία, οι οποίοι διαιρούνται με το 5 και το 9.

Λύση

(α) Το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού Α είναι ο αριθμός

$$\Sigma(A) = a + b + a + b + a + b = 3 \cdot a + 3 \cdot b = 3 \cdot (a + b),$$

που είναι πολλαπλάσιο του 3, οπότε ο αριθμός Α διαιρείται με το 3.

(β) Για να διαιρείται ο αριθμός Α με το 5, πρέπει και αρκεί το τελευταίο ψηφίο του b να είναι 0 ή 5. Έτσι διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $b=0$, τότε $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+0)=3\cdot a$. Επομένως ο αριθμός Α διαιρείται με το 9, όταν ο $3\cdot a$ είναι πολλαπλάσιο του 9. Επειδή ο a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του 0, αυτό συμβαίνει όταν $a\in\{3,6,9\}$, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί $\mathrm{A}=303030$ ή Α=606060 ή 909090.
- Αν $b=5$, τότε το άθροισμα των ψηφίων του Α είναι $\Sigma(\mathrm{A})=3\cdot(a+5)$ και είναι πολλαπλάσιο του 9, όταν $a+5\in\{3,6,9,12\}$, οπότε αφού $1\le a\le 9$ έπεται ότι $a\in\{1,4,7\}$. Έτσι προκύπτουν οι αριθμοί Α=151515 ή Α=454545 ή Α=757575.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1.
Αν ισχύει ότι $12b+26a=1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\mathrm{A}=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\frac{5}{12}-(24b+52a)^{-2}-(72b+156a)^{-1}\\&=\frac{5}{12}-\left[2\cdot(12b+26a)\right]^{-2}-\left[6(12b+26a)\right]^{-1}\\&=\frac{5}{12}-(2\cdot 1)^{-2}-(6\cdot 1)^{-1}=\frac{5}{12}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}-\frac{1}{6}=\frac{5}{12}-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=0.\end{aligned}$$

Πρόβλημα 2.
Τρία σχολεία νοίκιασαν ένα αθλητικό κέντρο για τις ανάγκες του μαθήματος της Γυμναστικής και θα πληρώνουν 3000 ευρώ μηνιαίως. Τα χρήματα που θα πληρώνει κάθε σχολείο είναι ανάλογα προς τον αριθμό των ημερών που θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο. Το πρώτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 12 μέρες το μήνα, το δεύτερο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο 10 μέρες το μήνα και το τρίτο σχολείο κατά το $\frac{1}{2}$ των ημερών του πρώτου σχολείου συν 2 μέρες ακόμα. Πόσο θα κοστίσουν σε κάθε σχολείο οι τρεις πρώτοι μήνες;

Λύση

Το τρίτο σχολείο θα χρησιμοποιεί το αθλητικό κέντρο για $\frac{1}{2}\cdot 12+2=8$ ημέρες.

Αν x, y και z είναι το μηνιαίο κόστος για το πρώτο, δεύτερο και τρίτο σχολείο, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{x}{12}=\frac{y}{10}=\frac{z}{8}=\lambda,$$

οπότε λαμβάνουμε $x=12\lambda,\ y=10\lambda,\ z=8\lambda$ και έχουμε

$$x+y+z=3000\Leftrightarrow 12\lambda+10\lambda+8\lambda=3000\Rightarrow\lambda=100.$$

Άρα έχουμε:

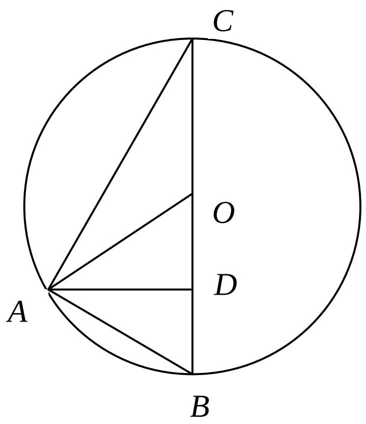
$\frac{x}{12} = 100 \Rightarrow x = 12 \cdot 100 = 1200$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το πρώτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3600 ευρώ.

$\frac{y}{10} = 100 \Rightarrow y = 12 \cdot 100 = 1000$ ευρώ το μήνα , θα πληρώνει το δεύτερο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 3000 ευρώ.

$\frac{z}{8} = 100 \Rightarrow z = 8 \cdot 100 = 800$ ευρώ το μήνα, θα πληρώνει το τρίτο σχολείο, οπότε για τους τρεις μήνες θα πληρώσει 2400 ευρώ.

Πρόβλημα 3

Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα BC είναι διάμετρος του κύκλου και είναι ακόμα $AB = 2\sqrt{7}$ και $AC = 6$.



α) Να βρεθεί το μήκος της διαμέτρου του κύκλου.

β) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου και του ύψους του τριγώνου ABC που αντιστοιχούν στην πλευρά BC.

γ) Αν E είναι το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου και E_x είναι το εμβαδόν του μέρους της επιφάνειας του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC, να αποδείξετε ότι

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3}.$$

Λύση

α) Επειδή είναι $\hat{A} = 90^\circ$, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 6^2 + \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 36 + 4 \cdot 7 = 64.$$

Άρα είναι $BC = 8$.

β) Η διάμεσος AO ισούται με την ακτίνα του κύκλου, οπότε είναι $AO = \frac{8}{2} = 4$.

Για την εύρεση του ύψους AD χρησιμοποιούμε τους τύπους για το εμβαδόν του ορθογώνιου τριγώνου ABC και έχουμε:

$$(ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{BC \cdot AD}{2} \Rightarrow 8 \cdot AD = 6 \cdot 2\sqrt{7} \Rightarrow AD = \frac{12\sqrt{7}}{8} = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

γ) Έχουμε $E = \pi R^2 = \pi \cdot 4^2 = 16\pi.$

Η επιφάνεια του κυκλικού δίσκου που βρίσκεται εξωτερικά του τριγώνου ABC έχει εμβαδόν $E_x = E - (ABC) = 16\pi - \frac{6 \cdot 2\sqrt{7}}{2} = 16\pi - 6\sqrt{7}$, οπότε

$$\frac{E_x}{E} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{16\pi - 6\sqrt{7}}{16\pi} > \frac{2}{3} \Leftrightarrow 48\pi - 18\sqrt{7} > 32\pi \Leftrightarrow 16\pi > 18\sqrt{7}.$$

$$\Leftrightarrow 8\pi > 9\sqrt{7} \Leftrightarrow 64\pi^2 > 81 \cdot 7 \Leftrightarrow \pi^2 > \frac{567}{64},$$

που ισχύει, γιατί είναι $\pi^2 = 3{,}14^2 > 3^2 = 9$, ενώ $\frac{567}{64} < 9$.

Πρόβλημα 4

Έστω ο τριψήφιος θετικός ακέραιος αριθμός $\mathrm{A} = abc$, όπου a, b, c ψηφία με $a \neq 0$. Αν εναλλάξουμε το πρώτο με το τρίτο ψηφίο του, τότε προκύπτει ο ακέραιος Β που είναι μικρότερος από τον Α κατά 396. Επιπλέον, αν από τον Α αφαιρέσουμε 41 προκύπτει αριθμός που ισούται με 50 φορές το άθροισμα των ψηφίων του Α. Να βρείτε τον αριθμό Α.

Λύση

Είναι $\mathrm{A} = \overline{abc} = 100a + 10b + c$, οπότε μετά την εναλλαγή πρώτου και τρίτου ψηφίου προκύπτει ο αριθμός $\mathrm{B} = \overline{cba} = 100c + 10b + a$, οπότε από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = 396 \Leftrightarrow 99(a - c) = 396 \Leftrightarrow a - c = 4$$
$$\Leftrightarrow c = a - 4. \qquad (1)$$

Επιπλέον δίνεται ότι

$$\mathrm{A} - 41 = 50(a + b + c) \Leftrightarrow 100a + 10b + c - 41 = 50a + 50b + 50c$$
$$\Leftrightarrow 50a - 40b - 49c = 41,$$

οπότε, λόγω της (1), λαμβάνουμε

$$50a - 40b - 49(a - 4) = 41 \Leftrightarrow a = 40b - 155. \qquad (2)$$

Επειδή ο ακέραιος a είναι ψηφίο μεγαλύτερο του μηδενός, έπεται ότι

$$1 \leq a \leq 9 \Leftrightarrow 1 \leq 40b - 155 \leq 9 \Leftrightarrow 156 \leq 40b \leq 164 \Leftrightarrow \frac{156}{40} \leq b \leq \frac{164}{40},$$

οπότε λαμβάνουμε $b = 4$. Έτσι από τις (1) και (2) προκύπτει $a = 5$ και $c = 1$.

Άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι ο Α=541.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\mathrm{K} = (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2 y - y^3.$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24 \cdot 200000^2 - 64$$

είναι κύβος ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{K} &= (x + y)^3 - (x - y)^3 - 6x^2 y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 - \left(x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 - y^3\right) - 6x^2 y - y^3 \\
&= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3 - x^3 + 3x^2 y - 3xy^2 + y^3 - 6x^2 y - y^3 \\
&= y^3.
\end{aligned}$$

(β) Έχουμε

$$\mathrm{A} = 200004^3 - 199996^3 - 24\cdot 200000^2 - 64$$
$$= (200000+4)^3 - (200000-4)^3 - 6\cdot 200000^2\cdot 4 - 4^3,$$

οπότε, αν θέσουμε $x = 200000$ και $y = 4$ στην προηγούμενη παράσταση, αυτή γίνεται $\mathrm{A} = y^3 = 4^3$.

Πρόβλημα 2

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a,b ισχύει ότι

$$a^2+b^2-2a = 2b+ab-4,$$

να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης

$$(2x-a)^3-(x-b)^3-x^3=0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} a^2+b^2-2a = 2b+ab-4 &\Leftrightarrow a^2+b^2+2^2-ab-2a-2b=0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[(a-b)^2+(b-2)^2+(2-a)^2\right]=0 \\ &\Leftrightarrow a-b=b-2=2-a=0 \Leftrightarrow a=b=2. \end{aligned}$$

Τότε η εξίσωση γίνεται

$$\begin{aligned} (2x-a)^3-(x-b)^3-x^3=0 &\Leftrightarrow (2x-2)^3-(x-2)^3-x^3=0 \\ &\Leftrightarrow (2x-2)^3+(2-x)^3+(-x)^3=0 \\ &\Leftrightarrow 3(2x-2)(2-x)(-x)=0, \end{aligned}$$

αφού ισχύει ότι $(2x-2)+(2-x)+(-x)=0,$ όπως προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα των κύβων. Η τελευταία παραγοντοποίηση μπορεί επίσης να προκύψει εύκολα , μετά από πράξεις.

Άρα η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

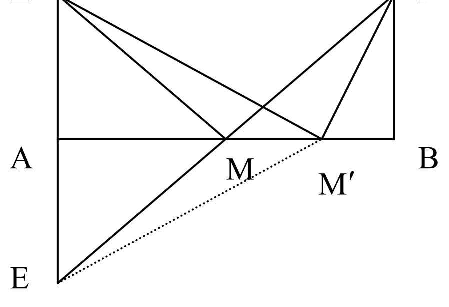
$$(2x-2)(2-x)(-x)=0 \Leftrightarrow 2x-2=0 \text{ ή } 2-x=0 \text{ ή } -x=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=0.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με πλευρές $\mathrm{AB}=2\alpha$ και $\mathrm{A\Delta}=\alpha$. Να αποδείξετε ότι το μέσον Μ της πλευράς ΑΒ έχει την ιδιότητα :

το άθροισμα $\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M}\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό για τις διάφορες θέσεις του σημείου Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ.

Λύση



Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές (ΜΒ = ΒΓ = α), οπότε $\mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 45^\circ$.
Επειδή είναι

$$\Delta\hat{\mathrm{A}}\mathrm{M} + \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 90^\circ + 180^\circ - \mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\Gamma = 225^\circ > 180^\circ,$$

η προέκταση της ΓΜ τέμνει την προέκταση της ΔΑ προς το Α, έστω στο σημείο Ε.
Τα τρίγωνα ΜΒΓ και ΜΑΕ είναι ίσα , γιατί είναι ορθογώνια και έχουν $\mathrm{MA} = \mathrm{MB}$ και $\mathrm{A}\hat{\mathrm{M}}\mathrm{E} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{M}}\Gamma$ (ως κατά κορυφή). Άρα θα έχουν και

$$\mathrm{AE} = \mathrm{B}\Gamma = \mathrm{A}\Delta = \alpha.$$

Τότε όμως και τα τρίγωνα ΑΜΔ και ΑΜΕ είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια στο Α και έχουν την πλευρά ΑΜ κοινή και ΑΕ = ΑΔ. Άρα θα έχουν και ΔΜ = ΕΜ, οπότε

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{EM} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma. \qquad (1)$$

Έστω τώρα τυχόν σημείο M' της ευθείας ΑΒ διαφορετικό από το σημείο Μ. Τότε προφανώς τα ορθογώνια τρίγωνα $\mathrm{AM}'\Delta$ και $\mathrm{AM}'\mathrm{E}$ είναι ίσα , οπότε θα έχουν $\mathrm{AM}' = \mathrm{EM}'$ και

$$\Delta\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Gamma = \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma. \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή $\mathrm{EM}'\Gamma$ είναι τεθλασμένη, ενώ η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία που έχει τα ίδια άκρα με την τεθλασμένη $\mathrm{EM}'\Gamma$**,** από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M} + \mathrm{M}\Gamma = \mathrm{E}\Gamma < \mathrm{EM}' + \mathrm{M}'\Gamma = \Gamma\mathrm{M}' + \mathrm{M}'\Delta.$$

Πρόβλημα 4

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι τέτοιοι ώστε $x > 0, y+1 > 0, z+2 > 0$ και $x+y+z=3$, να αποδείξετε ότι

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} + \frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} + \frac{x(z+2)}{x+z+2} \le 3.$$

Για ποιες τιμές των x, y, z ισχύει η ισότητα;

Λύση

Επειδή τα κλάσματα του πρώτου μέλους της ζητούμενης ανισότητας παρουσιάζουν στον αριθμητή το άθροισμα δύο θετικών αριθμών και στον παρανομαστή το γινόμενό τους, θεωρούμε τη γνωστή ανισότητα

$$(a+b)^2 \ge 4ab, \text{, για κάθε } a, b \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι ισοδύναμη με την προφανή ανισότητα $(a-b)^2 \ge 0$. Η ισότητα αληθεύει όταν $a=b.$ Για a, b θετικούς, από την (1) λαμβάνουμε

$$\frac{ab}{a+b} \le \frac{a+b}{4}, \qquad (2)$$

ενώ η ισότητα αληθεύει όταν $a=b.$

Από την (2) για $a = x, b = y+1$ λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1} \le \frac{x+y+1}{4} \qquad (3)$$

και ομοίως προκύπτουν οι ανισότητες

$$\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3} \le \frac{y+z+3}{4}, \qquad (4)$$

$$\frac{x(z+2)}{x+z+2} \le \frac{x+z+2}{4}. \qquad (5)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (3), (4) και (5) λαμβάνουμε

$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2(x+y+z)+6}{4}$$
$$\frac{x(y+1)}{x+y+1}+\frac{(y+1)(z+2)}{y+z+3}+\frac{x(z+2)}{x+z+2}\le\frac{2\cdot 3+6}{4}=3.$$

Η ισότητα αληθεύει όταν $x=y+1=z+2$, οπότε από την σχέση $x+y+z=3$ προκύπτει ότι $x+x-1+x-2=3 \Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ και $y=1, z=0.$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$x^2+2=3\sqrt{3x-2}.$$

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αναζητήσουμε λύσεις που ικανοποιούν την ανίσωση

$$3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge\frac{2}{3}.$$

Επειδή και τα δύο μέλη της εξίσωσης είναι θετικά, η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$\left(x^2+2\right)^2=9(3x-2) \Leftrightarrow x^4+4x^2-27x+22=0. \qquad (1)$$

Οι πιθανές ακέραιες λύσεις της (1) είναι οι : 1, -1, 2, -2, 11, -11, 22, -22.

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ο ακέραιος 1 είναι ρίζα της εξίσωσης και μέσω του σχήματος Horner καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)\left(x^3+x^2+5x-22\right)=0.$$

Χρησιμοποιώντας και πάλι το σχήμα Horner για $x=2$, για το πολυώνυμο $x^3+x^2+5x-22$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(x-1)(x+2)\left(x^2+3x+11\right)=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x^2+3x+11=0$$
$$\Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2,$$

αφού το τριώνυμο $x^2+3x+11=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=-35<0$.

2ος τρόπος

Ομοίως πρέπει $x\ge\frac{2}{3}$. Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό

$$y=\sqrt{3x-2}, \text{ για } x\ge\frac{2}{3}.$$

Τότε λαμβάνουμε

$$y\ge 0 \text{ και } y^2=3x-2 ,$$

ενώ η δεδομένη εξίσωση γίνεται

$$x^2+2=3y.$$

Έτσι έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{matrix} x^2=3y-2 \\ y^2=3x-2 \end{matrix}\right\} \text{ με } x\ge\frac{2}{3} \text{ και } y\ge 0.$$

Με αφαίρεση των δύο εξισώσεων κατά μέλη λαμβάνουμε

$$x^2 - y^2 = 3(y - x) \Leftrightarrow (x - y)(x + y + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x + y + 3 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ή } x + y = -3.$$

Η εξίσωση $x + y = -3$ είναι αδύνατη λόγω των περιορισμών $x \geq \frac{2}{3}$ και $y \geq 0$.

Για $x = y$ έχουμε την εξίσωση

$$x^2 = 3x - 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 2.$$

Πρόβλημα 2

Σε ένα “τουρνουά” ποδοσφαίρου συμμετέχουν n ομάδες οι οποίες θα παίξουν όλες μεταξύ τους μία μόνο φορά. Για τη νίκη μιας ομάδας δίνονται 3 βαθμοί, για την ισοπαλία 2 βαθμοί και για την ήττα 1 βαθμός. Αν στο τέλος του “τουρνουά” ο συνολικός αριθμός των βαθμών που συγκέντρωσαν όλες οι ομάδες είναι 364, να βρεθεί ο αριθμός n των ομάδων που συμμετείχαν.

Λύση

Έστω ότι συμμετέχουν n ομάδες.

Η 1η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-1 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-1 αγώνες.

Η 2η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-2 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-2 αγώνες.

Η 3η ομάδα παίζει με τις υπόλοιπες n-3 ομάδες , οπότε διεξάγονται n-3 αγώνες.

....

Η (n-1)η ομάδα παίζει με την τελευταία 1 ομάδα , οπότε διεξάγεται 1 αγώνας .

Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\Sigma = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1). \qquad (1)$$

Αν γράψουμε τις ισότητες

$$\Sigma = 1 + 2 + \ldots + (n-2) + (n-1)$$

$$\Sigma = (n-1) + (n-2) + \ldots \; 2 + 1$$

και τις προσθέσουμε κατά μέλη, τότε λαμβάνουμε

$$2\Sigma = (n-1)\left[(n-1)+1\right] = (n-1)n \Rightarrow \Sigma = \frac{(n-1)n}{2}.$$

Σε κάθε αγώνα ο συνολικός αριθμός των βαθμών που δίνονται στις δύο ομάδες που συμμετέχουν (ανεξάρτητα από το αποτέλεσμα) είναι 4. Άρα ο συνολικός αριθμός των αγώνων είναι:

$$\frac{364}{4} = 91 \quad . \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{(n\text{-}1)n}{2} = 91 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = 7 \cdot 13 \Leftrightarrow \frac{(n\text{-}1)n}{2} = \frac{13 \cdot 14}{2} \Leftrightarrow n = 14.$$

Άρα συμμετείχαν 14 ομάδες.

Πρόβλημα 3.

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z ισχύει

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y + 6z + 13 = 0,$$

να προσδιορίσετε το μέγιστο θετικό αριθμό m που είναι τέτοιος ώστε:

$$x + y + z + m \leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^2+y^2+z^2+2x+4y+6z+13=0 \Leftrightarrow x^2+2x+1+y^2+4y+4+z^2+6z+9=1$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y+2)^2+(z+3)^2=1$$

και θέτοντας $a=x+1$, $\beta=y+2$ και $\gamma=z+3$, έχουμε τελικά

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Ισχύει όμως η ανισότητα

$$3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\geq(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

που είναι ισοδύναμη με τη γνωστή ανισότητα $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma$.

Η ισότητα ισχύει όταν $\alpha=\beta=\gamma$.

Επομένως έχουμε

$$(\alpha+\beta+\gamma)^2\leq 3\cdot 1 \Leftrightarrow |\alpha+\beta+\gamma|\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow |x+y+z+6|\leq\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\leq x+y+z+6\leq\sqrt{3} \Leftrightarrow -\sqrt{3}-\sqrt{3}\leq x+y+z+6-\sqrt{3}\leq 0.$$

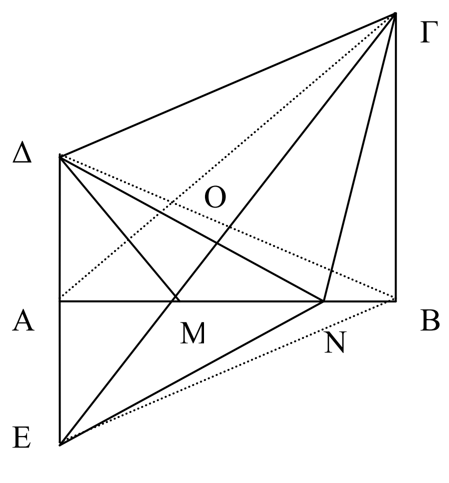
Επειδή η ισότητα ισχύει για $x+1=y+2=z+3=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, έπεται ότι ο ζητούμενος μέγιστος θετικός αριθμός είναι ο $m=6-\sqrt{3}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{B}=90^\circ$, $A\Delta=\alpha$ και $AB=B\Gamma=2\alpha$.

- **(i)** Να αποδείξετε ότι: $\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma$.
- **(ii)** Να βρείτε σημείο Μ πάνω στην ευθεία ΑΒ για το οποίο το άθροισμα $\Delta M+M\Gamma$ είναι το ελάχιστο δυνατό.
- **(iii)** Για το σημείο Μ που θα βρείτε, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΜΓ.

Λύση



(i) Σύμφωνα με τις υποθέσεις του προβλήματος και το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $\Delta A+A\Gamma=\alpha+2\alpha\sqrt{2}=\alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)$, $\Delta B+B\Gamma=\alpha\sqrt{5}+2\alpha=\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)$, οπότε

$$\Delta A+A\Gamma<\Delta B+B\Gamma \Leftrightarrow \alpha\left(1+2\sqrt{2}\right)<\alpha\left(2+\sqrt{5}\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<1+\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 8<6+2\sqrt{5}\Leftrightarrow 1<\sqrt{5},\text{ που ισχύει.}$$

(ii) Αν Ε είναι το συμμετρικό του Δ ως προς την ευθεία ΑΒ και το ευθύγραμμο τμήμα ΕΓ τέμνει την ευθεία ΑΒ στο σημείο Μ, τότε $\Delta\mathrm{M}=\mathrm{ME}$ και

$$\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{EM}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{E\Gamma}. \qquad (1)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τυχόν σημείο Ν πάνω στην ευθεία ΑΒ, διαφορετικό από το Μ, οπότε θα ισχύει ΔΝ = ΝΕ και

$$\Delta\mathrm{N}+\mathrm{N\Gamma}=\mathrm{EN}+\mathrm{N\Gamma}\ . \qquad (2)$$

Επειδή η γραμμή ΕΜΓ είναι ευθεία, ενώ η γραμμή ΕΝΓ έχει τα ίδια άκρα με την ΕΜΓ και είναι τεθλασμένη, έπεται ότι

$$\Delta\mathrm{M}+\mathrm{M\Gamma}=\mathrm{E\Gamma}<\mathrm{EN}+\mathrm{N\Gamma}=\Delta\mathrm{N}+\mathrm{N\Gamma}.$$

Άρα το σημείο Μ είναι τέτοιο ώστε το άθροισμα ΔΜ + ΜΓ να είναι το ελάχιστο δυνατό.

(iii) Επειδή είναι $\Delta\mathrm{E}=2\alpha=\mathrm{B\Gamma}$ και $\Delta\mathrm{E}\perp\mathrm{AB},\ \mathrm{B\Gamma}\perp\mathrm{AB}\Rightarrow\Delta\mathrm{E}\,||\,\mathrm{B\Gamma}$, το τετράπλευρο ΔΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. Αν οι διαγώνιοι του ΔΕΒΓ τέμνονται στο Ο, τότε το Ο είναι το μέσον της ΔΒ και η ΕΟ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ. Επίσης η ΑΒ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΒ, αφού ισχύει ΑΔ =ΑΕ $=\alpha$. Άρα το σημείο τομής Μ των δύο διαμέσων του τριγώνου ΔΕΒ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου ΔΕΒ, οπότε θα ισχύει:

$$\mathrm{AM}=\frac{\mathrm{AB}}{3}=\frac{2\alpha}{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\left(\Delta\mathrm{M\Gamma}\right)=\left(\Delta\mathrm{E\Gamma}\right)-\left(\Delta\mathrm{EM}\right)=\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot2\alpha-\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3}=\frac{4\alpha^2}{3}.$$

Διαφορετικά έχουμε

$$\mathrm{MB}=2\alpha-\frac{2\alpha}{3}=\frac{4\alpha}{3}\ \text{και}$$

$$\begin{aligned}\left(\Delta\mathrm{M\Gamma}\right)&=\left(\mathrm{AB\Gamma\Delta}\right)-\left(\Delta\mathrm{AM}\right)-\left(\mathrm{MB\Gamma}\right)\\&=\frac{\left(\alpha+2\alpha\right)\cdot2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot\frac{2\alpha}{3}-\frac{1}{2}\cdot2\alpha\cdot\frac{4\alpha}{3}\\&=3\alpha^2-\frac{\alpha^2}{3}-\frac{4\alpha^2}{3}=\frac{4\alpha^2}{3}.\end{aligned}$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1 Εάν ο z είναι μιγαδικός με $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\neq0$ και

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

Λύση (1ος τρόπος)
Αν θέσουμε

$$w=\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3},$$

τότε έχουμε

$$w=\overline{w}\Leftrightarrow\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=\frac{6\overline{z}^4+5\overline{z}^2+6}{3\overline{z}^4+\overline{z}^2+3},$$

η οποία μετά από τις πράξεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι $z\overline{z}=|z|^2$ καταλήγει στην ισότητα

$$\left(|z|^4-1\right)\left(z^2-\overline{z}^2\right)=0\Rightarrow |z|=1,$$

αφού λόγω της υπόθεσης $\operatorname{Re}(z),\operatorname{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$.

(2$^{\text{ος}}$ τρόπος)

Εκτελώντας τη διαίρεση έχουμε,

$$\frac{6z^4+5z^2+6}{3z^4+z^2+3}=2+\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}$$

δηλαδή ισοδύναμα

$$\frac{3z^2}{3z^4+z^2+3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{3z^4+z^2+3}{3z^2}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z^2+\frac{1}{z^2}\in\mathbb{R}.$$

Άρα έχουμε

$$z^2+\frac{1}{z^2}=\overline{z}^2+\frac{1}{\overline{z}^2}\Leftrightarrow z^2-\overline{z}^2-\left(\frac{1}{\overline{z}^2}-\frac{1}{z^2}\right)=0\Leftrightarrow\left(z^2-\overline{z}^2\right)\left(1-\frac{1}{|z|^4}\right)=0.$$

Όμως, λόγω της υπόθεσης $\operatorname{Re}(z),\operatorname{Im}(z)\neq 0$ έπεται ότι $z^2-\overline{z}^2\neq 0$, οπότε τελικά λαμβάνουμε $|z|^4=1\Rightarrow|z|=1$.

Πρόβλημα 2

Να λύσετε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}x^3+3xy+y^3=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}\qquad(\Sigma)$$

Λύση

Η εξίσωση $x^3+3xy+y^3=1$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$x^3+y^3+(-1)^3=3xy(-1),$$

η οποία από την ταυτότητα του Euler είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις

$$x+y-1=0 \text{ ή } x=y=-1.$$

Άρα έχουμε

$$(\Sigma)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_1)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c}x=y=-1\\ x^3-x^2=y^3-y^2\end{array}\right\}(\Sigma_2).$$

Το σύστημα (Σ_2) έχει τη λύση $(x,y)=(-1,-1)$, ενώ

$$(\Sigma_1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ x^3-y^3-\left(x^2-y^2\right)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ (x-y)\left(x^2+xy+y^2-x-y\right)=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ x-y=0\end{array}\right\}\text{ ή }\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ x^2+xy+y^2-x-y=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή}\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ (x+y)^2-xy-(x+y)=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\quad(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }\left\{\begin{array}{c}x+y=1\\ xy=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\text{ ή }(x,y)=(1,0)\text{ ή }(x,y)=(0,1).$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η ακολουθία α_ν με $\nu \in \mathbb{N}^*$, για την οποία ισχύει:

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1,\ \text{για κάθε } \nu \in \mathbb{N}^* .$$

Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας είναι επίσης όρος της ακολουθίας.

Λύση

Εφαρμόζοντας την αναδρομική σχέση $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 2\nu + 1$, για $\nu = 1, 2, \ldots, (\nu - 1)$ έχουμε:

$$\text{Για } \nu = 1 \text{ έχουμε } \alpha_2 - \alpha_1 = 2 \cdot 1 + 1$$
$$\text{Για } \nu = 2 \text{ έχουμε } \alpha_3 - \alpha_2 = 2 \cdot 2 + 1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\text{Για } \nu - 1 \text{ έχουμε: } \alpha_\nu - \alpha_{\nu-1} = 2(\nu - 1) + 1.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες λαμβάνουμε:

$$\alpha_\nu - \alpha_1 = 2\big(1 + 2 + 3 + \cdots + (\nu - 1)\big) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = 2\frac{\nu(\nu-1)}{2} + \nu - 1 \Leftrightarrow \alpha_\nu - \alpha_1 = \nu(\nu - 1) + \nu - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - 1 + \alpha_1 . \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \alpha_\nu = \nu^2 - \ell ,\ \text{όπου } \ell = 1 - a_1 . \qquad (2)$$

Για το γινόμενο δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών όρων της ακολουθίας έχουμε:

$$\alpha_m \cdot \alpha_{m+1} = \left(m^2 - \ell\right)\left((m+1)^2 - \ell\right) = \left(m^2 - \ell\right)\left((m^2 + 2m + 1 - \ell\right) =$$
$$= m^4 + 2m^3 + m^2 - \ell m^2 - \ell m^2 - 2\ell m - \ell + \ell^2 =$$
$$= \underbrace{m^4 + m^2 + \ell^2 + 2m^3 - 2\ell m^2 - 2\ell m} - \ell = \left(m^2 + m - \ell\right)^2 - \ell = \alpha_{m^2 + m - \ell} .$$

Πρόβλημα 4

Έστω $\boldsymbol{\Sigma}$ εσωτερικό σημείο οξυγωνίου τριγώνου $\boldsymbol{AB\Gamma}$. Οι ευθείες $\boldsymbol{A\Sigma}$, $\boldsymbol{B\Sigma}$ και $\boldsymbol{\Gamma\Sigma}$ τέμνουν τις πλευρές $\boldsymbol{B\Gamma}$, $\boldsymbol{A\Gamma}$ και $\boldsymbol{AB}$ στα σημεία $\boldsymbol{A'}$, $\boldsymbol{B'}$ και $\boldsymbol{\Gamma'}$ αντίστοιχα, ώστε $\boldsymbol{\Sigma A' \leq A\Sigma}$, $\boldsymbol{\Sigma B' \leq B\Sigma}$ και $\boldsymbol{\Sigma\Gamma' \leq \Gamma\Sigma}$.

Αν θέσουμε $\boldsymbol{x = (\Sigma AB)}$, $\boldsymbol{y = (\Sigma B\Gamma)}$ και $\boldsymbol{z = (\Sigma A\Gamma)}$,να αποδείξετε ότι:

$$\boldsymbol{x^4 + y^4 + z^4 \leq 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2} .$$

Λύση

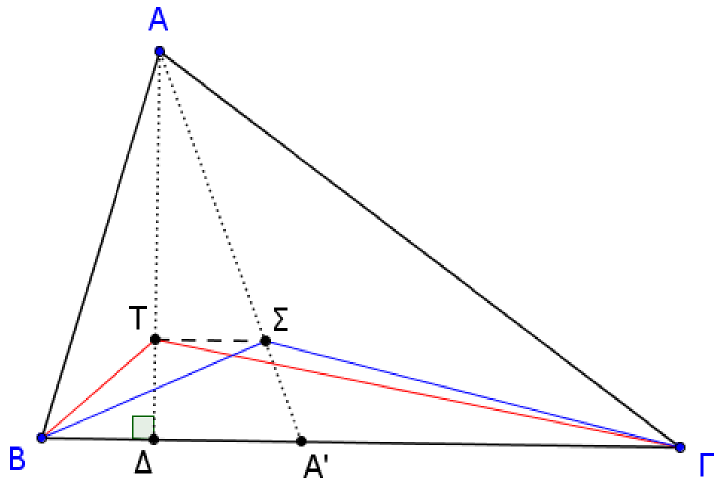
Από το δεδομένο σημείο $\boldsymbol{\Sigma}$ θεωρούμε παράλληλη προς τη $\boldsymbol{B\Gamma}$ που τέμνει το ύψος $\boldsymbol{A\Delta}$ στο σημείο $\boldsymbol{T}$. Τότε προφανώς $\boldsymbol{(\Sigma B\Gamma) = (TB\Gamma)}$.

Από τη σχέση $\boldsymbol{\Sigma A' \leq A\Sigma}$ προκύπτει προφανώς

$$\mathrm{T\Delta} \leq \mathrm{TA}. \qquad (1)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\boldsymbol{T\Delta \cdot \Delta B \leq TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow \frac{1}{2} T\Delta \cdot \Delta B \leq \frac{1}{2} TA \cdot \Delta B \Longleftrightarrow}$$
$$\Longleftrightarrow (T\Delta B) \leq (TAB). \qquad (2)$$



Από τη σχέση (1) έχουμε επίσης:

$$T\Delta\cdot \Delta\Gamma \leq TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow \frac{1}{2}T\Delta\cdot \Delta\Gamma \leq \frac{1}{2}TA\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{T\Delta\Gamma}) \leq (\mathrm{TA\Gamma}) \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε:

$$(T\Delta B)+(T\Delta\Gamma)\leq(TAB)+(TA\Gamma)\Leftrightarrow(TB\Gamma)\leq(TAB)+(TA\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow(TB\Gamma)\leq(AB\Gamma)-(TB\Gamma)$$

και σε συνδυασμό με τη σχέση $(\Sigma B\Gamma)=(TB\Gamma)$, παίρνουμε τελικά :

$$(\Sigma B\Gamma)\leq(AB\Gamma)-(\Sigma B\Gamma)\Leftrightarrow(\Sigma B\Gamma)\leq(\Sigma AB)+(\Sigma A\Gamma).$$

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύουμε ότι;

$$(\Sigma AB)\leq(\Sigma B\Gamma)+(\Sigma A\Gamma) \text{ και } (\Sigma A\Gamma)\leq(\Sigma AB)+(\Sigma B\Gamma).$$

Επειδή έχουμε θέσει $x=(\Sigma AB)$, $y=(\Sigma B\Gamma)$ και $z=(\Sigma A\Gamma)$, από τις τρεις τελευταίες ανισώσεις, έχουμε:

$$0<x\leq y+z,\ 0<y\leq x+z \text{ και } 0<z\leq x+y. \qquad (4)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι:

$$x^4+y^4+z^4\leq 2x^2y^2+2x^2z^2+2y^2z^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4+y^4+z^4-2x^2y^2-2y^2z^2+2x^2z^2-(2xz)^2\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2-y^2\right)^2-(2xz)^2\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+z^2+2xz-y^2\right)\cdot\left(x^2+z^2-2xz-y^2\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left((x+z)^2-y^2\right)\cdot\left((x-z)^2-y^2\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(x-y-z)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\cdot(x+z-y)(x+y-z)\cdot(y+z-x)\geq 0,$$

που ισχύει, λόγω των σχέσεων (4).