ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Μέρος Β'

Κεφάλαιο 4ο – **Γεωμετρικά Στερεά**

Χρύσα Παπαγεωργίου
Μαθηματικός - Πληροφορικός

Το ορθό πρίσμα και τα στοιχεία του

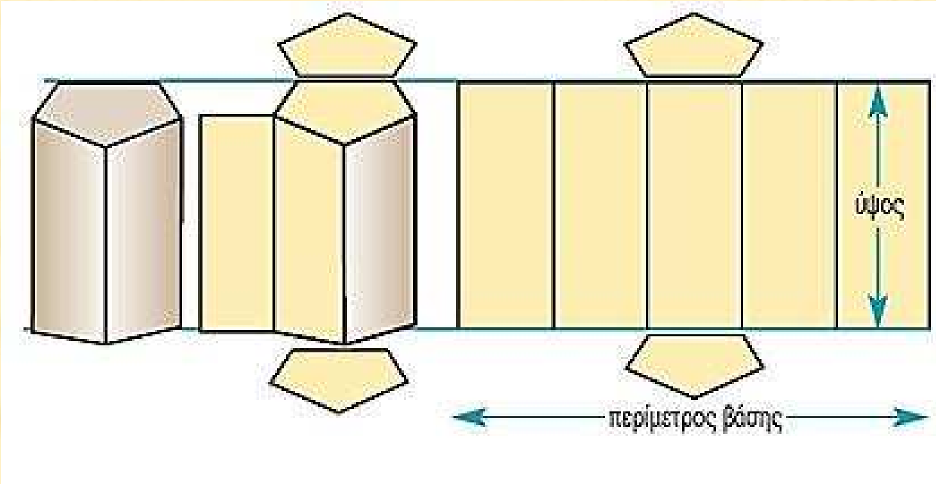
Κάθε **ορθό πρίσμα** έχει:

- ✓ Δύο έδρες παράλληλες, που είναι ίσα πολύγωνα και λέγονται **βάσεις** του πρίσματος
- ✓ τις άλλες έδρες του που είναι **ορθογώνια παραλληλόγραμμα** και ονομάζονται **παράπλευρες έδρες**

1. Οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν την **παράπλευρη επιφάνεια** του πρίσματος.
2. Οι πλευρές των εδρών του πρίσματος ονομάζονται **ακμές**.
3. Η απόσταση των δύο βάσεων, που είναι ίση με το ύψος μιας παράπλευρης έδρας, λέγεται **ύψος** του πρίσματος.
4. Αν η βάση του πρίσματος είναι τρίγωνο, τετράπλευρο, πεντάγωνο κ.ο.κ, τότε αντίστοιχα το πρίσμα λέγεται **τριγωνικό, τετραπλευρικό, πενταγωνικό** κ.ο.κ.

Δύο από τα βασικότερα ορθά πρίσματα είναι ο κύβος και το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο.

Εμβαδό επιφάνειας πρίσματος



Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο της περιμέτρου της βάσης του επί το ύψος του πρίσματος. Δηλαδή:

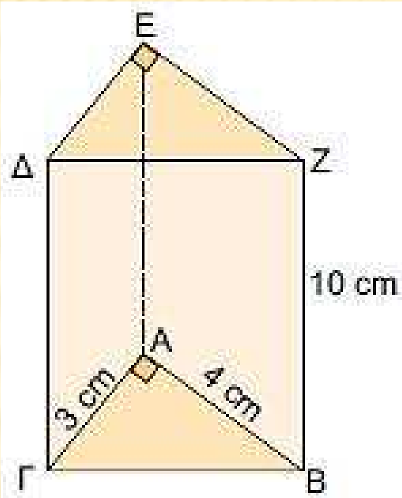
E_{π} = (περίμετρος βάσης) Χ (ύψος)

Το ολικό εμβαδό ενός πρίσματος ($E_{ολ}$) είναι το άθροισμα του εμβαδού της παράπλευρης επιφάνειας E_{π} και των εμβαδών E_{β} των δύο βάσεων,

δηλαδή

$E_{ολ} = E_{\pi} + 2E_{\beta}$

Εμβαδό επιφάνειας πρίσματος



Να βρείτε πόσο χαρτόνι (σε cm^2) χρειάζεται για να κατασκευαστεί το πρίσμα του διπλανού σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι **ορθογώνια τρίγωνα** με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.

Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm.
Η υποτείνουσα ΒΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm). Επομένως:

$$E_β = \frac{1}{2} β \cdot υ = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6 \ (cm^2).$$

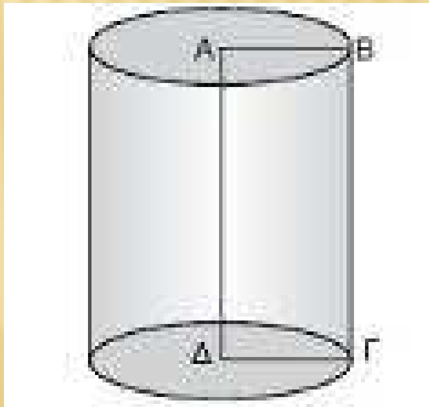
$E_π$ = (περίμετρος βάσης) · (ύψος) = $12 \cdot 10 = 120$ (cm^2).
$E_{ολ} = E_π + 2E_β = 120 + 2 \cdot 6 = 132$ (cm^2).

Κύλινδρος

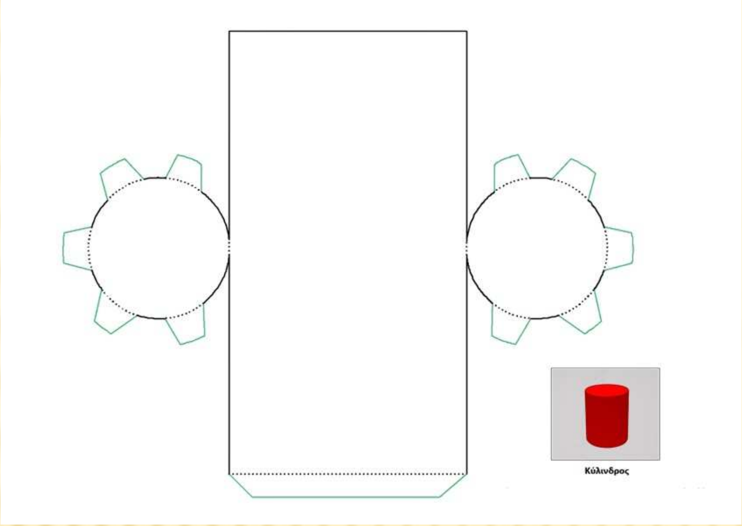
Ένας κύλινδρος αποτελείται από δύο ίσους και παράλληλους κυκλικούς δίσκους, που είναι οι **βάσεις** του και την **παράπλευρη επιφάνεια** που, αν την ξετυλίξουμε, θα δούμε ότι έχει σχήμα ορθογωνίου.

Η απόσταση των δύο βάσεων λέγεται **ύψος** του κυλίνδρου.

Το ΒΓ είναι το ύψος του διπλανού κυλίνδρου.



Εμβαδό επιφάνειας κυλίνδρου



Εμβαδό επιφάνειας κυλίνδρου *(video)*

Το εμβαδό E_π της παράπλευρης επιφάνειας ενός κυλίνδρου ισούται με την περίμετρο της βάσης (που είναι ίση με 2πρ) επί το ύψος του κυλίνδρου, δηλαδή

E_π = (περίμετρος βάσης) X (ύψος)

ή

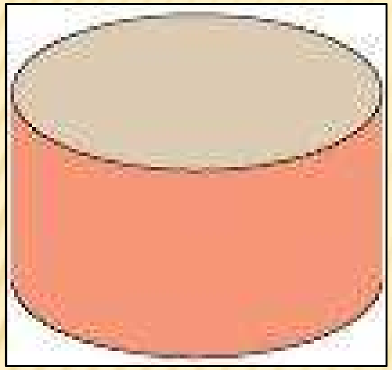
$$E_\pi = 2\pi\rho\upsilon$$

Το ολικό εμβαδό $E_{ο\lambda}$ ενός κυλίνδρου ισούται με το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας E_π και τα εμβαδά E_β των δύο βάσεων,

δηλαδή

$$E_{ο\lambda} = E_\pi + 2E_\beta$$

Εμβαδό επιφάνειας κυλίνδρου



Κόστος δεξαμενής καυσίμων

Μια κλειστή δεξαμενή αποθήκευσης καυσίμων έχει σχήμα κυλίνδρου με ύψος **20 m** και ακτίνα βάσης **ρ = 30 m**. Είναι κατασκευασμένη από ειδική λαμαρίνα που κοστίζει **5 €** το τετραγωνικό μέτρο.

Ποιο είναι το κόστος της λαμαρίνας για την κατασκευή της δεξαμενής;

Πρέπει να βρούμε πόσα τετραγωνικά μέτρα λαμαρίνας χρησιμοποιήθηκαν (δηλαδή το ολικό εμβαδό) και να το πολλαπλασιάσουμε με το κόστος 5 € ανά τετραγωνικό μέτρο.

Η παράπλευρη επιφάνεια έχει εμβαδό:

E_π = (περίμετρος βάσης) • (ύψος) = 2πρ • υ = 2 • 3,14 • 30 • 20 = 3768 m^2

Καθεμία από τις βάσεις έχει εμβαδόν: $E_\beta = \pi\rho^2 = 3{,}14 \bullet 30^2 = 2826\ m^2$

Το ολικό εμβαδό του κυλίνδρου είναι:

$E_{ολ} = E_\pi + 2 \bullet E_\beta = 3768 + 2 \bullet 2826 = 9420\ m^2$

Επομένως, το κόστος της λαμαρίνας είναι 9420 • 5 = 47100 €

Ερωτήσεις κατανόησης

Δίνεται **πρίσμα** με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και ύψους 8cm.

α) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 400 cm^2 Β: 320 cm^2 Γ: 800 cm^2

β) Το ολικό εμβαδό του είναι:

Α: 600 cm^2 Β: 520 cm^2 Γ: 800 cm^2

Ένας **κύλινδρος** έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 8cm.

α) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

Α: 40π cm^2 Β: 60π cm^2 Γ: 80π cm^2

β) Το ολικό εμβαδό του είναι:

Α: 100π cm^2 Β: 110π cm^2 Γ: 130π cm^2

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 211) 5, 7/α,γ, 9

Ερωτήσεις κατανόησης

Δίνεται **πρίσμα** με βάση τετράγωνο πλευράς 10cm και ύψους 8cm.

α) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

A: 400 cm² B: 320 cm² Γ: 800 cm²

β) Το ολικό εμβαδό του είναι:

A: 600 cm² B: 520 cm² Γ: 800 cm²

Ένας **κύλινδρος** έχει διάμετρο βάσης 10cm και ύψος 8cm.

α) Το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειάς του είναι:

A: 40π cm² B: 60π cm² Γ: 80π cm²

β) Το ολικό εμβαδό του είναι:

A: 100π cm² B: 110π cm² Γ: 130π cm²

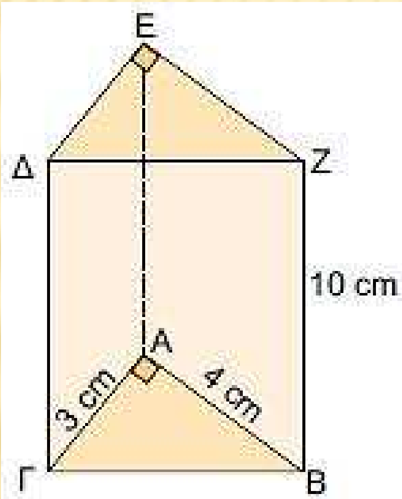
Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 211) 5, 7/α,γ, 9

Όγκος πρίσματος

Ο όγκος ενός πρίσματος ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος,

δηλαδή

Όγκος = (Εμβαδό βάσης) • (ύψος)



Να βρείτε πόσο νερό (σε cm^3) χωράει το πρίσμα του διπλανού σχήματος, του οποίου οι βάσεις είναι **ορθογώνια τρίγωνα** με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm αντίστοιχα και το ύψος είναι 10 cm.

Οι βάσεις του πρίσματος είναι ορθογώνια τρίγωνα με κάθετες πλευρές 3 cm και 4 cm.
Η υποτείνουσα ΒΓ υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:
$ΒΓ^2 = 3^2 + 4^2$ ή $ΒΓ^2 = 25$ ή $ΒΓ = 5$ (cm). Επομένως:
$Ε_β = \frac{1}{2} β \cdot υ = \frac{1}{2} 3 \cdot 4 = 6$ (cm^2).

Όγκος = $Ε_β$ • Ύψος = 6 • 10 = 60 cm^3

Όγκος κυλίνδρου

Ο όγκος ενός κυλίνδρου ισούται με το γινόμενο του εμβαδού της βάσης του επί το ύψος,

δηλαδή

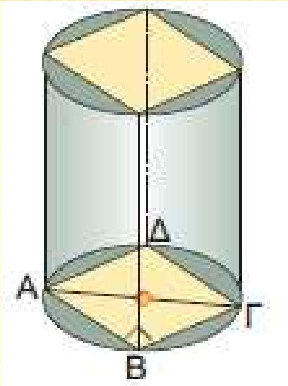
Όγκος = (Εμβαδό βάσης) • (ύψος)

Ο διπλανός κορμός δέντρου θεωρούμενος ως κύλινδρος έχει μήκος 8 m και διάμετρο βάσης 0,6 m. Η τιμή του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € ανά κυβικό μέτρο.
Πόσο αξίζει ο κορμός;

Αφού η διάμετρος του κορμού είναι δ = 0,6 m, τότε η ακτίνα του κύκλου της βάσης του κυλίνδρου είναι ρ = 0,3 (m).
Επομένως, ο όγκος του κυλίνδρου είναι:
$V_K = \pi\rho^2 \bullet \upsilon = 3,14 \bullet (0,3)^2 \bullet 8 = 2,26\ (m^3)$.

Αφού η αξία του συγκεκριμένου είδους ξυλείας είναι 100 € το κυβικό μέτρο, η αξία του κορμού είναι: Α = 2,26 • 100 = 226 €.

Εφαρμογή 3 (σελ. 214)



Ένα πρίσμα έχει βάση τετράγωνο πλευράς α (cm) και είναι εγγεγραμμένο σε κύλινδρο με ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης ρ = 3 cm.
α) Να υπολογίσετε τη πλευρά α του τετραγώνου.
β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου και τον όγκο του πρίσματος.

α) Το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ έχει υποτείνουσα ΑΓ = 2 • ρ = 2• 3 = 6 (cm).
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\alpha^2 + \alpha^2 = 6^2$ ή $2\alpha^2 = 36$ ή $\alpha^2 = 18$.

β) Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V_{κυλ} = \pi\rho^2 υ = 3{,}14 \bullet 3^2 \bullet 10 = 282{,}6\ cm^2$

Ο όγκος του πρίσματος είναι: $V_{πρ} = E_\beta \bullet υ = \alpha^2 \bullet υ = 18 \bullet 10 = 180\ cm^2$

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος πρίσματος.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	12	8	
ύψος (cm)	3		6
όγκος (cm^3)		56	30

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος κυλίνδρου.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	22	9	
ύψος (cm)	4		6
όγκος (cm^3)		72	120

3. Δίνεται κύλινδρος με ακτίνα βάσης ρ=4 cm. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ύψος κυλίνδρου υ	2 cm
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας E_{π}	
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$	
όγκος V	

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 215) 2,4,6

Ποια σχέση έχει ο όγκος ενός κυλίνδρου με τον όγκο ενός κώνου ίδιου ύψους; *(video)*

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος πρίσματος.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	12	8	5
ύψος (cm)	3	7	6
όγκος (cm^3)	36	56	30

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα, όπου φαίνεται το εμβαδόν της βάσης, το ύψος και ο όγκος κυλίνδρου.

εμβαδόν βάσης (cm^2)	22	9	20
ύψος (cm)	4	8	6
όγκος (cm^3)	88	72	120

3. Δίνεται κύλινδρος με ακτίνα βάσης ρ=4 cm. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

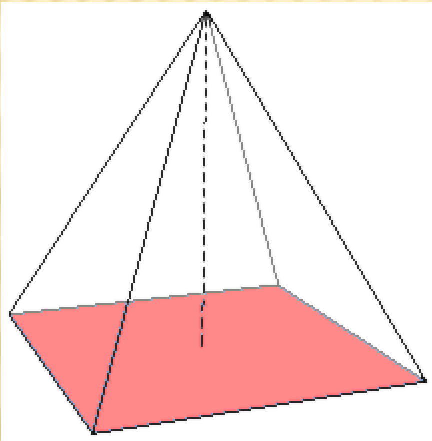
ύψος κυλίνδρου υ	2 cm
εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας E_π	16π
ολικό εμβαδόν $E_{ολ}$	48π
όγκος V	32π

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 215) 2,4,6

Ποια σχέση έχει ο όγκος ενός κυλίνδρου με τον όγκο ενός κώνου ίδιου ύψους; *(video)*

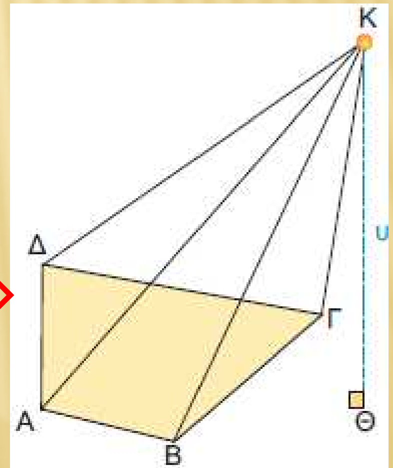
Η πυραμίδα και τα στοιχεία της

Πυραμίδα λέγεται ένα στερεό, που μία έδρα του είναι ένα πολύγωνο και ονομάζεται βάση της πυραμίδας και όλες οι άλλες έδρες του είναι τρίγωνα με κοινή κορυφή και ονομάζονται παράπλευρες έδρες της πυραμίδας.

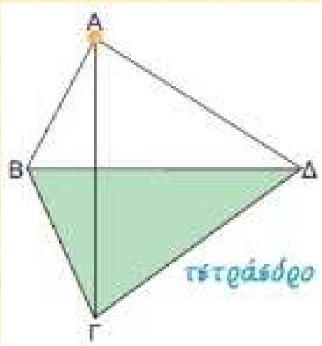


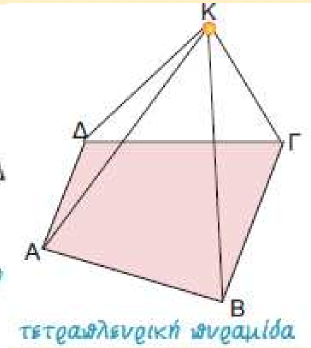
Αν από την κορυφή της πυραμίδας φέρουμε **κάθετο** ευθύγραμμο τμήμα προς τη βάση, τότε το διακεκομμένο αυτό τμήμα λέγεται **ύψος** της πυραμίδας.

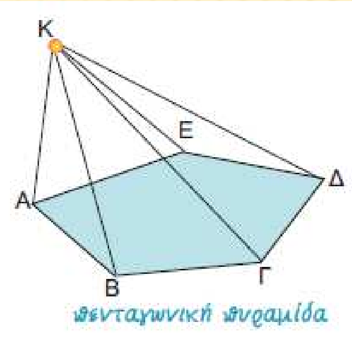
Παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα ότι το ύψος μιας πυραμίδας μπορεί να βρίσκεται και εκτός της πυραμίδας



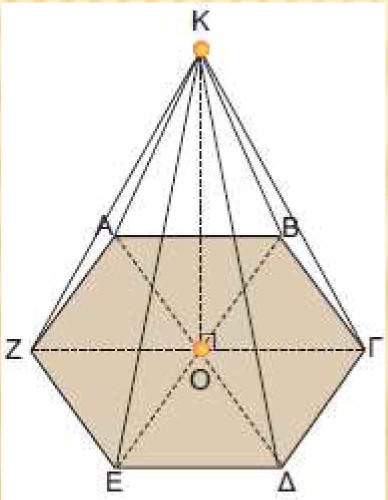
Η πυραμίδα και τα στοιχεία της





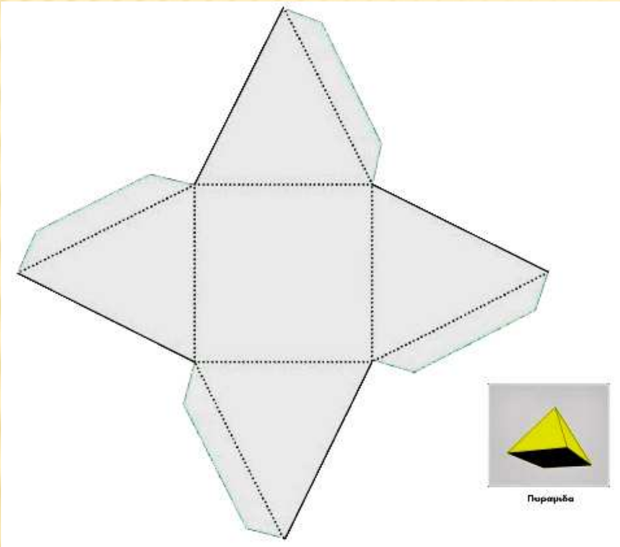


Η κανονική πυραμίδα



- ✓ Μια πυραμίδα λέγεται **κανονική**, αν η βάση της είναι **κανονικό** πολύγωνο και η προβολή της κορυφής της στη βάση είναι το **κέντρο του κανονικού πολυγώνου**, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα
- ✓ Σε οποιαδήποτε κανονική πυραμίδα οι **παράπλευρες έδρες** είναι ίσα μεταξύ τους **ισοσκελή τρίγωνα**
- ✓ Αντίστροφα, αν οι παράπλευρες έδρες μίας πυραμίδας είναι ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τότε η πυραμίδα είναι κανονική

Εμβαδό επιφάνειας πυραμίδας



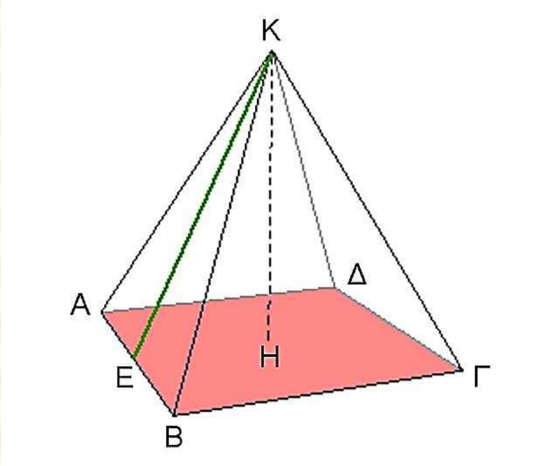
Η **ολική επιφάνεια** της πυραμίδας αποτελείται από δύο μέρη: την επιφάνεια των παράπλευρων εδρών της, που ονομάζεται **παράπλευρη** επιφάνεια και την **επιφάνεια της βάσης της**.
Για να υπολογίσουμε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας $E_Π$ μιας πυραμίδας, υπολογίζουμε το εμβαδό κάθε παράπλευρης έδρας (που είναι τρίγωνο) και προσθέτουμε τα εμβαδά αυτά.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας $E_{ολ}$ της πυραμίδας, προσθέτουμε στο εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας το εμβαδό της βάσης $E_β$

δηλαδή

$$E_{ολ} = E_π + E_β$$

Εμβαδό επιφάνειας κανονικής πυραμίδας



Όταν η πυραμίδα είναι κανονική, τότε η παράπλευρη επιφάνειά της αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία έχουν όλα ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Καθένα από αυτά τα ύψη λέγεται **απόστημα** της κανονικής πυραμίδας.

ΠΡΟΣΟΧΗ! Το ΚΗ είναι το ύψος της πυραμίδας και το ΚΕ είναι το απόστημα της πυραμίδας

Ας υπολογίσουμε το εμβαδό της παράπλευρης επιφάνειας μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας:

$E_Π$=(ΚΑΒ) + (ΚΒΓ) + (ΚΓΔ) + (ΚΔΑ) = 4(ΚΑΒ) = 4 $\frac{1}{2}$ ΑΒ ΚΕ = $\frac{1}{2}$ 4 ΑΒ ΚΕ = $\frac{1}{2}$ Περίμετρος βάσης • απόστημα

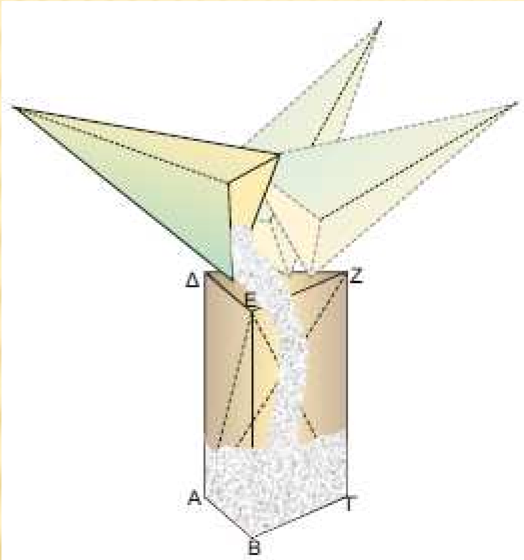
άρα

$E_Π$ = $\frac{1}{2}$ Περίμετρος βάσης • απόστημα

Όγκος πυραμίδας

Όγκος πυραμίδας *(video)*

Τι παρατηρήσατε στο video;



Ένα πρίσμα και μια πυραμίδα έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Αν γεμίσουμε διαδοχικά τρεις φορές με νερό την πυραμίδα και αδειάσουμε το νερό μέσα στο πρίσμα, θα δούμε ότι το πρίσμα γεμίζει τελείως,

Επομένως, ο όγκος της πυραμίδας ισούται με το 1/3 του όγκου του πρίσματος.

$$V = \frac{1}{3} \text{ Εμβαδό βάσης} \bullet \text{ ύψος}$$

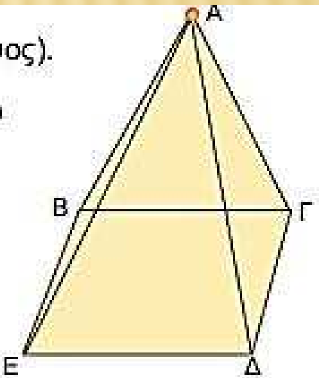
Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση με πλευρά 8 cm και ύψος 12 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

Ο όγκος της πυραμίδας είναι: $V = \frac{1}{3} \cdot$ (εμβαδόν βάσης) $\cdot$ (ύψος).

Αφού η πυραμίδα είναι κανονική, η βάση της είναι τετράγωνο πλευράς 8 cm, οπότε το εμβαδόν της βάσης είναι:

$E_\beta = 8^2 = 64$ (cm²).

Επομένως, $V = \frac{1}{3} \cdot E_\beta \cdot υ = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 12 = 256$ (cm³).



Ερωτήσεις κατανόησης

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών (Σ / Λ)
2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο (Σ / Λ)
3. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια (Σ / Λ)
4. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι (να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση):

   Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$.

5. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα (να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση):

   Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 222) 2,5,6,9

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Η τετραγωνική πυραμίδα και το τετράεδρο έχουν το ίδιο πλήθος εδρών (Σ / Λ)
2. Κάθε κανονική τριγωνική πυραμίδα είναι κανονικό τετράεδρο (Σ / Λ)
3. Σε μια πυραμίδα το ύψος βρίσκεται πάνω στην παράπλευρη επιφάνεια (Σ / Λ)
4. Ο λόγος των όγκων μιας πυραμίδας και ενός πρίσματος με ίδια βάση και ίσα ύψη είναι (να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση):

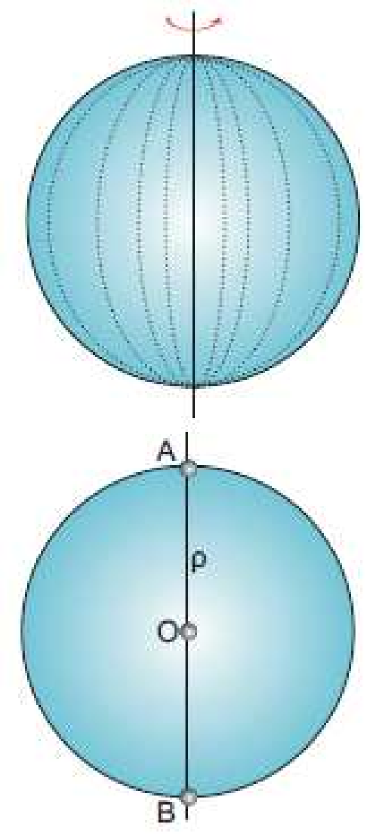
   Α: $\frac{1}{2}$ Β: 2 Γ: $\frac{1}{3}$ Δ: $\frac{1}{4}$.

5. Οι παράπλευρες έδρες μιας κανονικής πυραμίδας είναι τρίγωνα (να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση):

   Α: Ισόπλευρα Β: Ισοσκελή Γ: Ορθογώνια Δ: Σκαληνά

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 222) 2,5,6,9

Η σφαίρα και τα στοιχεία της



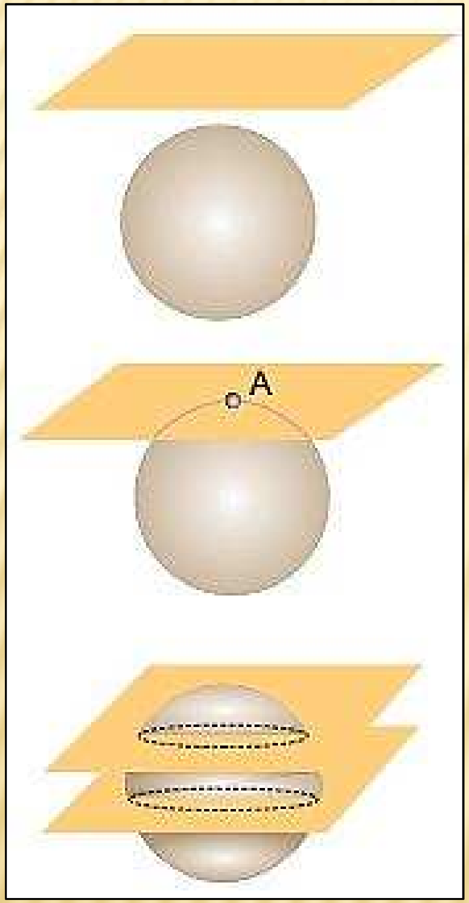
Σφαίρα λέγεται το στερεό σώμα που παράγεται, αν περιστρέψουμε ένα κυκλικό δίσκο (Ο, ρ) γύρω από μία διάμετρό του.

Κατά την περιστροφή ο κύκλος δημιουργεί την **επιφάνεια** της σφαίρας.

Η απόσταση ενός οποιουδήποτε σημείου της επιφάνειας μιας σφαίρας από το κέντρο Ο είναι ίση με την ακτίνα ρ.

Το σημείο **Ο** λέγεται **κέντρο της σφαίρας** και η ακτίνα **ρ** του κύκλου λέγεται **ακτίνα της σφαίρας**.

Σχετικές θέσεις επιπέδου και σφαίρας



Μία σφαίρα και ένα επίπεδο στο χώρο έχουν τη δυνατότητα να τοποθετηθούν κατά τρεις διαφορετικούς τρόπους, όπως φαίνεται στα διπλανά σχήματα:

α) Να μην τέμνονται μεταξύ τους

β) Να εφάπτονται σε ένα σημείο

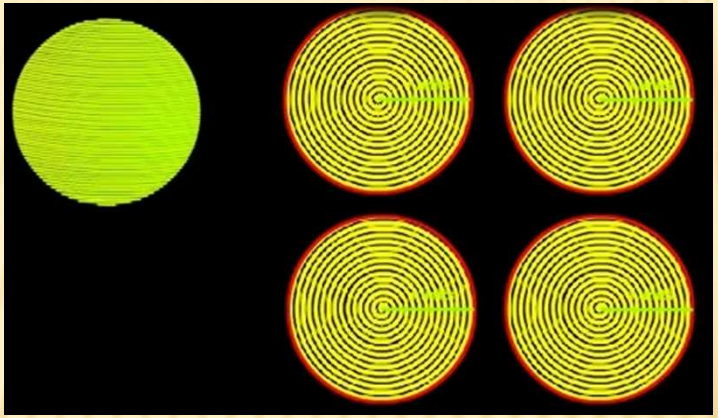
γ) Να τέμνονται σε κύκλο

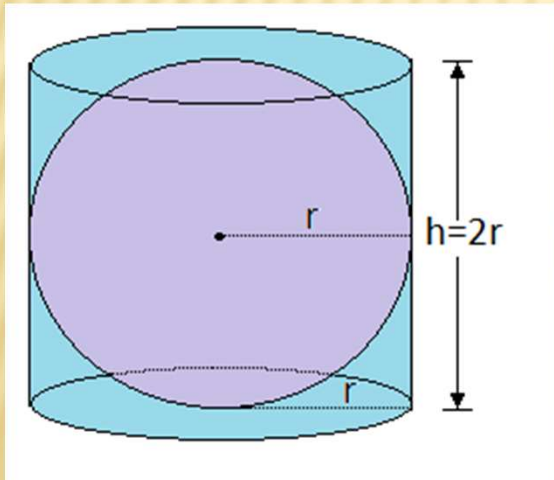
Παρατηρούμε ότι ο κύκλος που αποτελεί την τομή του επιπέδου με τη σφαίρα, «μεγαλώνει» όσο το επίπεδο «πλησιάζει» στο κέντρο της σφαίρας. Όταν το κέντρο της σφαίρας ανήκει στο επίπεδο, τότε ο κύκλος στον οποίο τέμνονται ονομάζεται **μέγιστος κύκλος της σφαίρας**.

Εμβαδό επιφάνειας σφαίρας

Εμβαδό επιφάνειας σφαίρας *(video)*

Τι παρατηρήσατε στο video;





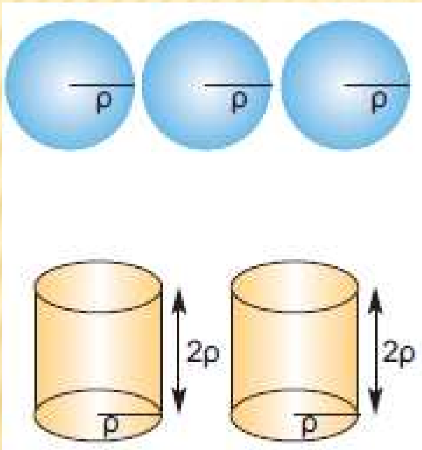
Ο Αρχιμήδης απέδειξε ότι, αν μια σφαίρα «εγγράφεται» σε κύλινδρο (η διάμετρος της σφαίρας είναι ίση με το ύψος του κυλίνδρου), όπως φαίνεται στο σχήμα, τότε **η επιφάνεια της σφαίρας είναι ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου**.

Επομένως: $E_{σφ} = 2πρ \cdot υ = 2πρ \cdot 2ρ$ ή $\boxed{E_{σφ} = 4πρ^2}$

Όγκος σφαίρας

Όγκος σφαίρας *(video)*

Τι παρατηρήσατε στο video;



Ας κατασκευάσουμε μια σφαίρα ακτίνας ρ και δύο κυλίνδρους με βάση κύκλο ακτίνας ρ και ύψος υ = 2ρ. Γεμίζουμε διαδοχικά με νερό τρεις φορές τη σφαίρα και αδειάζουμε το νερό στους δύο κυλίνδρους. Τελειώνοντας βλέπουμε ότι οι δύο κύλινδροι είναι τελείως γεμάτοι. Επομένως, ο τριπλάσιος όγκος σφαίρας ακτίνας ρ ισούται με τον διπλάσιο όγκο κυλίνδρου με ακτίνα βάσης ρ και ύψος υ = 2ρ:

$$3V_{σφ} = 2V_κ \quad ή \quad V_{σφ} = \frac{2}{3}V_κ = \frac{2}{3}πρ^2 \cdot (2ρ) \quad ή$$

$$\boxed{V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3}$$

Εφαρμογές

Η επιφάνεια μιας σφαίρας είναι 144π m^2. Να βρείτε τον όγκο της.

Γνωρίζουμε ότι: $E_{σφ} = 4πρ^2$, οπότε $144π = 4πρ^2$ ή $36 = ρ^2$ ή $ρ = 6$ (m).

Από τον τύπο υπολογισμού του όγκου της σφαίρας έχουμε:

$V_{σφ} = \frac{4}{3}πρ^3 = \frac{4}{3}π \cdot 6^3 = 904{,}32$ (m^3).

Να βρείτε πόσα χρήματα θα χρειαστούμε, για να βάψουμε μία σφαιρική δεξαμενή διαμέτρου δ = 20 m, αν το ένα κιλό χρώμα κοστίζει 8 € και καλύπτει επιφάνεια 4 m^2.

Το εμβαδόν της επιφάνειας της σφαίρας είναι $E_{σφ} = 4πρ^2 = 4π \cdot 10^2 = 1256$ (m^2).

Αφού κάθε κιλό χρώμα καλύπτει 4 m^2, για να καλυφθεί η επιφάνεια των 1256 m^2 της σφαίρας χρειάζονται $\frac{1256}{4} = 314$ κιλά χρώμα που κοστίζουν συνολικά $314 \cdot 8 = 2512$ €.

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε μια σφαίρα ακτίνας 3 cm το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό (Σ / Λ)
2. Το εμβαδό της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το γινόμενο του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της με τη διάμετρο αυτής (Σ / Λ)
3. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:
   Α: Διπλασιάζεται   Β: Τριπλασιάζεται   Γ: Τετραπλασιάζεται   Δ: Οκταπλασιάζεται.
4. Το εμβαδό της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας ρ και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα έχουν λόγο:
   Α: 1   Β:1/2   Γ:1/3   Δ: 4
5. Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι:
   Α: διπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Β: τριπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Γ: τετραπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Δ: ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 232) 5,8,9

Ερωτήσεις κατανόησης

1. Σε μια σφαίρα ακτίνας 3 cm το εμβαδόν της επιφάνειας και ο όγκος της εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό (Σ / Λ)
2. Το εμβαδό της επιφάνειας μιας σφαίρας ισούται με το γινόμενο του μήκους ενός μέγιστου κύκλου της με τη διάμετρο αυτής (Σ / Λ)
3. Αν διπλασιάσουμε την ακτίνα μιας σφαίρας, τότε ο όγκος της:
   Α: Διπλασιάζεται Β: Τριπλασιάζεται Γ: Τετραπλασιάζεται Δ: Οκταπλασιάζεται.
4. Το εμβαδό της επιφάνειας μιας σφαίρας ακτίνας ρ και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου με την ίδια ακτίνα έχουν λόγο:
   Α: 1 Β:1/2 Γ:1/3 Δ: 4
5. Όταν μία σφαίρα ακτίνας ρ «εγγράφεται» σε κύλινδρο, τότε η επιφάνεια της σφαίρας είναι:
   Α: διπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Β: τριπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Γ: τετραπλάσια της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου
   Δ: ίση με την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου

Ασκήσεις για το σπίτι: (σελ. 232) 5,8,9