Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Α΄, Κεφάλαιο 2, Πραγματικοί αριθμοί

Α. 2.1. Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

~

39. Σύμφωνα με τα Guinness World Records, κάποιος αρτοποιός στην Γερμανία με την βοήθεια ομάδας εθελοντών έφτιαξε το μεγαλύτερο τοστ στον κόσμο με τετράγωνο ψωμί, το οποίο είχε εμβαδό επιφάνειας 289 m^2.

Ποιο θα πρέπει να είναι το μήκος x κάθε πλευράς του τετράγωνου ψωμιού;

....

....

....

....

....

....

....

40. Να γράψετε τι σχέση έχει η τιμή που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα με το εμβαδό. Πώς ονομάζεται και πώς συμβολίζεται αυτή η τιμή σε σχέση με το εμβαδό;

....

....

....

....

41. Να βρείτε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{25}$ ....

β) $\sqrt{49}$ ....

γ) $\sqrt{64}$ ....

δ) $\sqrt{121}$ ....

42. Να βρείτε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ ....

β) $\sqrt{0,64}$ ....

γ) $\sqrt{17,64}$ ....

δ) $\sqrt{\dfrac{16}{25}}$ ....

Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού α, λέγεται ο θετικός αριθμός, ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$.

Επειδή, $0^2 = 0$, ορίζουμε ως $\sqrt{0} = 0$.

Στον ορισμό υπάρχουν δύο απαιτήσεις:
i) το υπόρριζο είναι μη αρνητική ποσότητα δηλ. $\alpha \geq 0$
ii) το αποτέλεσμα της ρίζας είναι μη αρνητική ποσότητα δηλαδή $\sqrt{\alpha} \geq 0$.

Για να βρούμε αυτούς τους αριθμούς, χρειάζεται να βρούμε ένα θετικό αριθμό του οποίου το τετράγωνο να ισούται με 25.

Δεν ορίζεται ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνό του να είναι αρνητικός. Για παράδειγμα η $\sqrt{-25}$ δεν έχει νόημα, γιατί κανένας αριθμός, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δε δίνει αποτέλεσμα -25.

Αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$, τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$.

Αν $\alpha \geq 0$, τότε $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2 = \alpha$

Αν $x^2 = \alpha$ τότε $x = +\sqrt{\alpha}$ ή $x = -\sqrt{\alpha}$

43. Να εξηγήσετε γιατί είναι λάθος να γράψετε:

α) $\sqrt{64} = -8$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………

β) $\sqrt{(-8)^2} = -8$ ……………………………………………………………

……………………………………………………………

44. Να εξετάσετε αν είναι σωστό να γράψουμε ότι $\sqrt{(-5)^2}$.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

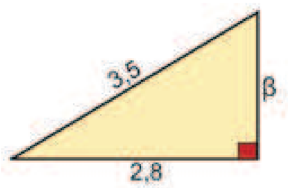
45. Να υπολογίσετε τις ακόλουθες τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{16} =$ ……………………………………………………………

β) $\sqrt{0,16} =$ ……………………………………………………………

γ) $\sqrt{0,0016} =$ ……………………………………………………………

46. Να υπολογίσετε την άγνωστη πλευρά του ορθογωνίου τριγώνου του διπλανού σχήματος.



……………………………………………………………

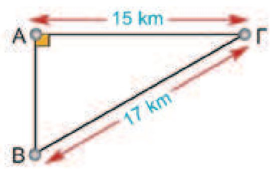
……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

47. Πόσο απέχει η πόλη Α από την πόλη Β;



……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

48. Να λύσετε την εξίσωση $x^2 = 16$.

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

……………………………………………………………

Για α ≥ 0 και β ≥ 0, ισχύει:
$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ = ...

Για α ≥ 0 και β > 0, ισχύει:
$\sqrt{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ = ...

49. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36}$ = ...

β) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$ = ...

γ) $\sqrt{4\cdot 9}$ = ...

δ) $\sqrt{2025}$ = ...

ε) $\sqrt{225}\cdot\sqrt{9}$ = ...

στ) $\sqrt{225\cdot 9}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

50. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{\dfrac{2025}{25}}$ = ...

β) $\dfrac{\sqrt{2025}}{\sqrt{25}}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

51. Να υπολογίσετε τους αριθμούς:

α) $\sqrt{36}+\sqrt{64}$ = ...

β) $\sqrt{36+64}$ = ...

Τι παρατηρείτε;

....

....

....

52. Να εξετάσετε πότε ισχύει $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha+\beta}$ **.**

....

....

....

....

....

53. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{4}}}-\sqrt{21-\sqrt{22+\sqrt{9}}}=$

....

....

....

....

....

β) $\sqrt{\sqrt{16}+\sqrt{144}}-\sqrt{\sqrt{81}}=$

....

....

....

....

....

Α. 2.2. Άρρητοι αριθμοί-Πραγματικοί αριθμοί

~

Οι Πυθαγόρειοι απέδειξαν ότι δεν υπάρχει ρητός $\frac{\mu}{\nu}$ τέτοιος ώστε $x = \frac{\mu}{\nu}$.

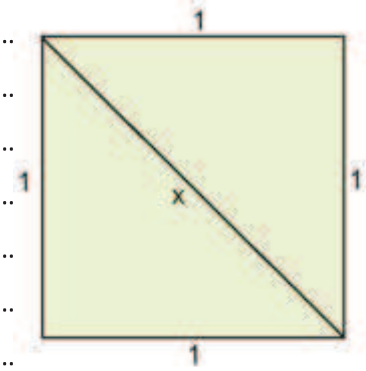
Ο x δε μπορεί να είναι ούτε δεκαδικός ούτε περιοδικός δεκαδικός.
Γενικά:

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός.**

Τις τετραγωνικές ρίζες μπορείτε να τις προσεγγίσε-τε με τη βοήθεια ενός υπολογιστή τσέπης ως εξής:
Για να προσεγγίσετε τον αριθμό $\sqrt{2}$, πατάτε διαδοχικ 2 πλήκτρα και και √,
οπότε στην οθόνη βλέπετε τον αριθμό 1,414213 που είναι μια προσέγγιση του $\sqrt{2}$, με έξι δεκαδικά ψηφία.

Παλαιότερα, για τον υπολογισμό των ριζών χρησιμοποιούσαν ειδικούς πίνακες.

54. Δίνεται το τετράγωνο που φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε την διαγώνιο του τετραγώνου.



55. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp10.ggb για να διερευνήσετε τον τρόπο υπολογισμού του x. Καταγράψτε τα βήματα.

56. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp11.ggb για τον τρόπο κατασκευής της τετραγωνικής ρίζας αριθμού. Καταγράψτε τα βήματα που απαιτούνται για να κατασκευαστεί η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού.

Πραγματικοί αριθμοί

Οι φυσικοί αριθμοί είναι οι 0, 1, 2, 3, …

Οι ακέραιοι αριθμοί είναι οι … -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 …

Οι ρητοί αριθμοί είναι οι αριθμοί που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός. Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους.

Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας.

Η ευθεία αυτή την ονομάζεται **ευθεία ή άξονας των πραγματικών αριθμών**.

57. Δίνονται οι ακόλουθες ευθείες αριθμών. Να αντιστοιχίσετε την ευθεία με το σύνολο των αριθμών που αναπαριστά.

Ευθεία αριθμών	Σύνολο
(i) 	**(α)** των ρητών αριθμών
(ii) 	**(β)** των φυσικών αριθμών
(iii) 	**(γ)** των πραγματικών αριθμών
(iv) 	**(δ)** των ακεραίων αριθμών

58. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των φυσικών αριθμών και της ευθείας των ακέραιων αριθμών;

………

………

59. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των ακέραιων αριθμών και της ευθείας των ρητών αριθμών;

………

………

60. Ποια διαφορά υπάρχει μεταξύ της ευθείας των ρητών αριθμών και του άξονα των πραγματικών αριθμών;

………

………

61. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{13}$ έως και τρία δεκαδικά ψηφία.

………

………

………

………

………

Γράφετε όλους τους αριθμούς σε δεκαδική μορφή χρησιμοποιώντας τις ρητές προσεγγίσεις δύο ψηφίων για τους άρρητους.

62. Να τοποθετήσετε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς:

$-4, \quad -2{,}38, \quad \frac{4}{9}, \quad -\sqrt{13}, \quad 4{,}13, \quad 3{,}6, \quad \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad 1, \quad 2.$

63. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά τον άρρητο αριθμό $\sqrt{2}$. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp12.ggb.

Κάθε ρητός αριθμός μπορεί να έχει τη μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού αριθμού.
Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, ονομάζεται **άρρητος αριθμός.**

64. Ερωτήματα

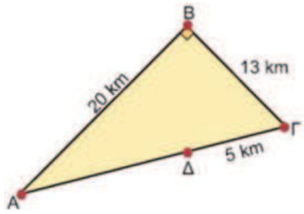
α) Ποιος είναι ο μικρότερος θετικός πραγματικός;
β) Ποιος είναι ο «επόμενος» πραγματικός του 1;
γ) Μπορείτε πάντα να βρείτε έναν ρητό/άρρητο ανάμεσα σε δύο άλλους;
δ) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το 1,33333333... ή το 1,34;
ε) Βρείτε μερικούς αριθμούς μεταξύ του 1,33333... και του 1,34.
στ) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το 3,99999999... ή το 4;
ζ) Καταγράψτε μερικούς άρρητους αριθμούς.

Α. 2.3. Προβλήματα

∼

65. Πρόβλημα 1. Κατά τη μετακίνηση από την πόλη Α στην πόλη Β, μετά στο χωριό Γ και από το χωριό Γ στο χωριό Δ, ο μετρητής του αυτοκινήτου κατέγραψε τις αποστάσεις ΑΒ = 20 km, ΒΓ = 13 km και ΓΔ = 5 km.

Ποια είναι η απόσταση από το χωριό Δ στην πόλη Α;



....

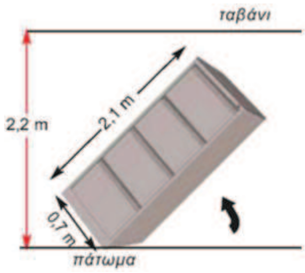
....

....

....

....

66. Πρόβλημα 2. Μπορείτε να σηκώσετε όρθιο το ντουλάπι του σχήματος; Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp13.ggb.



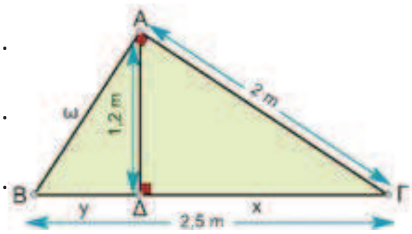
....

....

....

....

67. Πρόβλημα 3. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο να υπολογίσετε τα μήκη x, y και ω.



....

....

....

....

68. Πρόβλημα 4. Η διαγώνιος της οθόνης της τηλεόρασης είναι 30 ίντσες και οι διαστάσεις της x, y έχουν λόγο $\frac{x}{y}=\frac{\sqrt{7}}{4}$. Να βρείτε τις διαστάσεις της τηλεόρασης.

....

....

....

....

....

....

Ασκήσεις προς λύση
Τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού

1.39. Αν x > 0, να βρείτε ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι σωστές.

α) $\sqrt{x^2}=x$

β) $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$

γ) $\sqrt{(-x)^2}=-x$

δ) $\sqrt{(-x)^2}=|-x|$

1.40. Να υπολογίσετε τις τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{36}$, $\sqrt{1,21}$, $\sqrt{4900}$

β) $\sqrt{\frac{1}{25}}$, $\sqrt{\frac{4}{81}}$, $\sqrt{225}$

γ) $\sqrt{\frac{196}{100}}$, $\sqrt{\frac{529}{676}}$, $\sqrt{144}$

δ) $\sqrt{\frac{0,09}{0,16}}$, $\sqrt{\frac{1,69}{2,89}}$, $\sqrt{\frac{0,004}{0,225}}$

1.41. Αν είναι α < 0, ποιες από τις παρακάτω ισότητες είναι σωστές και γιατί;

α) $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$

β) $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$

γ) $\sqrt{\alpha^2}=-\alpha$

δ) $\left(\sqrt{\alpha}\right)^2=\alpha$

1.42. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $\sqrt{14^2}$

β) $\sqrt{(-10)^2}$

γ) $\sqrt{27\cdot 27}$

δ) $\sqrt{(-4)^2}+\sqrt{(-5)^2}$

ε) $\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{2^2}$

1.43. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

x	y	$\sqrt{x}$	$\sqrt{y}$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$	$\sqrt{x\cdot y}$	$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$	$\sqrt{\frac{x}{y}}$	$\sqrt{x}+\sqrt{y}$	$\sqrt{x+y}$
25	4								
9	49								
10	36								

α) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}$ και $\sqrt{x\cdot y}$. Τι παρατηρείτε;

β) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{\frac{x}{y}}$ και $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. Τι παρατηρείτε;

γ) Να συγκρίνετε τα αποτελέσματα των στηλών $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ και $\sqrt{x+y}$. Τι παρατηρείτε;
Να γενικεύσετε τα συμπεράσματά σας.

1.44. Να απλοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $7\sqrt{11}-\sqrt{5}-2\sqrt{11}+4\sqrt{5}$

β) $\sqrt{7}\left(2\sqrt{7}-1\right)$

γ) $\left(\sqrt{2}-3\right)\left(1-2\sqrt{2}\right)$

δ) $\left(4-\sqrt{3}\right)\left(4+\sqrt{3}\right)$

1.45. Να υπολογίσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $2\sqrt{63}-3\sqrt{2}-\sqrt{28}+\sqrt{18}$

β) $\dfrac{3\sqrt{8}-2\sqrt{18}-5\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

γ) $\dfrac{2\sqrt{3}-3\sqrt{12}+\sqrt{27}}{\sqrt{75}-4\sqrt{3}}$

1.46. Να αποδείξετε ότι:

α) $\left|\sqrt{63}-\sqrt{28}\right|-\left|1-\sqrt{7}\right|-1=0$

β) $\sqrt{32}-5\sqrt{18}+7\sqrt{8}-2\sqrt{50}=-7\sqrt{2}$

γ) $5\sqrt{7}-\dfrac{6}{5}\sqrt{175}-\dfrac{7}{2}\sqrt{28}+\dfrac{8}{3}\sqrt{63}=0$

δ) $2\left|\sqrt{18}+\sqrt{9}\right|-\left|\sqrt{8}-\sqrt{16}\right|-2=8\sqrt{2}$

1.47. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{9}}}}$

β) $\sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{9}}}$

γ) $\sqrt{13-\sqrt{21-\sqrt{29-\sqrt{16}}}}$

δ) $\sqrt{2+\sqrt{45+\sqrt{22-\sqrt{36}}}}$

1.48. Αν $-2\le x\le 2$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $A=\sqrt{(x+2)^2}+\sqrt{(2-x)^2}$

β) $B=\sqrt{(x-4)^2}-\sqrt{(3-x)^2}$

1.49. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt{16x^2y^4}$ αν x, y > 0

β) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$ αν x, y, z > 0

γ) $\sqrt{16x^2y^4}$

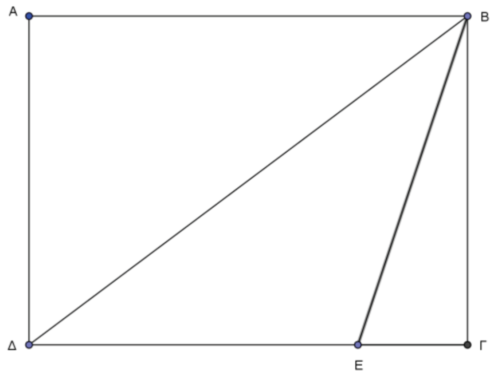
δ) $\sqrt{49x^8y^2z^6}$

1.50. **α)** Αν x = 9,να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $x, x^2, \sqrt{x}$.

β) Αν $x=\dfrac{1}{4}$ να τοποθετήσετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς $x, x^2, \sqrt{x}$.

γ) Ποιο είναι το συμπέρασμα από τα αποτελέσματα των παραπάνω περιπτώσεων;

1.51. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 8,ΒΔ = 10 και σημείο Ε στην ΓΔ ώστε ΕΓ = 2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΔ.



1.52. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με μικρή βάση ΑΒ = 10, μη παράλληλες πλευρές ΒΓ = ΑΔ = 5 και ύψος 3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

1.53. Ένα τρίγωνο έχει πλευρές με μήκη x - 2, x, x + 2. Αν το x ικανοποιεί τη σχέση $(x-1)(x+3)=x^2+13$

α) Να υπολογίσετε το x.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

1.54. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\sqrt{4-\sqrt{11-\sqrt{4}}}$, $\beta=\sqrt{-3+\sqrt{54-\sqrt{25}}}$, $\gamma=\sqrt{\sqrt{\sqrt{81}}}$.

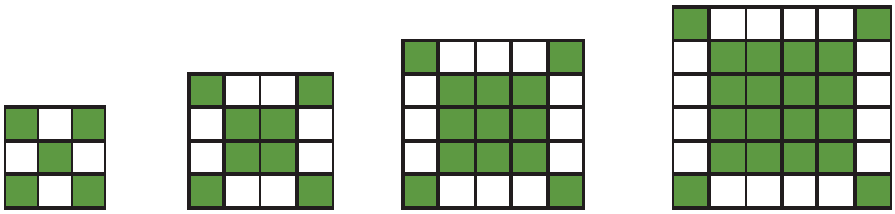
α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β, γ.

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές τους αριθμούς α, β, γ είναι ορθογώνιο.

γ) Να φέρετε το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και να το υπολογίσετε.

1.55. Να υπολογίσετε την τιμή του α, όπου α > 8, έτσι ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα: $\sqrt{\alpha-\sqrt{74-\sqrt{85+\sqrt{225}}}}=5$

1.56. Να βρείτε τον αριθμό των σκιασμένων τετραγώνων σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα του μοτίβου:



Ποιο σχήμα θα έχει 200 σκιασμένα τετράγωνα;

1.57. Για να εκτιμήσει η αστυνομία την ταχύτητα (km/h) ενός τύπου οχήματος τη στιγμή που πατά τα φρένα ο οδηγός, χρησιμοποιεί τον τύπο $u=9\sqrt{\frac{d}{0,16}}$,όπου d το μήκος(m) του αποτυπώματος των λαστίχων στην άσφαλτο.

α) Να εκτιμήσετε την ταχύτητα ενός αυτοκινήτου του οποίου τα λάστιχα άφησαν αποτυπώματα μήκους: 4 m, 12 m, 16 m.

β) Ένας αστυνομικός για να υπολογίζει πιο γρήγορα την ταχύτητα έχει μετασχηματίσει τον τύπο ως εξής: $u=\frac{9\sqrt{d}}{0,4}$. Να εξετάσετε την ορθότητα του συλλογισμού του.

Άρρητοι αριθμοί – Πραγματικοί αριθμοί

1.58. Να βρείτε το σημείο της ευθείας των πραγματικών αριθμών που παριστάνει τον αριθμό $\sqrt{34}$.

1.59. Να βρείτε τις ρητές προσεγγίσεις ως και δύο δεκαδικά ψηφία των αριθμών:
α) $\sqrt{6}$
β) $\sqrt{13}$

1.60. Να τοποθετήσετε σε μια σειρά από το μικρότερο στον μεγαλύτερο τους παρακάτω αριθμούς:
α) $\sqrt{8}, 1, \sqrt{3}, \sqrt{10}$
β) $\sqrt{11}, 6, \sqrt{17}, \sqrt{21}, 10$
γ) $1+\sqrt{3}, 3, \sqrt{3}, \sqrt{3}-1, 2+\sqrt{3}$
δ) $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{5}$
ε) $\sqrt{5}, \sqrt{2+\sqrt{5}}$

1.61. Να λύσετε τις εξισώσεις:
α) $x^2 = 6$
β) $x^2 = -2$
γ) $x^2 = 1$
δ) $x^2 = 11$

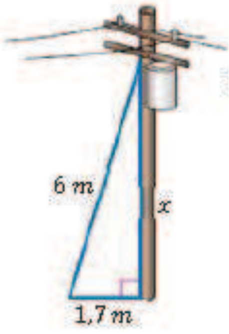
1.62. Να βρείτε δύο αριθμούς x και y,έτσι ώστε να ισχύει: $5 < \sqrt{x} < \sqrt{y} < 6$.

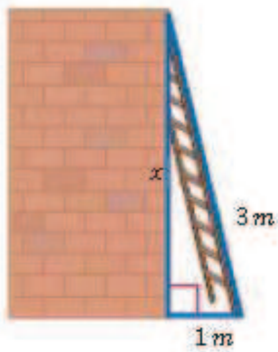
1.63. Να εξετάσετε σε ποια σύνολα αριθμών ανήκει καθένας από τους παρακάτω αριθμούς συμπληρώνοντας τις κατάλληλες στήλες:

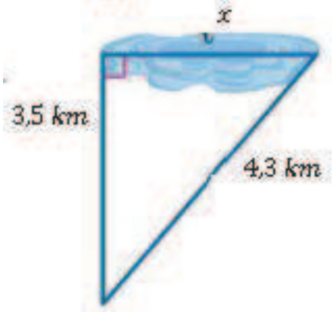
Αριθμός	Φυσικός	Ακέραιος	Ρητός	Άρρητος	Πραγματικός
15					
$\frac{2}{5}$					
$-\sqrt{5}$					
$\sqrt{100}$					
$4,\overline{15}$					
0,7777					
π					
-12					

Προβλήματα στους άρρητους αριθμούς

1.64. Να υπολογίσετε το μήκος x στις παρακάτω περιπτώσεις (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου):

α)


β)


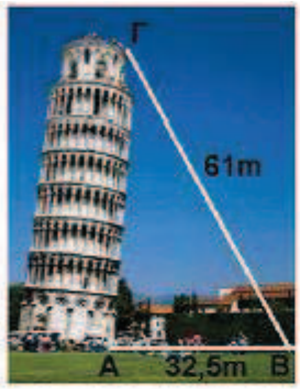
γ)


1.65. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$). Αν ΑΒ = 12 cm, ΒΓ = 15 cm,να υπολογίσετε:
α) το εμβαδόν του τριγώνου.
β) το μήκος του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

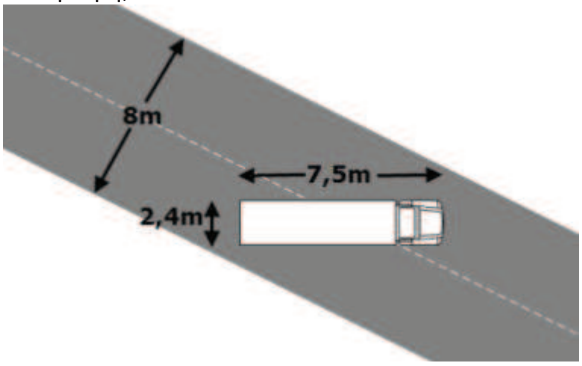
1.66. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με εμβαδό 400 cm^2. Το ύψος ΑΔ του τριγώνου είναι 25 cm και το τμήμα ΓΔ είναι 15 cm. Να υπολογίσετε:
α) το τμήμα ΒΔ
β) την πλευρά του ΑΒ
γ) το ύψος του ΓΜ.

1.67. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 6 cm.Να υπολογίσετε:
α) το ύψος ΑΔ του τριγώνου.
β) το εμβαδόν του τριγώνου.
γ) το ύψος ΓΖ.

1.68. Να αποδείξετε ότι ο πύργος της Πίζας που έχει ύψος 55 m,δεν είναι τοποθετημένος σε όρθια θέση (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).

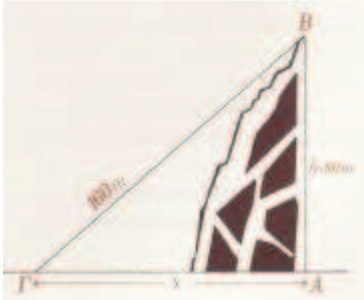


1.69. Οι μπάρες που είναι τοποθετημένες στις δύο άκρες του δρόμου απέχουν μεταξύ τους 8 m.Ένα φορτηγό έχει περίγραμμα ορθογωνίου με μήκος 7,5 m και πλάτος 2,4 m.Είναι δυνατόν ο οδηγός του να εκτελέσει ελιγμούς, ώστε το φορτηγό να κάνει αναστροφή;



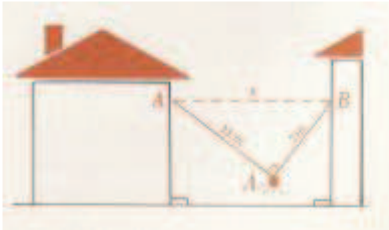
1.70. Στην παρακάτω φωτογραφία φαίνεται η γέφυρα που ενώνει το Ρίο με το Αντίρριο. Η γέφυρα στηρίζεται σε 5 πυλώνες. Από την κορυφή κάθε πυλώνα ξεκινούν καλώδια που καταλήγουν στο κατάστρωμα της γέφυρας. Αν το ύψος του πυλώνα ΑΒ είναι 100 m και το μεγάλο καλώδιο ΑΓ καταλήγει σε απόσταση 280 m από τη βάση του πυλώνα, να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ του καλωδίου (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο Κύπρου).

1.71. Ένας στρατιώτης των Ειδικών Δυνάμεων κατεβαίνει από ύψος h = 80 m πάνω στο τεντωμένο συρματόσχοινο. Το μήκος της διαδρομής είναι 160 m.

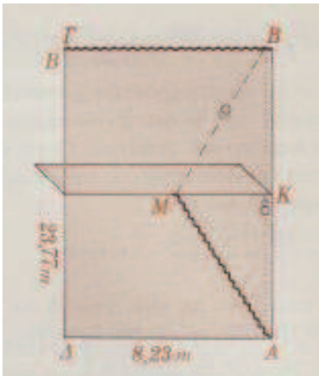


α) Να υπολογίσετε το μήκος ΑΓ.
β) Να βρείτε την κλίση του συρματόσχοινου.

1.72. Μια λάμπα κρέμεται με τη βοήθεια δύο συρματόσχοινων ΑΛ και ΒΛ αντίστοιχα 11 m και 7 m. Η γωνία που σχηματίζουν είναι $A\hat{\Lambda}B = 90^\circ$. Να υπολογίσετε το πλάτος του δρόμου x με προσέγγιση εκατοστού.



1.73. Το παρακάτω σχήμα απεικονίζει ένα γήπεδο τένις με διαστάσεις 8,23 m πλάτος και 23,77 m μήκος. Σε μια χρονική στιγμή οι παίκτες βρίσκονται στις θέσεις Μ και Γ.



α) Αν το μπαλάκι που έχει αποκρουσθεί από τον παίκτη του σημείου Μ κατευθύνεται προς το σημείο Β με ταχύτητα 20 m/s, με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Γ για να προλάβει να αποκρούσει το μπαλάκι στο σημείο Β;
β) Αν τελικά ο παίκτης του σημείου Γ κάνει την απόκρουση στο σημείο Β και το μπαλάκι κατευθύνεται προς το σημείο Α με την προηγούμενη ταχύτητα με ποια ελάχιστη ταχύτητα πρέπει να φύγει ο παίκτης του σημείου Μ προς το Α ώστε μόλις να αποκρούσει;

(Οι ασκήσεις 1.71, 1.72 και 1.73 προέρχονται από το βιβλίο: Αλεξίου, Κ.Τ., Αμπλιανίτου, Γ., Καββαδίας, Κ. (1990). *Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου*, Βιβλιοεκδοτική Αναστασάκη, Αθήνα.)

Παράρτημα