ΘΕΜΑ 4

Έστω ότι Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα. Αν για το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ επιπλέον ισχύει ΑΒ>ΑΔ, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $\widehat{\mathrm{AE\Delta}} = \widehat{\mathrm{BZ\Gamma}}$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\widehat{\Delta}$και$\widehat{\mathrm{B}}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε. (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, ναβρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

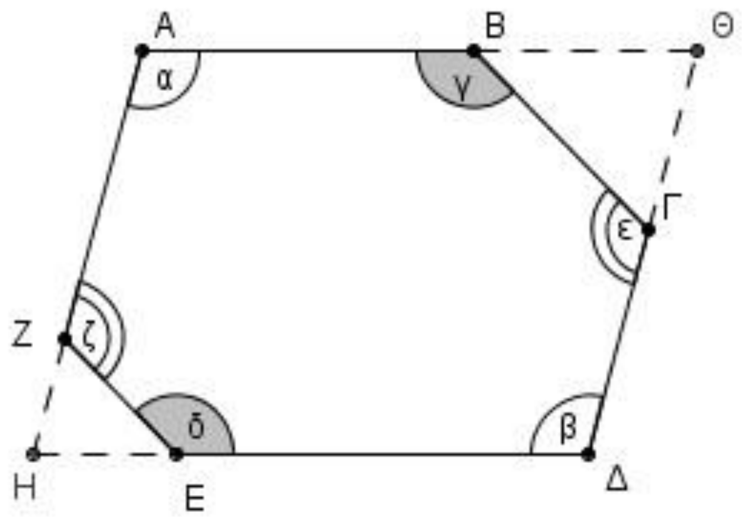
Στο κυρτό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\varepsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\varepsilon}$. (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτεινόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

i. Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές (Μονάδες 10)

ii. Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

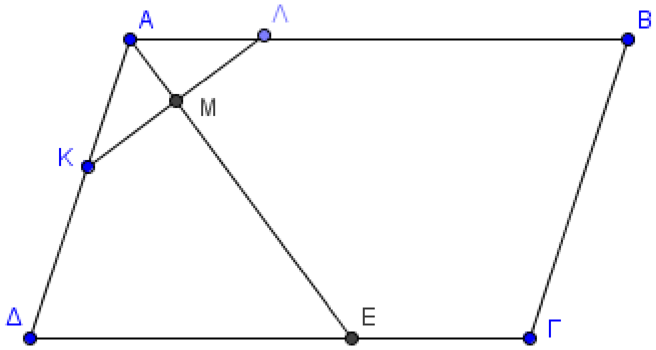
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, με ΑΒ > ΑΔ. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε ΑΚ = ΑΛ. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΔ =ΔΕ. (Μονάδες 8)

β) ΒΓ + ΓΕ = ΑΒ. (Μονάδες 10)

γ) $\hat{B} = 2 \cdot A\hat{\Lambda}K$. (Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και στην προέκταση της ΑΔ θεωρούμε σημείο Ε τέτοιο ώστε ΔΕ = ΔΓ ενώ στην προέκταση της ΑΒ θεωρούμε σημείο θεωρούμε σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΒΖ = ΒΓ.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E}$. (Μονάδες 10)

ii. τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

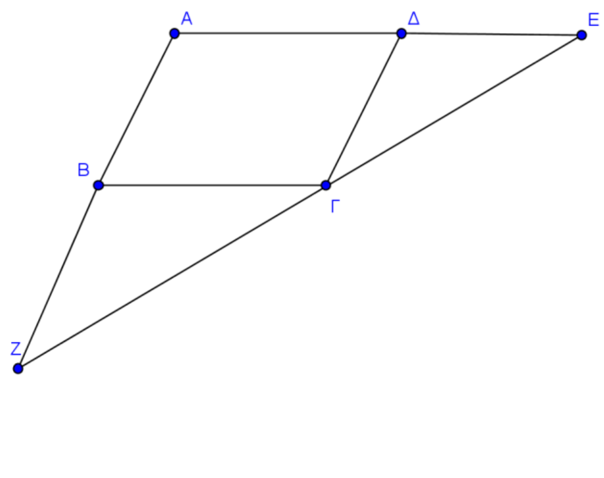
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma$ (ως εντός εκτός και επι τα αυτά μέρη των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από τη ΖΕ) και

$\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E}$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΔΕ και ΒΓ που τέμνονται από την ΔΓ).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{E} + \Delta\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 180^o$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου ΔΕΓ). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}\mathrm{E} + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta + \mathrm{B}\hat{\Gamma}\mathrm{Z} = 180^o$. Οπότε τα σημεία Ζ, Γ, Ε είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



ΘΕΜΑ 4

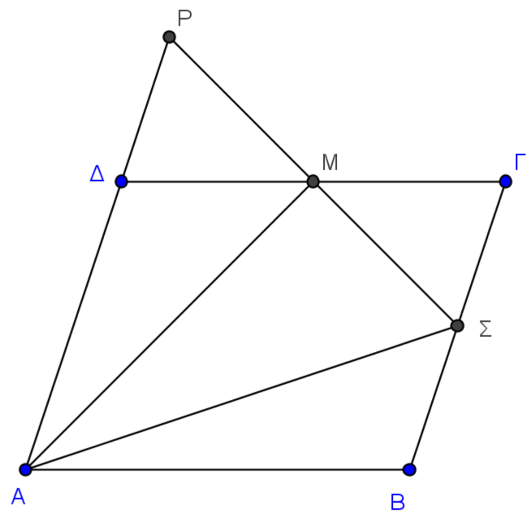
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ το μέσο της πλευράς ΔΓ. Φέρουμε κάθετη στην ΑΜ στο σημείο της Μ, η οποία τέμνει την ευθεία ΑΔ στο σημείο Ρ και την ΒΓ στο Σ.

Να αποδείξετε ότι:

α) ΔΡ = ΣΓ. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο ΑΡΣ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) ΑΣ = ΑΔ + ΓΣ. (Μονάδες 9)



ΘΕΜΑ 4

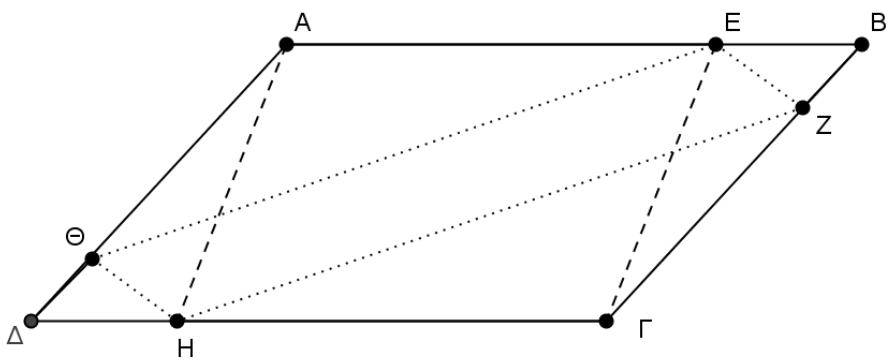
Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ, Η, Θ στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα, με ΑΕ=ΓΗ και ΒΖ=ΔΘ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο ΑΕΓΗ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)

β) Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)

γ) Τα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΖΘ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α, για την οποία ισχύει $ΑΔ = ΔΓ$.

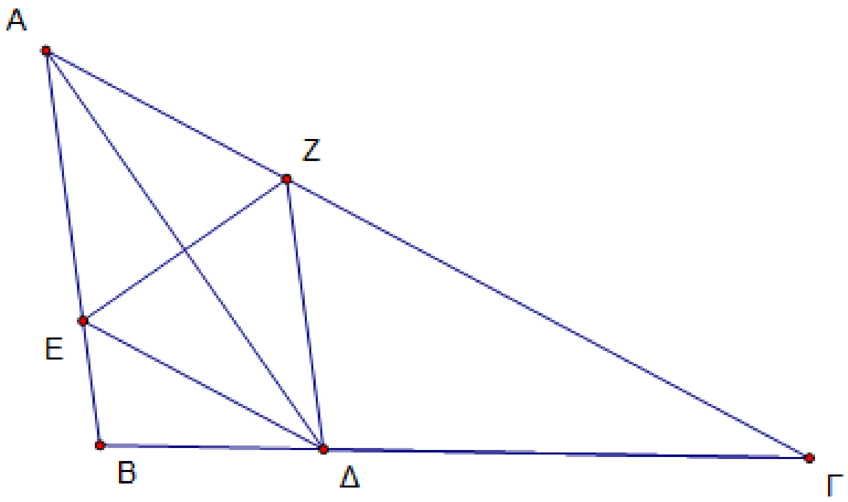
Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΒ και η ΔΖ παράλληλη στην ΑΒ.

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα ΕΔ και ΑΓ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)

β) Το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

γ) Τα τμήματα ΑΔ και ΕΖ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΚ διχοτόμο της γωνίας Α. Στην προέκταση της ΑΚ θεωρούμε σημείο Δ ώστε $\mathrm{AK} = \mathrm{K}\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει τις ΑΓ και ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

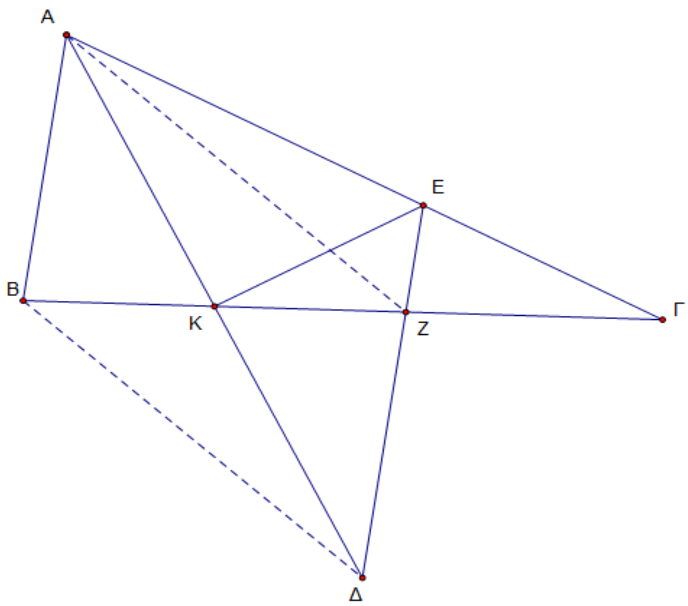
Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)

β) Η ΕΚ είναι μεσοκάθετος της ΑΔ . (Μονάδες 6)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΚΔΖ είναι ίσα. (Μονάδες 7)

δ) Το τετράπλευρο ΑΖΔΒ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)



ΘΕΜΑ 4

Έστω τρίγωνο $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$, ΑΔ η διχοτόμος της γωνίας Α και Μ το μέσον της ΑΒ. Η κάθετη από το Μ στην ΑΔ τέμνει το ΑΓ στο Ε. Η παράλληλη από το Β στο ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Κ και την προέκταση της ΕΜ στο Λ

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΜ, ΜΒΛ και ΑΒΚ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)

β) Το τετράπλευρο ΑΛΒΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)