

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
(ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ)

ΘΕΜΑ 1°

A. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$.

α) Τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i , όπου $i=1, 2, 3, \dots, k$;

Μονάδες 4

β) Τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i όπου $i=1, 2, 3, \dots, k$;

Μονάδες 4

γ) Αν f_1, f_2, \dots, f_k είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών x_1, x_2, \dots, x_k αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1.$$

Μονάδες 4,5

B. Εξετάζοντας 50 οικογένειες ως προς τον αριθμό των παιδιών τους, σχηματίσαμε τον επόμενο πίνακα κατανομής συχνοτήτων:

Αριθμός παιδιών x_i	Αριθμός οικογενειών v_i
0	7
1	15
2	20
3	5
4	3
Σύνολο:	50

Για τις παρακάτω ερωτήσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

1) Η (απόλυτη) συχνότητα της τιμής $x_3 = 2$ είναι

- A.** 15 **B.** 0,4 **Γ.** 0,14
Δ. 20 **E.** 42

Μονάδες 6

2) Η σχετική συχνότητα της τιμής $x_4 = 3$ είναι

- A.** 0,94 **B.** 0,1 **Γ.** 5
Δ. 4 **E.** 47

Μονάδες 6,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x-3}$$

- α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
Μονάδες 7
- β)** Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης f .
Μονάδες 9
- γ)** Να υπολογίσετε την τιμή $f'(0)$.
Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 + 5x + 3$$

- α)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της f .
Μονάδες 12
- β)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.
Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Για τον έλεγχο της κατανάλωσης καυσίμου (ίδιου τύπου) δυο αυτοκινήτων Α και Β μετρήθηκε η κατανάλωσή τους σε έξι διαδρομές για το Α και σε πέντε διαδρομές για το Β. Η κατανάλωση στις έξι διαδρομές (σε λίτρα ανά 100 χιλιόμετρα) για το αυτοκίνητο Α ήταν

9, 6, 7, 9, 9, 8

ενώ η κατανάλωση στις πέντε διαδρομές για το αυτοκίνητο Β ήταν

8, 10, 7, 8, 12.

- α)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Α.
Μονάδες 10
- β)** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μετρήσεων που αφορούν το αυτοκίνητο Β.
Μονάδες 10
- γ)** Αν ένας πωλητής ήθελε να χρησιμοποιήσει τα πιο πάνω δεδομένα για να πείσει έναν υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Α και όχι το Β, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε; Αν αντίστροφα ήθελε να πείσει τον υποψήφιο αγοραστή να αγοράσει το αυτοκίνητο Β και όχι το Α, ποιο μέτρο θέσης (μέση τιμή ή διάμεσο) θα χρησιμοποιούσε;

Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. α) Στη **Στήλη I** του παρακάτω πίνακα δίνονται συναρτήσεις $f(x)$ και στη **Στήλη II** οι παράγωγοί τους $f'(x)$. Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη I Συνάρτηση $f(x)$	Στήλη II Παράγωγος $f'(x)$
A. x	1. $-ημx$
B. \sqrt{x} , $x > 0$	2. $x^{\rho-1}$
Γ. x^{ρ} , $x > 0$ και ρ ρητός	3. $συνx$
Δ. $ημx$	4. 1
E. $συνx$	5. $2\sqrt{x}$
	6. $\rho x^{\rho-1}$
	7. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	8. $ημx$

Μονάδες 5

β) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ στο \mathbf{R} . Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) + g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } g(x) \neq 0, \quad f(g(x)).$$

Μονάδες 7,5

B. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = x^3 + ημx + 3συνx$

β) $f_2(x) = (x - 1)^2$

γ) $f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

δ) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

ε) $f_5(x) = συν(2x+3)$

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2ο

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11 3 7 5 16 14 11 10 11 12

Να βρείτε:

α) τη διάμεσο,

- β) τη μέση τιμή,
 γ) την επικρατούσα τιμή,
 δ) το εύρος και
 ε) τη διακύμανση
 της παραπάνω βαθμολογίας.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X:

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα
[-)	x_i	v_i	f_i	$F_i\%$
1 - 5				20
5 - 9				50
9 - 13				85
13 - 17				95
17 - 21		2		
Σύνολο			1	

Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 6$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x + 1}$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
 ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 9

β) Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη, θεωρώντας ότι υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$.

1. $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

2. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

3. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

6. $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$

7. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

8. $(x^\rho)' = \rho x^{\rho-1}$, ρ ρητός, $x > 0$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 12

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελιπή) πίνακα:

Κόμμα	Συχνότητα	Σχετική Συχνότητα
x_i	v_i	f_i
A		0,15
B	150	0,30
Γ		0,35
Δ		
Σύνολο		

α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

Μονάδες 10

γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα **A** και οι 10 στο τμήμα **B**.

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A** είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ.

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα **B** είναι :

950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

α) Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A**.

Μονάδες 6

β) Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος **B**.

Μονάδες 9

γ) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 2x.$$

Μονάδες 10

Β) Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n (όπου $k \leq n$), v_i είναι η συχνότητα και f_i είναι σχετική συχνότητα της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής X είναι ίσο με 100.

β) Η μέση τιμή \bar{x} ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

γ) Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

δ) Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για $\bar{x} \neq 0$) από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}}.$$

ε) Η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i.$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-)	Αθροιστική συχνότητα N_i
0 - 2	5
2 - 4	15
4 - 6	20
6 - 8	35
8 - 10	40

Να βρείτε:

α) το μέγεθος του δείγματος,

Μονάδες 5

β) τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και

Μονάδες 10

γ) τη μέση τιμή.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα $x'x$,

Μονάδες 5

β) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 5

γ) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

Μονάδες 5

ε) τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5 .$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

β) Αν $f(x) = (t_1 - x)^2 + (t_2 - x)^2 + (t_3 - x)^2 + (t_4 - x)^2 + (t_5 - x)^2 + (t_6 - x)^2$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f'(\bar{x}) = 0$

Μονάδες 6

ii) να αποδείξετε ότι $f(\bar{x}) = 6s^2$, όπου s^2 είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

Μονάδες 5

iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Μονάδες 8

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α) Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.

Μονάδες 5

Β) Ας υποθέσουμε ότι t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τις παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους n . Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Για καθεμιά από τις προτάσεις Γ) και Δ), να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ) Αν οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_k μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη και οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητές τους είναι v_1, v_2, \dots, v_k , τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k.$$

Μονάδες 2

Δ) Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής (CV) ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 3

Ε) Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Να γράψετε στο τετράδιό σας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $R = \frac{f}{g}$ με

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Μονάδες 5

ΣΤ) Υποθέτουμε ότι f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Πότε η f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \in A$;

Μονάδες 2

Ζ) Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \dots, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \dots,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \dots \quad (\text{όταν } \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0).$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 7

γ) Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 3f'(200) + 819g'(-1).$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δέκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης, κατά το μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των εισπράξεων.

Μονάδες 5

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

Εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνό- τητα f_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 v_i$
15					
20					
30					
50					
Σύνολο					

Μονάδες 15

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i, \text{ να υπολογίσετε:}$$

γ₁) τη διακύμανση των εισπράξεων,

Μονάδες 3

γ₂) την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 2

β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 1$,

Μονάδες 3

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα,

Μονάδες 10

δ) τα ακρότατα της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΪΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1°

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $(c)' = 0$.

Μονάδες 10

B) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

Μονάδες 2

β) Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής X ορίζεται (για $s \neq 0$) από το λόγο $CV = \frac{\bar{x}}{s}$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

Μονάδες 2

δ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

Μονάδες 2

ε) Σε ένα δείγμα τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής X το εύρος R ορίζεται από τη σχέση:

$R =$ μεγαλύτερη παρατήρηση + μικρότερη παρατήρηση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της $f(x)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Οι ώρες παρακολούθησης τηλεοπτικών προγραμμάτων από 20 άτομα σε διάστημα μιας εβδομάδας αναγράφονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

Ώρες παρακολούθησης x_i	Συχνότητα v_i	$x_i v_i$	$x_i^2 v_i$
2			
3	6		
9			
11	2		
Σύνολο	$v = 20$		

Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση $x_1 = 2$ ώρες, είναι $\alpha_1 = 72^\circ$.

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

β) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου:

Ώρες εργασίας μαθητών x_i	Συχνότητα v_i
1	α
2	5
3	β
4	2
5	1

Όπου α και β είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου αντίστοιχα της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1, x \in \mathbb{R} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 4 \text{ και } \beta = 3 .$$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο δ των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.

Μονάδες 10

γ) Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α) Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Τότε ισχύει:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

- β) Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

- γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$.

Μονάδες 3

- δ) Η διάμεσος επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

ε) Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Για τις αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ισχύει:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη μελέτη του αριθμού των τροχαίων ατυχημάτων, που γίνονται σε μια κεντρική διασταύρωση κάποιας επαρχιακής πόλης, πήραμε δείγμα πέντε παρατηρήσεων που αφορούν στον αριθμό των ατυχημάτων σε κάθε έναν από τους πέντε τελευταίους μήνες. Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα:

1, 2, 3, 3, 1.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του δείγματος.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

γ) Ποια είναι η (απόλυτη) συχνότητα και ποια η σχετική συχνότητα της τιμής 3;

Μονάδες 5

δ) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

I. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

II. Αν $a = -4$,

α) να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Μονάδες 5

β) να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Μονάδες 10

γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

I. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο

α) από 4 έως 6 λεπτά.

β) από 3 έως 6 λεπτά.

Μονάδες 10

II. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

Μονάδες 10

III. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A)** Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B)** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- α)** Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων δεν επηρεάζεται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

- β)** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

- γ)** Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 3

δ) Έστω f, g δύο οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} , τότε ισχύει:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

ε) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) > f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

α) Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 2$.

Μονάδες 10

β) Τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ) Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών σε Ευρώ ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε 50 καταστήματα μιας πόλης:

Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [-)	Σχετική Συχνότητα f_i
8 - 10	0,2
10 - 12	f_2
12 - 14	0,3
14 - 16	f_4

α) Αν η μέση τιμή των τιμών του προϊόντος στα καταστήματα αυτά είναι $\bar{x} = 11,60$ Ευρώ, να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_2 και f_4 .

Μονάδες 10

β) Αν $f_2 = 0,4$ και $f_4 = 0,1$ τότε,

i) να βρείτε σε πόσα καταστήματα η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ.

Μονάδες 8

ii) να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n μιας μεταβλητής X είναι $\bar{x} = 8$ και $s_x^2 = 4$.

α) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντιστοίχως από τις x_1, x_2, \dots, x_n όταν κάθε μία αυξηθεί κατά 10% τότε:

i) Να εξετάσετε αν το δείγμα y_1, y_2, \dots, y_n είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

ii) Να συγκριθούν μεταξύ τους τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 5

β) Αν $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$

i) να βρείτε τη μέση τιμή \bar{z} και την τυπική απόκλιση s_z των z_1, \dots, z_n .

Μονάδες 10

ii) να εξετάσετε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των z_1, \dots, z_n .

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε να αποδείξετε ότι:
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

B) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta\mu x$.

Μονάδες 3

β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.

Μονάδες 3

γ) Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι άρτιος αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 3

δ) Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $k \in \mathbb{R}$.

A) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο M(3,8), να βρείτε τον k.

Μονάδες 5

B) Για $k = -1$

α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων:

1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α, 6

όπου α πραγματικός αριθμός,

η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$.

A) Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

B) Για $\alpha = 9$

α) Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 8

γ) Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς».

Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι 36° . Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

α) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

i	Χαρακτηρισμός βαθμολογίας	Συχνότητα	Σχετική συχνότητα	Σχετική συχνότητα %	Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες
	x_i	n_i	f_i	$f_i\%$	α_i
1	Άριστα				
2	Λίαν καλώς				
3	Καλώς				
4	Σχεδόν καλώς				
	Σύνολο				

Μονάδες 16

β) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ($f_i\%$).

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.**
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά την 8.30' απογευματινή.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι η $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

- a.** Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g'(x) - f(x)g(x)}{(g(x))^2}.$$

Μονάδες 3

- β.** Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2, \text{ όπου } l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \text{ τότε}$$

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 \cdot l_2.$$

Μονάδες 3

- γ.** Το διάγραμμα συχνότητας χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

- δ. Το εύρος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 3

- ε. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1,2,3,4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i=1,2,3,4$.

x_i	v_i
1	1
3	2
5	1
7	4

Να υπολογίσετε:

- α. τη μέση τιμή \bar{x} ,

Μονάδες 8

- β. τη διάμεσο δ ,

Μονάδες 8

- γ. τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

- β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες 5

- δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Η ηλικία των κατοίκων μιας πόλης ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 έτη και τυπική απόκλιση 15 έτη.

- α. Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής της ηλικίας των κατοίκων.

Μονάδες 4

- β. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

- γ. Αν ο αριθμός των κατοίκων της πόλης είναι 4000, να βρείτε πόσοι περίπου κάτοικοι είναι ηλικίας

(i) μεταξύ 35 και 65 ετών,

Μονάδες 6

(ii) μεταξύ 5 και 35 ετών.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')
ΤΡΙΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, όπου ℓ

πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = \kappa \ell$,

για κάθε πραγματικό αριθμό κ .

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

γ. Για το γινόμενο δύο οποιονδήποτε παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

δ. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών μιας μεταβλητής X είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.

ε. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των ωρών μελέτης των μαθητών της Α΄ τάξης ενός Εσπερινού Γενικού Λυκείου στη διάρκεια μιας εβδομάδας.

Ωρες x_i	Συχνότητα v_i
2	10
3	α
4	10
5	10
6	20

B1. Αν η διάμεσος του δείγματος είναι $\delta=3,5$ να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 8

B2. Για $\alpha=30$, να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} των ωρών μελέτης των μαθητών.

Μονάδες 7

B3. Για $\alpha=30$, να βρείτε τη διακύμανση s^2 των ωρών μελέτης των μαθητών.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2-9x+\beta$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

Γ1. Αν η εφαπτομένη στο σημείο $M(2,5)$ της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 15, να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=3$.

Μονάδες 10

Γ2. Για $\alpha=\beta=3$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x)+9}{x^2-4}$$

Μονάδες 5

Γ3. Για $\alpha=\beta=3$, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x)=f'(x)+10$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1=\alpha$, $x_2=\alpha+5$, $x_3=\alpha+10$ και $x_4=\alpha+35$, όπου α πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται από τον τύπο:

$$F_i = \frac{7i-3}{\lambda}, \text{ για } i=1,2,3,4,$$

όπου λ θετικός ακέραιος.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=25$.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3 και f_4 .

Μονάδες 8

Δ3. Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x}=19$, να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Λ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.
Μονάδες 7
- A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_1 \in A$;
Μονάδες 4
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
Μονάδες 4
- A4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*
- α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
Μονάδες 2
- β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.
Μονάδες 2
- γ) Για την παράγωγο μίας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
Μονάδες 2

δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 - 3x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

B1. Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

B2. Να δείξετε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ολικό μέγιστο και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - kx + 5, \quad k \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1, 12)$.

Μονάδες 5

Γ2. Για $k=6$ να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα σημεία με τετμημένες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x=3$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ανάμεσα στις εφαπτόμενες και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

$$A(8, 0) \quad B(10, 10) \quad \Gamma(12, 20) \quad \Delta(14, y_\Delta)$$

$$E(16, y_E) \quad Z(18, 10) \quad H(20, 0)$$

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και E του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH$.

Δ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και E , αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔE είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 7

Δ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

Δ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Δ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Δ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Δ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , τότε να αποδείξετε ότι $[cf(x)]' = cf'(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 10

A2. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής x , αν $\bar{x} > 0$ και πώς αν $\bar{x} < 0$;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν $x > 0$, τότε $(\ln x)' = -\frac{1}{x}$ (μονάδες 2).

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

- δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).
- ε) $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \eta\mu x_0, x_0 \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 + ax + \beta \text{ με } x \in \mathbb{R} \text{ και } a, \beta \in \mathbb{R}.$$

- B1. Να βρεθεί το a , ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον y' , σχηματίζει με τον x' γωνία 45°

Μονάδες 8

- B2. Αν $a=1$ και $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + \beta x}{x+1} = 6$, να βρεθεί το β .

Μονάδες 9

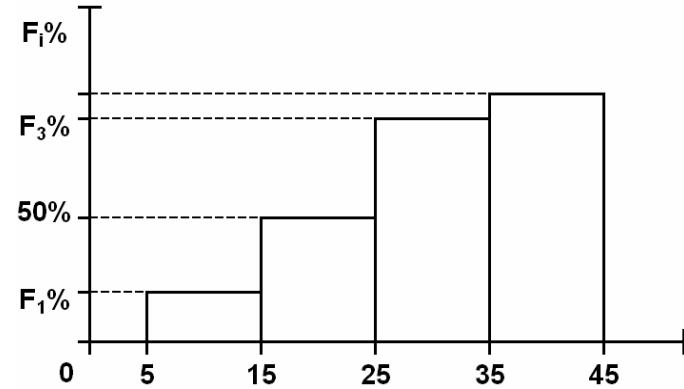
- B3. Αν $a=1, \beta=7$ και $g(x) = f(x) - x^3$ με $x \in \mathbb{R}$, να μελετηθεί η g ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα $[5, 45)$ και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ



- Γ1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

- Γ2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι $a=8$ (μονάδες 3) και να τον μεταφέρετε κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
$[5, \cdot)$		$a+4$			
$[\cdot, \cdot)$		$3a-6$			
$[\cdot, \cdot)$		$2a+8$			
$[\cdot, 45)$		$a-2$			
Σύνολο					

Μονάδες 8

- Γ3. Να βρεθεί η μέση τιμή \bar{x} και η τυπική απόκλιση s των χρόνων. (Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

- Γ4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν για να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα τουλάχιστον 37 λεπτά.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 3$ να αποδείξετε ότι το εύρος των τιμών $f(0)$, $f(\alpha)$, $f(\beta)$, $f(\gamma)$, $f(3)$ είναι $R=1,8$

Μονάδες 5

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$ έχει εξίσωση $\varepsilon: y = -x + 2$ (μονάδες 2).

Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i) , $i=1,2,\dots,10$ της ευθείας ε τέτοια, ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή

$\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρείτε τη μέση τιμή

\bar{y} και την τυπική απόκλιση s_y των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων που επιλέξαμε (μονάδες 6).

Μονάδες 8

Δ4. Έστω $M(x, f(x))$, $x > 0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Η παράλληλη από το M προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x, 0)$ και η παράλληλη από το M προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0, f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKML$ γίνεται μέγιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

A2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}$, $x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Οι ποσότητες x_i, n_i, f_i για ένα δείγμα συγκεντρώνονται σε ένα συνοπτικό πίνακα, που ονομάζεται πίνακας κατανομής συχνοτήτων. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x^3 - \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

B1. Να υπολογίσετε το γ , αν είναι γνωστό ότι

$$\gamma = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x+6} - 3}$$

Μονάδες 7

B2. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ αν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f , στα σημεία με τετμημένες 1 και $\frac{1}{3}$ είναι παράλληλες στον άξονα x' .

Μονάδες 8

B3. Για $\alpha=2, \beta=1$ και $\gamma=36$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta=75$ και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c=10$

Μονάδες 7

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[·, ·)		
[·, ·)		
[·, ·)		
[·, ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ3. Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2 + k + 1$, $x \in \mathbb{R}$, όπου k ακέραιος με $k > 2$ και την εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E , με $E < 4$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $k = 3$

Μονάδες 7

Δ2. Έστω x_1, x_2, \dots, x_{50} οι τετμημένες 50 σημείων της (ϵ) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους y_1, y_2, \dots, y_{50} έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 63$.

α) Να αποδείξετε ότι $\bar{x} = 30$ (μονάδες 5)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες x_1, x_2, \dots, x_{20} αυξάνεται κατά 3. Οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές, και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ , ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 5)

Μονάδες 10

Δ3. Αν $0 < \alpha < \beta < \gamma < 1$ με $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 6$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(1), f'(0)$, όπου $f(x) = x^2 + 4$

Μονάδες 8

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ'ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **ΜΟΝΟ** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

- A1. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και c σταθερός πραγματικός αριθμός, να αποδείξετε με τη χρήση του ορισμού της παραγώγου ότι

$$(c f(x))' = c f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

- A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή λέγεται διακριτή και πότε συνεχής;

Μονάδες 4

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0)=0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η παράγωγός της f' διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0 , τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατο στο διάστημα αυτό.

(μονάδες 2)

- β) $\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon f x = \epsilon f x_0$, όταν $\text{συν} x_0 \neq 0$

(μονάδες 2)

- γ) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

(μονάδες 2)

- δ) Αν x_i είναι τιμή μιας ποσοτικής μεταβλητής X , τότε η αθροιστική συχνότητα N_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες της τιμής x_i

(μονάδες 2)

- ε) Το κυκλικό διάγραμμα είναι ένας κυκλικός δίσκος χωρισμένος σε κυκλικούς τομείς, τα εμβαδά ή, ισοδύναμα, τα τόξα των οποίων είναι ανάλογα προς τις αντίστοιχες συχνότητες N_i ή τις σχετικές συχνότητες f_i των τιμών x_i της μεταβλητής.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

- B1. τον ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$.

Μονάδες 7

- B2. τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα της f .

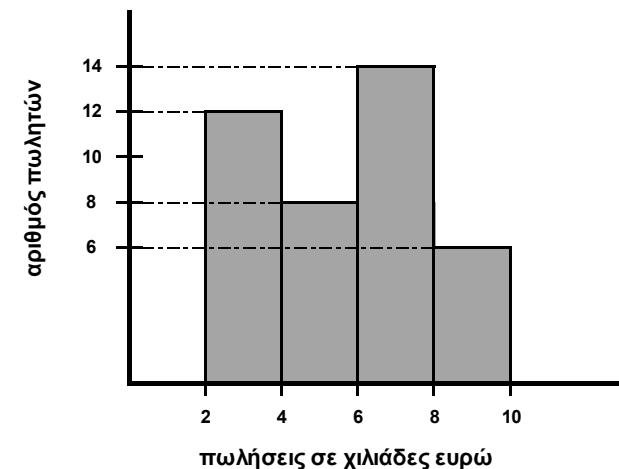
Μονάδες 10

- B3. την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, f(2))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα συχνοτήτων, το οποίο παριστάνει τις πωλήσεις σε χιλιάδες ευρώ που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.



Γ1. Να βρείτε το πλήθος των πωλητών της εταιρείας.

Μονάδες 5

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τη στήλη με τις σχετικές συχνότητες f_i , $i = 1, 2, 3, 4$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητα V_i	Σχετική συχνότητα f_i
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
$[\cdot, \cdot)$			
Σύνολο			

Μονάδες 8

Γ3. α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των πωλήσεων του έτους.

(μονάδες 6)

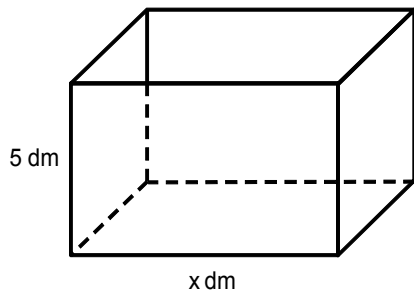
β) Να βρείτε το πλήθος των πωλητών που έκαναν πωλήσεις τουλάχιστον 4,5 χιλιάδων ευρώ (θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα καταταξιωμένες).

(μονάδες 6)

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση ορθογώνιο και ανοικτό από πάνω.



Το ύψος του κουτιού είναι 5 dm.
 Η βάση του κουτιού έχει σταθερή περίμετρο 20 dm και μία πλευρά της είναι x dm με $0 < x < 10$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνολική επιφάνεια του κουτιού ως συνάρτηση του x είναι $E(x) = -x^2 + 10x + 100$, $x \in (0, 10)$

και στη συνέχεια να βρείτε για ποια τιμή του x το κουτί έχει τη μέγιστη επιφάνεια.

Μονάδες 10

Δ2. Να αποδείξετε ότι ο όγκος $V(x)$ του κουτιού γίνεται μέγιστος για $x = 5$ (δίνεται ότι ο όγκος V ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου διαστάσεων α, β, γ είναι $V = \alpha\beta\gamma$)

Μονάδες 7

Στη συνέχεια, θεωρούμε τα σημεία $A_i(x_i, y_i)$, όπου $y_i = E(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, 21$ με $5 = x_1 < x_2 < \dots < x_{20} < x_{21} = 9$

Δ3. Αν το δείγμα των τετμημένων x_i , $i = 1, 2, \dots, 21$ των παραπάνω σημείων $A_i(x_i, y_i)$

- δεν είναι ομοιογενές
- έχει μέση τιμή $\bar{x} = 8$ και
- τυπική απόκλιση s τέτοια, ώστε

$$2s^2 - 5s + 2 = 0$$

τότε:

α) να αποδείξετε ότι $s = 2$

(μονάδες 4)

β) να βρείτε τη μέση τιμή των x_i^2 , με $i = 1, 2, \dots, 21$

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum_{i=1}^v t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^v t_i \right)^2}{v} \right\}$$

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4(ΤΕΣΣΕΡΙΣ)

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A3. Αν x_1, x_2, \dots, x_n είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους n και w_1, w_2, \dots, w_n είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής X .

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής X εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A .

ε) Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 4, x \in \mathbb{R}$.

B1. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$.

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(2, f(2))$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα n παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντιστοίχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανομημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην 3^η κλάση είναι 108° .
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{X} = 14$.

Κλάσεις	$f_i\%$
[8 , 10)	
[10 , 12)	
[12 , 14)	
[14 , 16)	
[16 , 18)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον Πίνακα Ι συμπληρωμένο.

Μονάδες 8

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \approx 2,57$.

Μονάδες 9

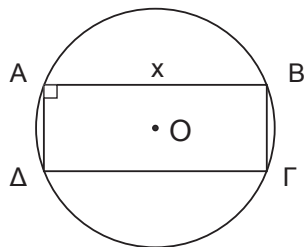
Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα και v_1, v_2, v_3 και v_4 οι συχνότητες της 1^{ης}, 2^{ης}, 3^{ης} και 4^{ης} κλάσης αντίστοιχα. Αν

$$\sum_{i=1}^4 x_i v_i = 1780, \text{ βρείτε το πλήθος } n \text{ των παρατηρήσεων του δείγματος.}$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=χ, όπως φαίνεται στο Σχήμα Ι.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του χ, δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την τιμή του χ για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του χ, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρεθούν οι τιμές των κ, λ ∈ ℝ, ώστε η ευθεία $y = κ \cdot x + λ$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της (6, f(6)).

Μονάδες 6

Δ4. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

ΤΕΛΟΣ 3ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Α' ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2016
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω $c \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, $x \in \mathbb{R}$, είναι $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

A2. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

A3. Έστω f μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται με περίπου 6 φορές την τυπική απόκλιση, δηλαδή $R = 6s$, όπου s η τυπική απόκλιση.

β) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι μέτρο διασποράς.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες, τότε ισχύει ότι:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

δ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε ένα πολύ μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X , που ακολουθεί κανονική κατανομή. Έστω ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 12$ και η τυπική απόκλιση είναι $s = 2$.

B1. Να ελέγξετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 7

B2. Να βρείτε ποιο είναι περίπου το ποσοστό των παρατηρήσεων στο διάστημα τιμών από 10 έως 16.

Μονάδες 9

B3. Να βρείτε ποιο είναι περίπου το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες από 6.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Μονάδες 8

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν n υπολογιστές για να τρέξουν ένα πρόγραμμα, έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 ισοπλάτεις κλάσεις πλάτους c , όπως στον παρακάτω πίνακα:

Χρόνος (σε λεπτά)	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i
[8 ,)		20
[,)	14	15
[,)		10
[,)		v_4
ΣΥΝΟΛΟ		$v = \dots\dots\dots$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $c=4$.

Μονάδες 4

Δ2. Αν η μέση τιμή των χρόνων είναι $\bar{x}=14$, να αποδείξετε ότι $v_4=5$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ3. Αν οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες σε κάθε κλάση, να βρείτε πόσοι υπολογιστές χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά για να τρέξουν το πρόγραμμα.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση των χρόνων είναι $s=4$ και να εξετάσετε αν το δείγμα των χρόνων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

Δ5. Αντικαθιστούμε τον επεξεργαστή κάθε υπολογιστή με έναν ταχύτερο και βρίσκουμε ότι κάθε υπολογιστής τρέχει τώρα το πρόγραμμα στο 80% του χρόνου που χρειαζόταν πριν. Να εξετάσετε ως προς την ομοιογένεια το καινούργιο δείγμα χρόνων.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ(3)

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο \mathbb{R} , να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 7
- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$;
Μονάδες 4
- A3.** Αν ομαδοποιήσουμε τις παρατηρήσεις μιας μεταβλητής σε κλάσεις, τι ονομάζουμε πλάτος μιας κλάσης;
Μονάδες 4
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τότε ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β)** Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$, με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.
- γ)** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων.
- δ)** Στην κανονική κατανομή περίπου το 99,7% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.
- ε)** Για κάθε ζεύγος παραγωγίσιμων συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με

$$f(x) = x^2 - 6x + 9, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$g(x) = x - 3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) + g(x)$.
Μονάδες 4
- B2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης φ με $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ και να γράψετε τον τύπο της στην απλούστερη δυνατή μορφή.
Μονάδες 8
- B3.** Να υπολογίσετε τα όρια
- α.** $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{h(x)}$ (μονάδες 6) και
- β.** $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{h(x)}{\varphi(x)}$. (μονάδες 7)
Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές x_i και οι αντίστοιχες συχνότητες v_i που προέκυψαν από παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X .

x_i	v_i
1	2
3	3
5	4
9	1

- G1.** Για τις παρατηρήσεις αυτές να υπολογιστούν :
- α.** η μέση τιμή \bar{X} (μονάδες 6)
- β.** η διάμεσος δ (μονάδες 5)
- γ.** η διακύμανση s^2 . (μονάδες 7)
Μονάδες 18
- G2.** Να εξετάσετε αν το δείγμα των παραπάνω παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Α

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Μονάδες 7

Δ3. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία (ϵ) του ερωτήματος **Δ2** τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 4

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)} - 1}{x - 1}$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

- 1.** Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ