

**Α΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄: Αριθμητική –
Άλγεβρα, Κεφάλαιο 1 - Οι φυσικοί αριθμοί**

Κεφάλαιο 1: Φυσικοί αριθμοί

Επαναληπτικές έννοιες



Οι αριθμοί 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6..... 98, 99, 100..... 1999, 2000, 2001, ... ονομάζονται **φυσικοί αριθμοί**.



Κάθε φυσικός αριθμός έχει έναν επόμενο και ένα προηγούμενο φυσικό αριθμό, εκτός από το 0 που έχει μόνο επόμενο, το 1.



Για τη σύγκριση των αριθμών χρησιμοποιούνται τα παρακάτω σύμβολα:

το = που σημαίνει «ίσος με»,
το < που σημαίνει «μικρότερος από» και το > που σημαίνει «μεγαλύτερος από».
Για παράδειγμα: $0 < 1 < 2 < \dots$
 $< 10 < 11 < \dots < 297 < \dots < 1000 < \dots$



Οι φυσικοί αριθμοί χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: τους άρτιους ή ζυγούς και τους περιττούς ή μονούς.



Άρτιοι λέγονται οι φυσικοί αριθμοί που είναι πολλαπλάσια του 2, (δηλαδή διαιρούνται με το 2) και περιττοί εκείνοι που δεν διαιρούνται με το 2.



Για να τοποθετηθούν οι αριθμοί σε μία ευθεία γραμμή, φτιάχνετε μία ευθεία στην οποία τοποθετείτε αυθαίρετα στην ευθεία ένα σημείο 0, που αποτελεί την αρχή για να παραστήσετε τον αριθμό 0. Μετά δεξιά από το σημείο 0 διαλέγετε ένα άλλο σημείο Α, που παριστάνει τον αριθμό 1. Τότε, με μονάδα μέτρησης το ΟΑ, βρίσκετε τα σημεία που παριστάνουν τους αριθμούς: 2, 3, 4, 5, ...

1. Δραστηριότητα

- (α) Διαλέξτε έναν τριψήφιο αριθμό που θα έχει διαφορετικά όλα τα ψηφία του:
- (β) Βρείτε τους έξι διαφορετικούς αριθμούς που προκύπτουν όταν εναλλάξετε τα ψηφία του αριθμού που διαλέξατε και γράψτε τους.

--	--	--	--	--	--

- (γ) Ποιος είναι ο μικρότερος και ποιος ο μεγαλύτερος;
- (δ) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, δηλαδή από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο.
.....
- (ε) Γράψτε όλους τους αριθμούς που βρήκατε με σειρά αύξουσα, χρησιμοποιώντας κατάλληλα σύμβολα.
.....
- (στ) Στη συνέχεια, γράψτε τους ίδιους αριθμούς με φθίνουσα σειρά.
.....

- (ζ) Να προσδιορίσετε ποιοι από τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β είναι άρτιοι και ποιοι είναι περιττοί.

Άρτιοι	Περιττοί

- (η) Να τοποθετήσετε τους αριθμούς που έχετε σημειώσει στο ερώτημα β σε μια ευθεία γραμμή.

2. Να τοποθετήσετε στην ευθεία γραμμή τους αριθμούς: 370, 234, 558, 92, 703.

Εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa11.ggb. Στη συνέχεια φτιάξτε την ευθεία των αριθμών και τοποθετήστε τους αριθμούς στο φύλλο εργασίας.

A.1.2. Πρόσθεση, αφαίρεση και πολλαπλασιασμός φυσικών αριθμών



Πρόσθεση είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους **προσθετέους**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ , που είναι το άθροισμά τους και ισχύει: $\alpha + \beta = \gamma$



Το 0 όταν προστεθεί σε ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

$$\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$$



Η σειρά των δύο προσθετέων ενός αθροίσματος μπορεί να αλλάξει.

Αντιμεταθετική ιδιότητα
 $\alpha + \beta = \beta + \alpha$



Είναι δυνατή η αντικατάσταση προσθετέων με το άθροισμά τους ή η ανάλυση ενός προσθετέου σε άθροισμα.

Προσεταιριστική ιδιότητα
 $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$



Αφαίρεση είναι η πράξη με την οποία, όταν δίνονται δύο αριθμοί, M (μειωτέος) και A (αφαιρετέος) υπολογίζεται ένας αριθμός Δ (διαφορά), ο οποίος όταν προστεθεί στο A δίνει το M .

$$M = A + \Delta$$

$$\Delta = M - A$$



Πολλαπλασιασμός είναι η πράξη με την οποία από δύο φυσικούς αριθμούς α και β , τους **παράγοντες**, υπολογίζεται ένας τρίτος φυσικός αριθμός γ , που είναι το **γινόμενο** τους:

$$\alpha \cdot \beta = \gamma$$



Εμβαδό ορθογωνίου
Εμβαδό = $\beta \cdot \upsilon$

3. Δραστηριότητα

(α) Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

$9 + 3 =$	$3 + 9 =$	$7 + 5 =$	$5 + 7 =$	$8 + 4 =$	$4 + 8 =$	$6 + 6 =$	$0 + 1 =$	$0 + 8 =$
-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------	-----------

(β) Να εντοπίσετε και να καταγράψετε από τα παραπάνω ζεύγη, το ζεύγος των αριθμών που έχει άθροισμα 12 και διαφορά 2.

.....

(γ) Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

.....

(δ) Τι παρατηρείτε στις δύο πρώτες προσθέσεις;

.....

4. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες προσθέσεις:

$(5 + 4) + 2 =$	$5 + (4 + 2) =$	$(9 + 1) + 3 =$	$9 + (1 + 3) =$
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

Τι παρατηρείτε στις δύο τελευταίες προσθέσεις;

.....

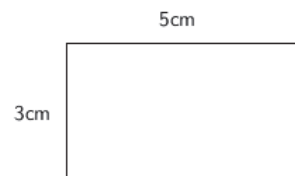
.....

5. Σε όλο το μήκος του εθνικού δρόμου Αθήνας - Αλεξανδρούπολης υπάρχουν χιλιομετρικές ενδείξεις. Οι ενδείξεις αυτές γράφουν: στη Λαμία 214, στη Λάρισα 362, στην Κατερίνη 445, στη Θεσσαλονίκη 514, στην Καβάλα 677, στην Ξάνθη 732, στην Κομοτηνή 788 και στην Αλεξανδρούπολη 854.

Να βρείτε τις αποστάσεις μεταξύ των πόλεων:

Λαμίας και Λάρισα	Λάρισα και Κομοτηνής	Κατερίνης και Αλεξανδρούπολης
-------------------	----------------------	-------------------------------

6. Ο Νέστορας και ο Μενέλαος υπολόγισαν το εμβαδόν του διπλανού σχήματος και το βρήκαν 15 τετραγωνικά εκατοστά. Υπολογίστε και εσείς το εμβαδόν και δώστε μια εξήγηση για το τι ακριβώς κάνατε για να το βρείτε.



.....

.....

.....

.....



- Το 1 όταν πολλαπλασιαστεί με ένα φυσικό αριθμό δεν τον μεταβάλλει.

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- Μπορείτε να αλλάξετε τη σειρά των παραγόντων ενός γινομένου.

Αντιμεταθετική ιδιότητα

$$a \cdot b = b \cdot a$$

- Μπορείτε να αντικαθιστάτε παράγοντες με το γινόμενο τους ή να αναλύετε έναν παράγοντα σε γινόμενο.

Προσεταιριστική ιδιότητα

$$a \cdot (b \cdot \gamma) = (a \cdot b) \cdot \gamma$$



- **Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση:**

$$a \cdot (b + \gamma) = a \cdot b + a \cdot \gamma$$

- **Επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την αφαίρεση:**

$$a \cdot (b - \gamma) = a \cdot b - a \cdot \gamma$$

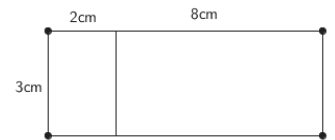


Για να πολλαπλασιάσετε έναν αριθμό επί 10, 100, 1.000, ... γράφετε στο τέλος του αριθμού:

.....

7. Να υπολογίσετε το συνολικό εμβαδόν του σχήματος.

.....



8. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$8 \cdot (4 + 6)$	$89 \cdot (7 + 3)$	$7 \cdot (6 - 4)$
-------------------	--------------------	-------------------

9. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$23 \cdot 49 + 77 \cdot 49$	$76 \cdot 13 - 76 \cdot 3$	$7 \cdot 8 - 7 \cdot 4$
-----------------------------	----------------------------	-------------------------

10. Να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα για να συμπληρώσετε τον αριθμό που λείπει:

$5 \cdot (6 + 4) = (\square \cdot 6) + (5 \cdot \square)$	$9 \cdot (7 - 1) = (9 \cdot \square) - (\square \cdot 1)$
-----------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------

11. Να εκτελέσετε τις ακόλουθες πράξεις:

$6 \cdot 53$	$5 \cdot 97$	$7 \cdot 402$
--------------	--------------	---------------

12. Το αμφιθέατρο του Κολλεγίου έχει 29 γραμμές καθισμάτων όπου η κάθε γραμμή έχει 12 καθίσματα. Χρησιμοποιήστε την επιμεριστική ιδιότητα για να βρείτε πόσα συνολικά καθίσματα έχει το αμφιθέατρο.

.....

13. Να υπολογίσετε τα γινόμενα:

$35 \cdot 10$	$421 \cdot 100$	$5 \cdot 1.000$	$27 \cdot 10.000$
---------------	-----------------	-----------------	-------------------

A.1.3. Δυνάμεις φυσικών αριθμών



Η πρόσθεση είναι η πρώτη πράξη με την οποία ήρθατε σε επαφή. Ακολούθησε η πράξη του πολλαπλασιασμού, όπου αναδείχτηκε πώς πρόκειται για πράξη στην οποία πραγματοποιούνται συνεχείς προσθέσεις του ίδιου αριθμού. Π.χ.
 $3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 \cdot 3 = 24$

Όμως τι συμβαίνει σε ένα γινόμενο των οποίων όλοι οι παράγοντες είναι ίσοι; Π.χ.
 $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$



Το γινόμενο $\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \dots \cdot \alpha$, που έχει n παράγοντες ίσους με το α , λέγεται **δύναμη του α στη n** ή **νιοστή δύναμη του α** και συμβολίζεται με α^n .

Ο αριθμός α λέγεται **βάση** της δύναμης και ο n λέγεται **εκθέτης**.



Το α^1 , δηλαδή η **πρώτη δύναμη** ενός αριθμού α είναι ο **ίδιος ο αριθμός α** .

Οι **δυνάμεις του 1**, δηλαδή το 1^n , είναι **όλες ίσες με 1**.

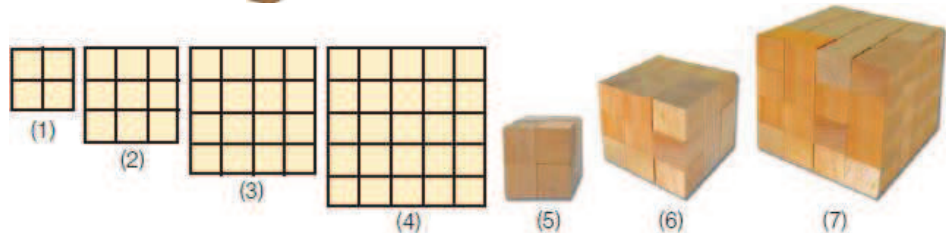


Η δύναμη του αριθμού στη **δευτέρα**, δηλαδή το α^2 , λέγεται και **τετράγωνο του α** .

Η δύναμη του αριθμού στην **τρίτη**, δηλαδή το α^3 , λέγεται και **κύβος του α** .

14. Δραστηριότητα

(α) Από πόσα τετράγωνα αποτελούνται τα τέσσερα πρώτα σχήματα και από πόσους κύβους τα επόμενα τρία;



.....

(β) Γράψτε το πλήθος των τετραγώνων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο δύο ίδιων αριθμών.

.....

(γ) Γράψτε το πλήθος των κύβων που εντοπίσατε στο ερώτημα (α) ως γινόμενο τριών ίδιων αριθμών.

.....

15. Να υπολογίσετε το τετράγωνο, τον κύβο, την τέταρτη, την πέμπτη και την έκτη δύναμη του αριθμού 10. Τι παρατηρείτε;

.....
.....

16. Γράψτε με τη μορφή των δυνάμεων τα γινόμενα:

(α) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

(β) $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

(γ) $\beta \cdot \beta \cdot \beta$

(δ) $\gamma \cdot \gamma \cdot \gamma$

(ε) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

(στ) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2$

(ζ) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \beta \cdot \beta \cdot \beta$

17. Κάντε τις ακόλουθες πράξεις:

(α) $2 \cdot 7^2$

(β) $2 \cdot 7^2 + 3$

(γ) $2 \cdot 7^2 + 3^2$

(δ) $2 \cdot 7 + 3^2$

(ε) $2 \cdot (7 + 3)^2$



Αριθμητική παράσταση λέγεται κάθε σειρά αριθμών που συνδέονται μεταξύ τους με τα σύμβολα των πράξεων.



Η σειρά με την οποία πραγματοποιούνται οι πράξεις σε μία αριθμητική παράσταση (προτεραιότητα των πράξεων) είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογισμός δυνάμεων.
2. Εκτέλεση πολλαπλασιασμών και διαιρέσεων
3. Εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων.

Αν υπάρχουν παρενθέσεις, χρειάζεται να εκτελέσετε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με την παραπάνω σειρά.

18. Δραστηριότητα

Ο Κωστάκης, η Ρένα και ο Δημήτρης έκαναν τις πράξεις στην αριθμητική παράσταση: $8 \cdot (2 \cdot 3 + 4 \cdot 6) + 5 \cdot (7 + 7 \cdot 9) + 10$ και βρήκαν ο καθένας διαφορετικό αποτέλεσμα. Ο Κωστάκης βρήκε 1.312, η Ρένα 600 και ο Δημήτρης 180.

(α) Βρείτε ποιο από τα τρία αποτελέσματα είναι το σωστό.

.....

.....

.....

(β) Μπορείτε να προσδιορίσετε με ποια σειρά έκανε ο καθένας τις πράξεις; Ποια λάθη έγιναν στον τρόπο που πραγματοποίησαν τις πράξεις;

.....

.....

.....

(γ) Διατυπώστε έναν κανόνα για την προτεραιότητα που πρέπει να τηρείτε, όταν κάνετε πράξεις σε μια αριθμητική παράσταση.

19. Να εκτελέσετε τις πράξεις:

<p>(α) $(2 \cdot 5)^4 + 4 \cdot (3 + 2)^2$</p>	<p>(β) $(2 + 3)^3 - 8 \cdot 3^2$</p>
-----------------------------------------------------------	-------------------------------------------------

20. Δημιουργήστε ομάδες των 4 ατόμων για να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa12.ggb. Προσπαθήστε να δημιουργήσετε με την χρήση των συμβόλων των πράξεων και των παρενθέσεων τα αντίστοιχα αποτελέσματα.

.....

.....

.....

.....

.....

Α.1.4. Ευκλείδεια διαίρεση - Διαιρετότητα



Όταν δοθούν **δύο φυσικοί αριθμοί Δ και δ**, τότε υπάρχουν **δύο άλλοι φυσικοί αριθμοί π και υ**, έτσι ώστε να ισχύει: $\Delta = \delta \cdot \pi + \upsilon$



Ο αριθμός **Δ** λέγεται **διαιρετέος**, ο **δ** λέγεται **διαιρέτης**, ο αριθμός **π** ονομάζεται **πηλίκο** και το **υ** **υπόλοιπο** της διαίρεσης.



Το **υπόλοιπο** είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός και πάντα μικρότερος του διαιρέτη:

$$0 \leq \upsilon < \delta$$



Η διαίρεση της παραπάνω μορφής λέγεται **Ευκλείδεια Διαίρεση**.



Τα σύμβολο \leq και \geq δηλώνουν μία από τις δύο πιθανές περιπτώσεις. Π.χ. αν ισχύει $\alpha \geq \beta$ σημαίνει ότι ο αριθμός α ή είναι ίσος ή είναι μεγαλύτερος του β .



Αν το υπόλοιπο **υ** μιας διαίρεσης είναι 0, τότε η διαίρεση καλείται **Τέλεια Διαίρεση**:

$$\Delta = \delta \cdot \pi$$



Ο διαιρέτης **δ** μιας διαίρεσης δεν μπορεί να είναι 0.



Όταν $\Delta = \delta$, τότε $\pi = 1$.



Όταν $\delta = 1$, τότε $\pi = \Delta$.



Όταν $\Delta = 0$, τότε $\pi = 0$.

21. Ο καθηγητής φυσικής αγωγής χρειάζεται να προσδιορίσει με ποιο τρόπο μπορεί να παρατάξει τους 168 μαθητές του σχολείου για την παρέλαση.

(α) Να εργαστείτε στο μικροπείραμα mpa13.ggb.

(β) Μπορεί να φτιάξει πλήρεις τριάδες, τετράδες, πεντάδες,, εξάδες ή επτάδες;

.....

.....

.....

(γ) Πόσες από αυτές θα σχηματιστούν σε κάθε περίπτωση;

.....

.....

22. Στην Α΄ τάξη γυμνασίου φοιτούν 175 μαθητές. Όλοι οι μαθητές θα συμμετάσχουν σε μία εκπαιδευτική επίσκεψη στο Αρχαιολογικό Μουσείο.

Αν κάθε λεωφορείο χωρά 50 μαθητές, πόσα λεωφορεία θα χρειαστούν για την μεταφορά των μαθητών;

.....

.....

23. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) 43 : 7	(β) 42 : 7	(γ) 42 : 42	(δ) 42 : 1	(ε) 0 : 42
$\begin{array}{r l} 43 & 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 42 & 7 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 42 & 42 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 42 & 1 \\ \hline \end{array}$	$\begin{array}{r l} 0 & 42 \\ \hline \end{array}$

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα γ;

.....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα δ;

.....

Τι παρατηρείτε στο ερώτημα ε;

.....



Τα σύμβολο \neq δηλώνει ότι δεν είναι ίσο. Π.χ. αν ισχύει $a \neq 0$ σημαίνει ότι ο αριθμός a δεν μπορεί να είναι μηδέν.

24. Να πραγματοποιήσετε τις ακόλουθες διαιρέσεις:

(α) $x : x$	(β) $x : 1$	(γ) $0 : x$, με $x \neq 0$
-------------	-------------	-----------------------------

25. Ποιες από τις παρακάτω ισότητες εκφράζουν «Ευκλείδεια διαίρεση»;

(α) $120 = 28 \cdot 4 + 8$	(β) $1.345 = 59 \cdot 21 + 106$	(γ) $374 = 8 \cdot 46 + 6$
----------------------------	---------------------------------	----------------------------

Α.1.5. Χαρακτήρες διαιρετότητας-ΜΚΔ-ΕΚΠ-Ανάλυση αριθμού σε γινόμενο πρώτων παραγόντων



Πολλαπλάσια ενός φυσικού αριθμού a είναι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του a με όλους τους φυσικούς αριθμούς. Με τον τρόπο αυτό θα προκύψουν τα πολλαπλάσια του a που είναι $0, a, 2a, 3a, 4a \dots$



Κάθε φυσικός αριθμός διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.



Κάθε φυσικός που διαιρείται από έναν άλλο είναι πολλαπλάσιό του.



Αν ένας φυσικός διαιρεί έναν άλλον θα διαιρεί και τα πολλαπλάσιά του.



Το μικρότερο από τα κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων αριθμών που δεν είναι μηδέν ονομάζεται **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** των αριθμών αυτών. Το **Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο (ΕΚΠ)** δύο αριθμών γράφεται **ΕΚΠ(α, β)**.

26. Δύο πλοία πραγματοποιούνδρομολόγια σ΄ ένα νησί του Αιγαίου. Τα δύο πλοία επισκέπτονται το νησί ως εξής: Το πρώτο ανά 4 ημέρες και το δεύτερο ανά 6 ημέρες. Παρακολουθήστε το μικροπείραμα mpa14.ggb. Αν ξεκίνησαν από το νησί ταυτόχρονα, σε πόσες ημέρες θα ξαναβρεθούν στο λιμάνι του νησιού για πρώτη φορά; Για δεύτερη φορά; Για τρίτη φορά;

.....

.....

.....

.....

27. Να γράψετε ορισμένα πολλαπλάσια του αριθμού 5 και του αριθμού 8.

Πολλαπλάσια του 5										
Πολλαπλάσια του 8										

(α) Ελέγξτε αν ο αριθμός 5 διαιρεί τα πολλαπλάσιά του.

.....

.....

.....

(β) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 48 διαιρείται από τον αριθμό 8. Είναι ο αριθμός 48 πολλαπλάσιο του 8;

.....

.....

(γ) Ελέγξτε αν ο φυσικός αριθμός 24 διαιρείται από τον αριθμό 16. Είναι ο αριθμός 24 πολλαπλάσιο του 16;

.....

.....

28. Να γράψετε τα πολλαπλάσια των αριθμών 3 και 4:

Πολλαπλάσια του 3												
Πολλαπλάσια του 4												

(α) Με βάση τον πίνακα, να καταγράψετε τα κοινά πολλαπλάσια των δύο αριθμών.

.....

.....

(β) Ποιο είναι το Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο των αριθμών 3 και 4;

.....

.....



Διαιρέτες ενός φυσικού αριθμού α λέγονται όλοι οι αριθμοί που τον διαιρούν.



Κάθε αριθμός α έχει διαιρέτες τους αριθμούς 1 και α .



Ένας αριθμός που έχει διαιρέτες μόνο τον **εαυτό του** και το 1 λέγεται **πρώτος αριθμός**, διαφορετικά λέγεται **σύνθετος**.



Δύο φυσικοί αριθμοί α και β μπορεί να έχουν κοινούς διαιρέτες. Ο μεγαλύτερος από αυτούς ονομάζεται **Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης (ΜΚΔ)** των α και β και συμβολίζεται **ΜΚΔ(α , β)**.



Δύο αριθμοί α και β λέγονται **πρώτοι μεταξύ τους** αν είναι **ΜΚΔ(α , β) = 1**.



Για τον υπολογισμό του ΜΚΔ:
 α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
 β) Επιλέγονται **μόνο οι κοινοί παράγοντες με το μικρότερο εκθέτη**.



Για τον υπολογισμό του ΕΚΠ:
 α) Γίνεται ανάλυση των αριθμών σε γινόμενα πρώτων παραγόντων.
 β) Επιλέγονται **οι κοινοί και μη κοινοί παράγοντες με το μεγαλύτερο εκθέτη**.

29. Να βρείτε τους διαιρέτες του 48.

.....

.....

.....

.....

.....

30. Να βρείτε τους διαιρέτες του 37.

.....

.....

Τι παρατηρείτε;

.....

31. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 63.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

32. Να βρείτε τους διαιρέτες του 18 και 65.

.....

.....

Ποιοι είναι οι κοινοί διαιρέτες των δύο αυτών αριθμών;

.....

Ποιος είναι ο μεγαλύτερος κοινός διαιρέτης τους;

.....

33. Να αναλύσετε τους αριθμούς 12, 450, 30 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Με τη βοήθεια αυτής της ανάλυσης να βρεθεί ο ΜΚΔ και το ΕΚΠ αυτών των αριθμών.

**Κριτήρια Διαιρετότητας**

λέγονται οι κανόνες με τους οποίους μπορείτε να συμπεράνετε, χωρίς να κάνετε τη διαίρεση, αν ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 9, 10 ή 25.

- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με **10, 100, 1000, ...**, αν λήγει σε **ένα, δύο, τρία, ... μηδενικά** αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 2, αν το τελευταίο ψηφίο είναι 0, 2, 4, 6, 8.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 5, αν λήγει σε 0 ή 5.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **3** ή το **9**, αν το **άθροισμα των ψηφίων του** διαιρείται με το 3 ή το 9 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το **4** ή το **25**, αν τα **δύο τελευταία ψηφία** του σχηματίζουν αριθμό που διαιρείται με το 4 ή το 25 αντίστοιχα.
- Ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 6 αν διαιρείται συγχρόνως με **το 2 και το 3**.

34. Να βρείτε αν διαιρούνται οι αριθμοί 12510, 772, 225, 13600 με τους αριθμούς 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 25, 100. Σε κάθε περίπτωση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

12510

772

225

13600

35. Έχει αναδειχθεί ότι, ένας φυσικός αριθμός διαιρείται με το 11, όταν η διαφορά των αθροισμάτων των ψηφίων που βρίσκονται στις άρτιες και στις περιττές θέσεις διαιρείται με το 11. Να ελέγξετε αν ο αριθμός 27514322 διαιρείται από το 11.

Ασκήσεις προς λύση**Κριτήρια διαιρετότητας**

- 1.1.** Να υπολογίσετε το άθροισμα: $31 + 32 + 33 + 34 + 16 + 17 + 18 + 19$
- 1.2.** Να κάνετε τις πράξεις:
- A.** $62 \cdot 5 + 62 \cdot 9$
- B.** $349 \cdot 17 - 349 \cdot 12$
- Γ.** $99 \cdot 15 + 99 \cdot 11 - 99 \cdot 20$
- Δ.** $73 \cdot 32 - 73 \cdot 12 + 73 \cdot 5$
- 1.3.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A.** $2 \cdot \alpha + 5 \cdot \alpha$
- B.** $12x - 9x$
- Γ.** $3y + 10y - 8y$
- 1.4.** Να γράψετε σε απλούστερη μορφή:
- A.** $7 \cdot (x - y) + 7y + 3$
- B.** $12 \cdot (\omega + \kappa) + 10 - 12 \cdot \omega - 12 \cdot \kappa$
- 1.5.** Αν $x - y = 2$, να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
- A.** $4x - 4y$
- B.** $8x - 8y + 8$
- 1.6.** Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\kappa - \lambda = 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:
- A.** $6\alpha + 6\beta + 2\kappa - 2\lambda$
- B.** $5(\alpha + \kappa) + 5(\beta - \lambda)$
- 1.7.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A.** $x + x + y + y + y$
- B.** $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$
- Γ.** $x \cdot x \cdot y \cdot y \cdot y$
- Δ.** $(x + x) \cdot y \cdot y$
- E.** $\chi + \chi + \chi + \chi + \chi$
- ΣΤ.** $\chi \cdot \chi \cdot \chi \cdot \chi$
- 1.8.** Να γράψετε πιο σύντομα τα παρακάτω αθροίσματα και γινόμενα:
- A.** $xy + xy + xy$
- B.** $3 \cdot x \cdot x \cdot 3 \cdot x$
- Γ.** $4x + 4x + 4x$
- 1.9.** Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $10 \cdot \gamma^2 + (10 \cdot \gamma)^2$ όταν $\gamma = 2$

1.10. Να συγκρίνετε τους αριθμούς:

A. $3 \cdot 2$ και 2^3

B. 4^3 και 3^4

Γ. $(2+4)^2$ και $2^2 + 4^2$

Δ. $(3 \cdot 4)^2$ και $3^2 \cdot 4^2$

Ε. $(5-3)^2$ και $5^2 - 3^2$

1.11. Να εξηγήσετε γιατί οι αριθμοί $6 \cdot x$ και $6 \cdot y + 30$ διαιρούνται με το 6 (όπου x, y φυσικοί αριθμοί).

1.12. Τρεις φίλοι παίζουν στο Internet ένα παιχνίδι. Ο πρώτος παίζει το παιχνίδι κάθε 4 μέρες, ο δεύτερος κάθε 6 μέρες και ο τρίτος κάθε 8 μέρες. Αν σήμερα παίζουν όλοι το παιχνίδι, μετά από πόσες ημέρες θα ξαναπαίζουν όλοι μαζί;

1.13. Ένας Μαθηματικός έχει επιλέξει 30 ασκήσεις από το 1ο κεφάλαιο, 48 ασκήσεις από το 2ο κεφάλαιο και 36 ασκήσεις από το 3ο κεφάλαιο για να ετοιμάσει επαναληπτικά διαγωνίσματα.

A. Πόσα το πολύ όμοια διαγωνίσματα (δηλαδή με ίδιο πλήθος ασκήσεων από κάθε κεφάλαιο) μπορεί να φτιάξει;

B. Πόσες ασκήσεις θα υπάρχουν στο κάθε διαγώνισμα από το ίδιο κεφάλαιο;

1.14. Ποιες τιμές μπορεί να πάρει το ψηφίο α στον αριθμό $23\alpha 4$ ώστε να προκύψει αριθμός που:

A. να διαιρείται με το 9

B. να διαιρείται με το 3

1.15. Αν $x + y = 2$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = 2(x + 1) + 2(y - 1)$$

$$B = x + 3(x + 2) + 4(y - 1)$$

1.16. Ένα βιβλίο Μαθηματικών έχει 400 με 450 σελίδες. Αν μετρήσουμε τις σελίδες ανά 7, 12, 15 δεν περισσεύει καμία. Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο.