Β΄ Γυμνασίου, Μέρος Β΄, Κεφάλαιο 2, Τριγωνομετρία – Διανύσματα

Μέρος Β΄ Κεφάλαιο 2ο Τριγωνομετρία – Διανύσματα

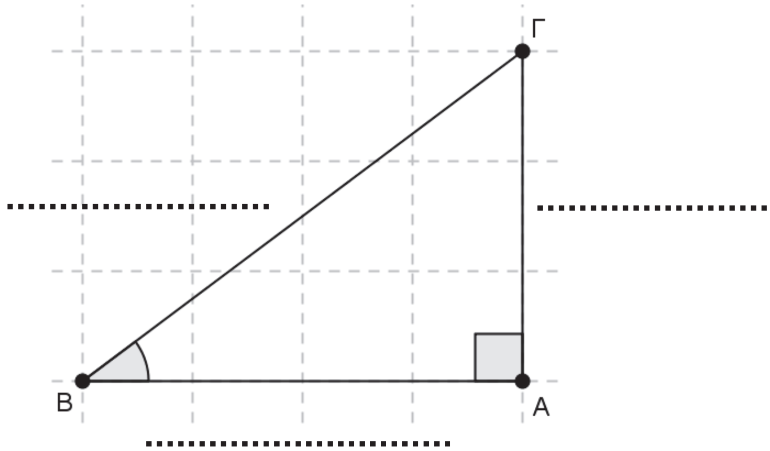
Β. 2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

~

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^{o}$) η κάθετη πλευρά ΑΓ, ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$ » και η ΑΓ «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$ ».

Κάθε πλευρά ενός τριγώνου μπορεί να αναφέρεται με το πεζό γράμμα της απέναντι γωνίας.
Έτσι, η πλευρά ΒΓ, μπορεί να αναφέρεται ως α, η πλευρά ΑΓ, μπορεί να αναφέρεται ως β και η πλευρά ΑΒ, μπορεί να αναφέρεται ως γ.
(Παρατηρήστε ότι το πεζό γράμμα είναι το γράμμα που δεν περιλαμβάνεται στον προσδιορισμό του ευθύγραμμου τμήματος)

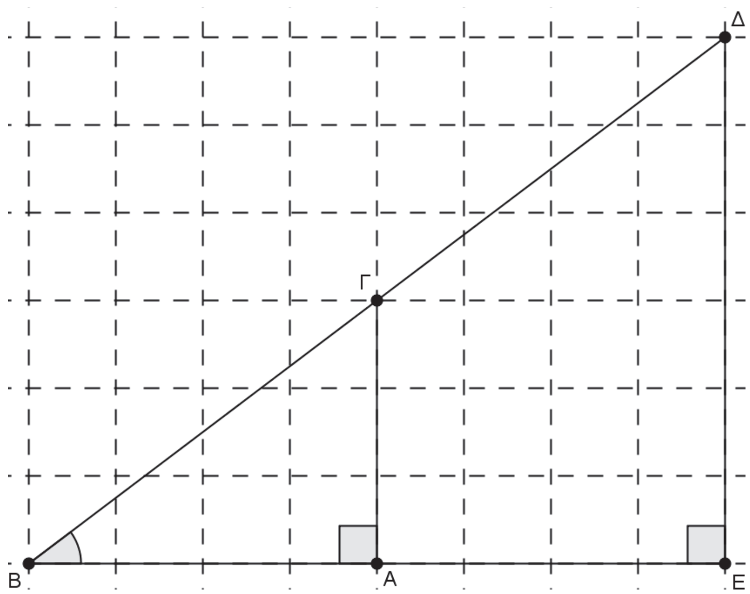
1. Δίνεται το ακόλουθο ορθογώνιο τρίγωνο. Να σημειώσετε στις διακεκομμένες γραμμές την υποτείνουσα, την απέναντι κάθετη πλευρά στη γωνία Β και την προσκείμενη κάθετη πλευρά στη γωνία Β.



2. Να μετρήσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας.

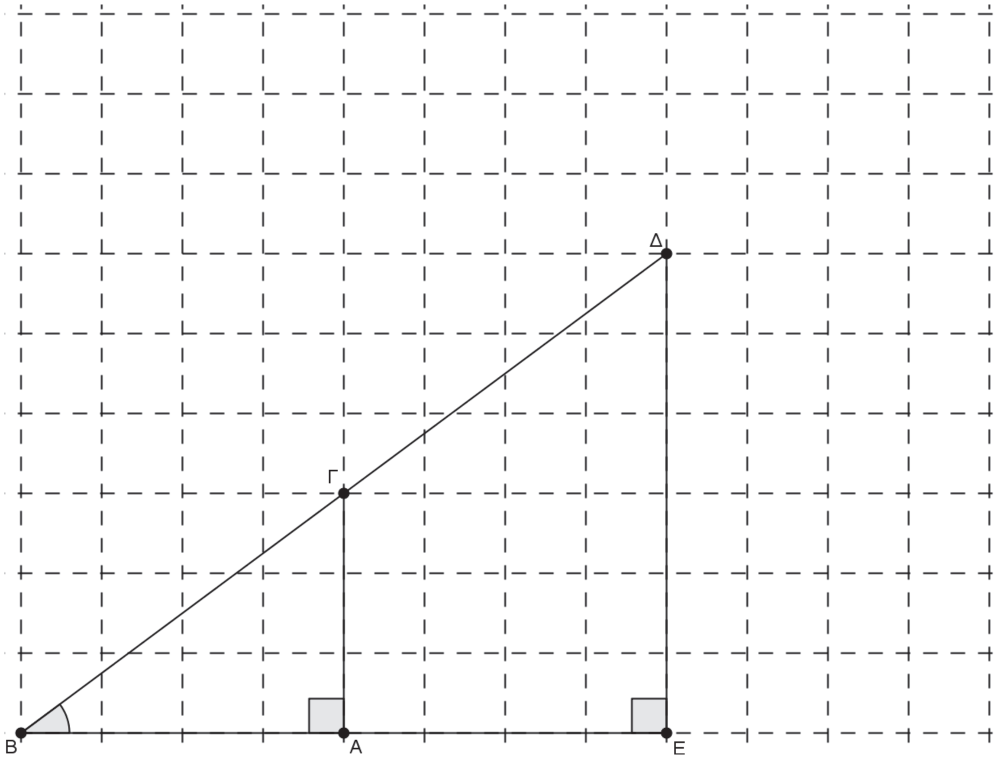
Τρίγωνο ΑΒΓ	ΑΒ ή γ	ΑΓ ή β	ΒΓ ή α

3. Να μετρήσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΕΒΔ γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm. Καταγράψτε στον παραπάνω πίνακα τις μετρήσεις σας.



Τρίγωνο ΕΒΔ	ΒΕ	ΔΕ	ΒΔ

4. Στο σχήμα που ακολουθεί να προεκτείνετε τις πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΔΕ προς το Ε και το Δ αντίστοιχα, ώστε να σχεδιάσετε ένα τρίτο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές Η και Θ (ονομάστε Θ την κορυφή της ορθής γωνίας).



5. Να μετρήσετε τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου ΘΒΗ που κατασκευάσατε γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm.

α) Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας καθώς και τους λόγους $\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$**,** $\frac{ΔΕ}{ΒΕ}$ **και** $\frac{ΗΘ}{ΒΘ}$**.**

Τρίγωνο ΑΒΓ	**ΑΒ**	**ΑΓ**	**ΒΓ**	$\frac{ΑΓ}{ΑΒ}$
	4	3	5	
Τρίγωνο ΕΒΔ	**ΒΕ**	**ΔΕ**	**ΒΔ**	$\frac{ΔΕ}{ΒΕ}$
	8	6	10	
Τρίγωνο ΘΒΗ	**ΒΘ**	**ΗΘ**	**ΒΗ**	$\frac{ΗΘ}{ΒΘ}$

β) Τι παρατηρείτε;

....

....

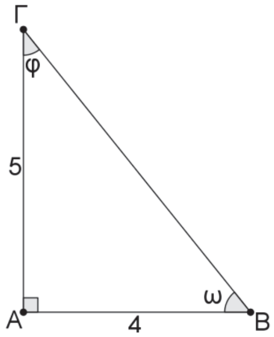
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά με την προσκείμενη κάθετη πλευρά μιας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **εφαπτομένη της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **εφω**.

$$εφω = \frac{απεναντι}{προσκειμενη}$$

όπου **απέναντι** προσδιορίζεται η απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας ω και όπου **προσκείμενη** προσδιορίζεται η προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω.

Η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ω είναι ένας «καθαρός» αριθμός, δηλαδή δεν υπάρχει κάποια μονάδα μέτρησης για αυτόν τον αριθμό.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ οι κάθετες πλευρές έχουν μήκος 5 και 4 cm αντίστοιχα. Να προσδιορίσετε:



α) Την απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας ω: ....

β) Την προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας ω: ....

γ) Την εφαπτομένη της γωνίας ω: ....

δ) Την απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας φ: ....

ε) Την προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας φ: ....

στ)Την εφαπτομένη της γωνίας φ: ....

7. Η πινακίδα πληροφορεί τον ποδηλάτη πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος. Εργαστείτε στο μικροπείραμα [mp1.ggb], με σκοπό να διερευνήσετε τα ερωτήματα. Τι παρατηρείτε;

Όταν αναφερόμαστε σε δρόμο, η εφαπτομένη της γωνίας ω ονομάζεται και **κλίση** του δρόμου.

Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100} = 0{,}1$ σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10 m.

....

....

....

....

....

....

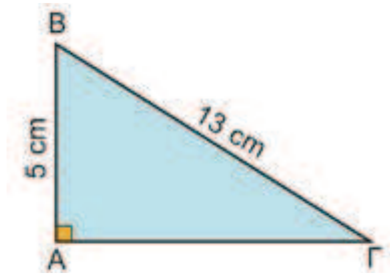
....

....

8. Να σχεδιάσετε μια γωνία ω, με $εφω = \frac{1}{5}$ **. Εργαστείτε και με ψηφιακά εργαλεία στο μικροπείραμα [mp2.ggb].**

Για τον υπολογισμό της εφαπτομένης μιας γωνίας, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 1° - 89°, που βρίσκεται στο τέλος του βιβλίου (σελ. 254).

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ = 13 cm. Αν η μία κάθετη πλευρά έχει μήκος ΑΒ = 5 cm, να υπολογίσετε τις εφαπτομένες των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



....

....

....

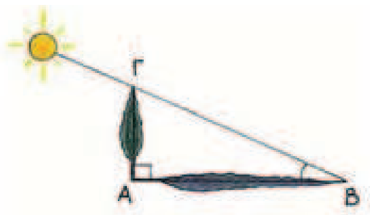
....

....

10. Εργαστείτε στο μικροπείραμα mp3.ggb.

α) Από τι εξαρτάται το μήκος της σκιάς ενός δέντρου;

β) Μπορούμε να υπολογίσουμε το ύψος ενός δέντρου χωρίς να πλησιάσουμε την κορυφή του;



....

....

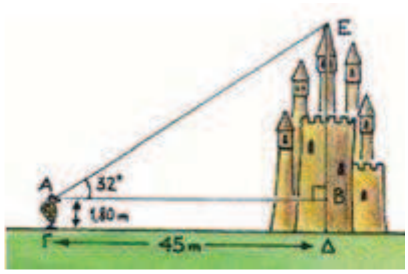
....

....

....

....

11. Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.



....

....

....

....

....

....

Β. 2.2. Ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **ημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **ημω**.

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απεναντι}}{\text{υποτεινουσα}}$$

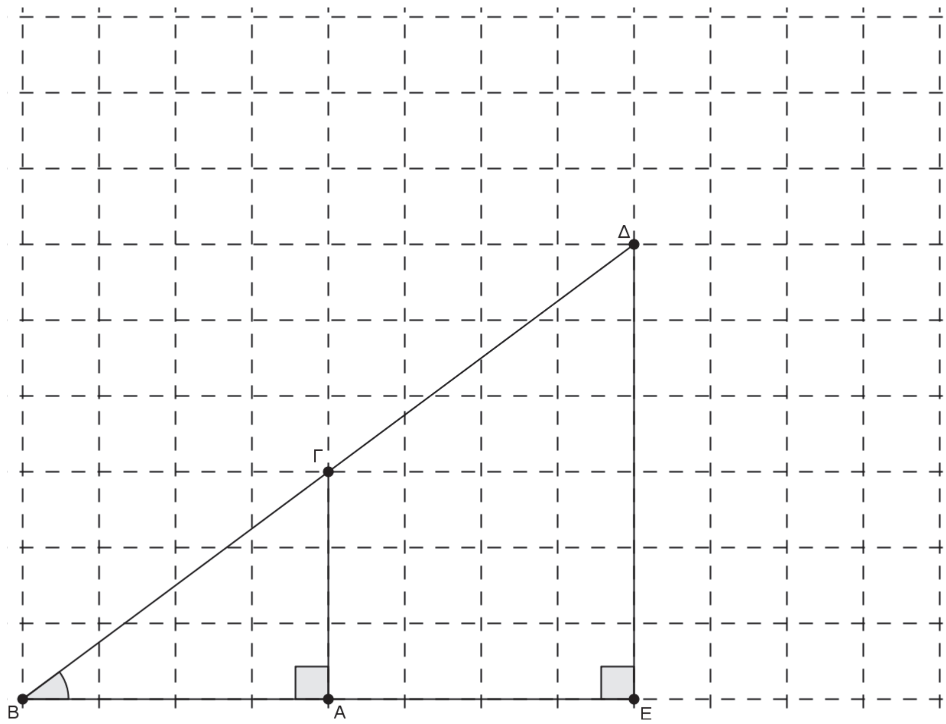
Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου δια την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός. Ονομάζεται **συνημίτονο της γωνίας ω** και συμβολίζεται με **συνω**.

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκειμενη}}{\text{υποτεινουσα}}$$

Το ημίτονο και το συνημίτονο μιας οξείας γωνίας ω είναι (όπως και η εφαπτομένη) «καθαροί» αριθμοί.

Το ημίτονο, το συνημίτονο και η εφαπτομένη μιας γωνίας ω ονομάζονται τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας ω.

12. Στο σχήμα που ακολουθεί να προεκτείνετε τις πλευρές ΒΕ και ΒΔ του τριγώνου ΒΔΕ προς το Ε και το Δ αντίστοιχα, ώστε να σχεδιάσετε ένα τρίτο ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές Η και Θ (ονομάστε Θ την κορυφή της ορθής γωνίας).



13. Να μετρήσετε τα μήκη των καθέτων πλευρών του τριγώνου ΘΒΗ που κατασκευάσατε γνωρίζοντας ότι κάθε τετραγωνάκι έχει πλευρά 1 cm.

α) Καταγράψτε στον πίνακα που ακολουθεί τις μετρήσεις σας, και στη συνέχεια τους λόγους των μηκών των πλευρών των τριγώνων.

Τρίγωνο ΑΒΓ	**ΑΒ**	**ΑΓ**	**ΒΓ**	$\frac{ΑΓ}{ΒΓ}$	$\frac{ΑΒ}{ΒΓ}$
	4	3	5		
Τρίγωνο ΕΒΔ	**ΒΕ**	**ΔΕ**	**ΒΔ**	$\frac{ΔΕ}{ΒΔ}$	$\frac{ΒΕ}{ΒΔ}$
	8	6	10		
Τρίγωνο ΘΒΗ	**ΒΘ**	**ΗΘ**	**ΒΗ**	$\frac{ΗΘ}{ΒΗ}$	$\frac{ΒΘ}{ΒΗ}$

β) Τι παρατηρείτε;

....

....

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις κάθετες πλευρές, οπότε οι λόγοι:

$$\frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{υποτεινουσα}}$$

και

$$\frac{\text{προσκειμενη καθετη}}{\text{υποτεινουσα}}$$

είναι μικρότεροι της μονάδας.

Επομένως ισχύουν οι ανισώσεις:

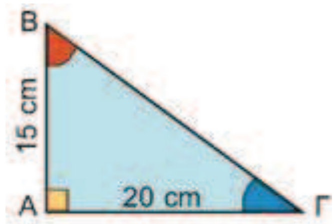
0 < ημω < 1

και

0 < συνω < 1

για οποιαδήποτε οξεία γωνία ω.

14. Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ = 15 cm και ΑΓ = 20 cm. Να υπολογίσετε τα ημίτονα και τα συνημίτονα των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Τι παρατηρείτε;



....

....

....

....

....

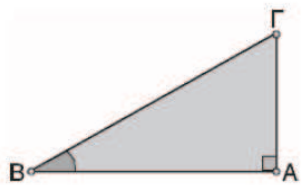
....

15. Να σχεδιάσετε μία οξεία γωνία ω, με $ημω = \frac{3}{5}$. Εργαστείτε και με ψηφιακά εργαλεία στο μικροπείραμα mp4.ggb.

16. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) έχουμε $ημB = \frac{4}{5}$ και ΒΓ = 10 cm.

α) Να βρείτε τις κάθετες πλευρές ΑΓ και ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.



....

....

....

....

....

....

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 25 cm, ΑΓ = 20 cm και ΒΓ = 15 cm.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε το ημΑ και το συνΑ.

γ) Να υπολογίσετε το ημΒ και το συνΒ.

....

....

....

....

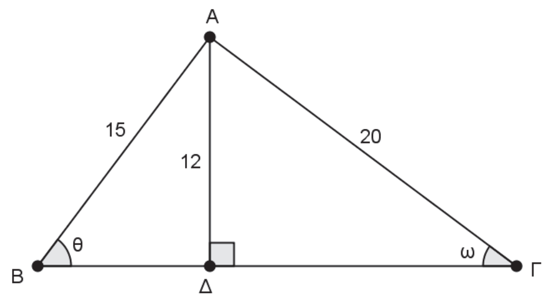
....

....

....

....

18. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ημθ και το συνω.



....

....

....

....

....

....

....

....

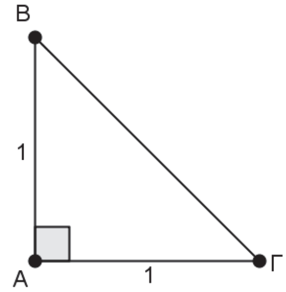
Β. 2.4. Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30°, 45° και 60°

~

19. Στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο του διπλανού σχήματος, οι κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ έχουν μήκος 1 m η κάθε μία.

α) Να προσδιορίσετε το μέτρο κάθε γωνίας του.

β) Να υπολογίσετε τον τριγωνομετρικό αριθμό των μη ορθών γωνιών.



....

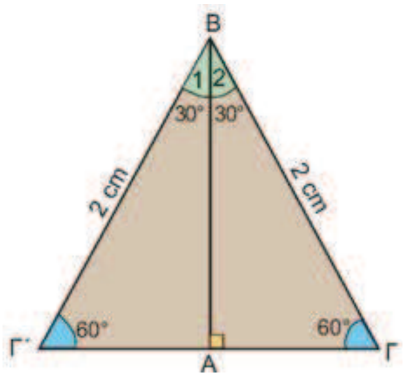
....

....

....

....

20. Ας θεωρήσουμε τώρα δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΒΓ΄ με κοινή πλευρά την ΑΒ, οξείες γωνίες $\hat{B}_1=\hat{B}_2=30^o$ **και υποτείνουσες ΒΓ = ΒΓ' = 2 cm, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ30°, συν30°, εφ30°, ημ60°, συν60° και εφ60°.**



....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών των 30°, 45° και 60° θα θεωρούνται γνωστοί και δεν θα δίνονται σε ασκήσεις οπότε θα πρέπει να τους μάθετε!

21. Να συμπληρώσετε τον ακόλουθο πίνακα:

		30^o	**45^o**	**60^o**	
Ημίτονο					
Συνημίτονο					
Εφαπτομένη					

22. Να αποδείξετε ότι το ύψος και το εμβαδόν ενός ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ πλευράς α, δίνονται από τους τύπους: $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$ **και** $E = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$ **.**

Η εφαρμογή 22 μπορεί να λυθεί εναλλακτικά με το Πυθαγόρειο Θεώρημα;

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

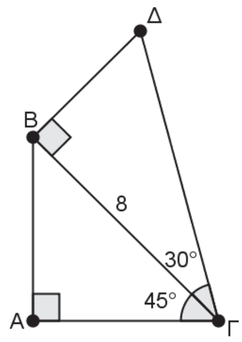
....

....

....

....

23. Στο διπλανό σχήμα να βρείτε τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ.



....

....

....

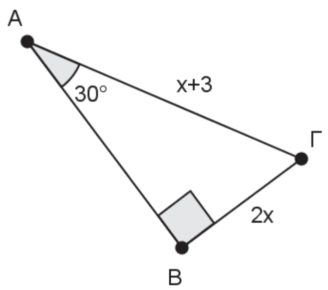
....

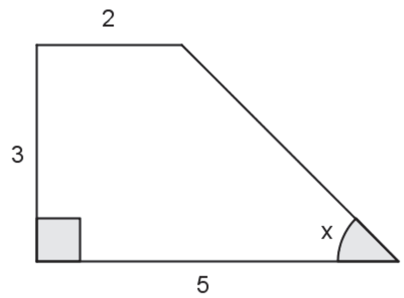
....

....

....

24. Να υπολογίσετε το x στα ακόλουθα σχήματα.





....

....

....

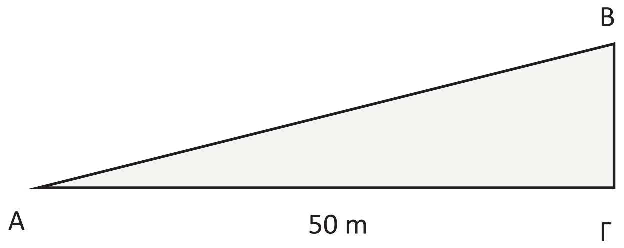
....

....

Ασκήσεις προς λύση
Εφαπτομένη οξείας γωνίας

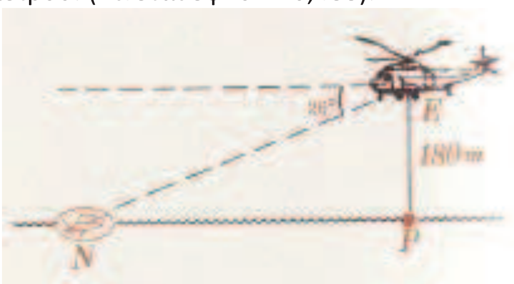
1.1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ τέτοιες ώστε ΑΓ = 2ΑΒ. Να βρείτε τις εφαπτομένες των γωνιών Β και Γ.

1.2. Η κλίση του δρόμου ΑΓ είναι 10%. Να υπολογίσετε πόσα μέτρα είναι ψηλότερα το σημείο Β από το σημείο Γ.

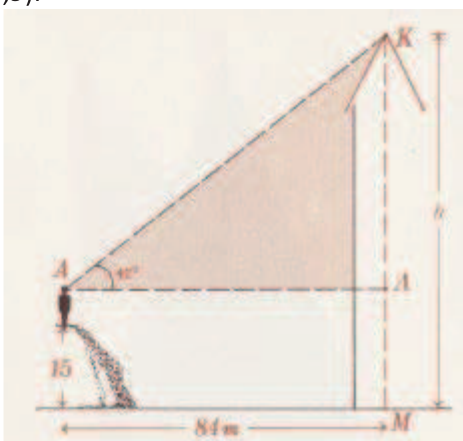


1.3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 15 cm και ΒΓ = 40 cm.Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $240\ cm^2$. Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της γωνίας $B\hat{A}\Delta$.

1.4. Ένα ελικόπτερο (θέση Ε) προσπαθεί να διασώσει ένα ναυαγό (θέση Ν). Το ελικόπτερο απέχει από την επιφάνεια της θάλασσας 180 m και βλέπει το ναυαγό υπό γωνία βάθους 26^o. Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση ΝΡ με προσέγγιση μέτρου. (Δίνεται εφ26^o = 0,488).



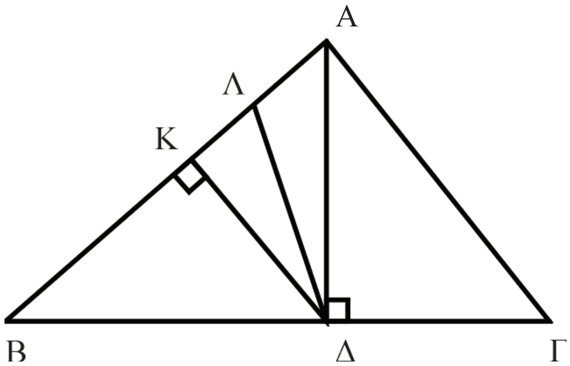
1.5. Ένας άνθρωπος ύψους 1,70 m βρίσκεται σ’ ένα λόφο που έχει ύψος 15 m και παρατηρεί υπό γωνία ύψους 42^o, την κορυφή Κ ενός μνημείου που απέχει απόσταση ΑΛ = 84 m. Να υπολογίσετε το συνολικό ύψος h = ΚΜ του μνημείου. (Δίνεται εφ42^o = 0,9).



Ημίτονο και Συνημίτονο οξείας γωνίας

1.6. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^o$) είναι συνΓ = 0,8 και ΒΓ = 10 cm. Να υπολογίσετε:
α) το ημΓ
β) το εμβαδόν του τριγώνου

1.7. Με βάση το παρακάτω σχήμα:



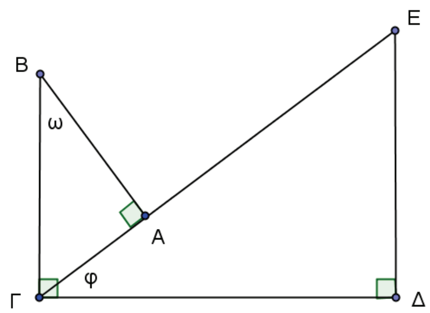
α) Το συνΒ ισούται με:

Α. $\frac{ΒΛ}{ΒΔ}$ **Β.** $\frac{ΒΑ}{ΒΓ}$ **Γ.** $\frac{ΒΚ}{ΒΔ}$ **Δ.** $\frac{ΒΔ}{ΒΚ}$ **Ε.** $\frac{ΒΛ}{ΛΔ}$

β) Το ημΒ ισούται με:

Α. $\frac{ΔΛ}{ΒΔ}$ **Β.** $\frac{ΑΔ}{ΒΔ}$ **Γ.** $\frac{ΑΔ}{ΑΒ}$ **Δ.** $\frac{ΔΚ}{ΒΚ}$ **Ε.** $\frac{ΒΛ}{ΒΔ}$

1.8. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ΔΕ = 6 cm, ΓΔ = 8 cm, ΑΕ = 7 cm και ΑΒ = 4 cm. Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ω και φ είναι ίσες.



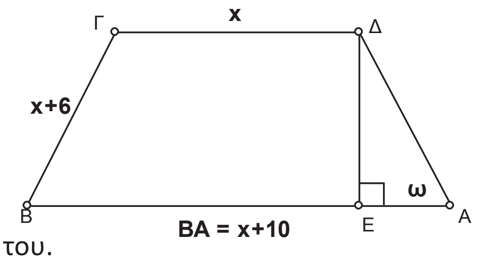
1.9. Έστω η οξεία γωνία ω για την οποία ισχύει ότι $συνω=\frac{9x-1}{3}-\frac{9x+4}{6}$ και x ακέραιος. Να υπολογίσετε το συνω.

1.10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=90^\circ$, και πλευρές ΑΒ = γ, ΒΓ = α και ΑΓ = β. Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2Β+συν^2Γ=1$
β) $συνΒ=ημΓ$
γ) $εφΒ=\frac{ημΒ}{συνΒ}$.

1.11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$). Η κάθετη πλευρά ΑΓ είναι διπλάσια της ΑΒ. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.

1.12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με ΑΓ=24cm και $\sigma\upsilon\nu B=\frac{4}{5}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΒ του τριγώνου.

1.13. Στο παρακάτω σχήμα το τραπέζιο είναι ισοσκελές και έχει περίμετρο 50 cm.Να υπολογίσετε:



α) Τις πλευρές του και το ύψος του.

β) Την παράσταση $A=\dfrac{13\cdot\eta\mu\omega-5\varepsilon\varphi\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

1.14. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 5 cm και ΒΓ = 6 cm. Να υπολογίσετε:

α) Το ύψος ΑΔ του τριγώνου.

β) το ημίτονο, το συνημίτονο, και την εφαπτομένη των γωνιών της βάσης του.

Τριγωνομετρικοί αριθμοί 30ᵒ, 45ᵒ, 60ᵒ

1.15. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = ΑΓ = 10 cm και $\hat{A}=120^\circ$. Να υπολογίσετε την περίμετρο του.

1.16. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΓ = 6 cm, ΑΒ = 10 cm και $\hat{A}=60^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

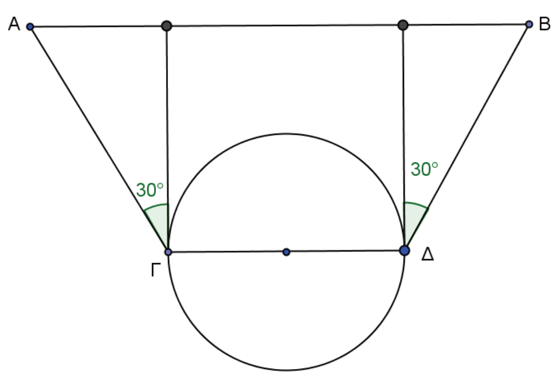
1.17. Να υπολογίσετε την παράσταση:

α) $\sigma\upsilon\nu^2 45^o-\frac{1}{\sqrt{6}}\eta\mu 45^o\cdot\varepsilon\varphi 60^o$

β) $\varepsilon\varphi 45^o\cdot\varepsilon\varphi 30^o\cdot\varepsilon\varphi 60^o\left(\eta\mu 30^o+\eta\mu 45^o+\eta\mu 60^o\right)$

γ) $\dfrac{\eta\mu 30^o-\eta\mu 45^o}{\sigma\upsilon\nu 45^o+\sigma\upsilon\nu 60^o}$

1.18. Δύο δορυφόροι τηλεπικοινωνίας βρίσκονται στην ίδια τροχιά και σε θέσεις Α και Β ώστε να επιτρέπουν την επικοινωνία μεταξύ δύο τόπων (Γ και Δ) που βρίσκονται σε διαμετρική θέση πάνω στη Γη. Αν η γωνία ύψους των δορυφόρων είναι 30° και οι αποστάσεις ΑΓ, ΒΔ είναι 30.000 Km, να υπολογίσετε την απόσταση των δύο δορυφόρων ΑΒ. (Ακτίνα της Γης R=6400 Km).

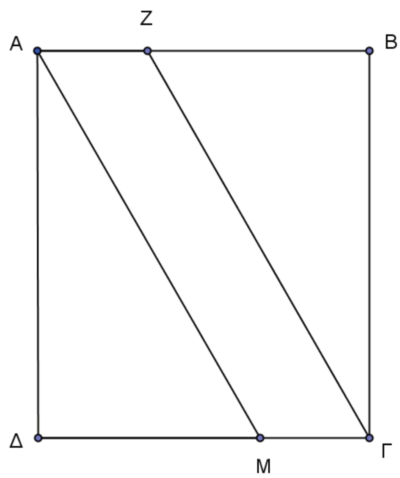


1.19. Η κεραμοσκεπή ενός δωματίου, που έχει κλίση 60°, έπαθε ζημιά. Μετά από μια καταιγίδα μια κηλίδα νερού εμφανίστηκε στο δάπεδο σε απόσταση 2 m από τον τοίχο. Σε ποια απόσταση από το ψηλότερο σημείο της σκεπής βρίσκεται το σπασμένο κεραμίδι;

1.20. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = 6 cm και ΑΖ = 2 cm. Φέρουμε την ΑΜ ώστε το ΑΜΓΖ να είναι παραλληλόγραμμο. Αν το μέτρο της γωνίας $\widehat{\mathrm{AM\Delta}}$ είναι ίσο με 60° τότε να υπολογίσετε:

α) τα μήκη ΑΔ = y και ΑΜ = x

β) τα εμβαδά των ΑΒΓΔ και ΑΜΓΖ



1.21. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $\hat{B} = 30^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$ και ύψος ΑΔ = 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

1.22. Ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει ΑΒ = 20 cm, ΓΔ = 6 cm και $\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

1.23. Η βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι 16 cm. Αν καθεμιά από τις ίσες γωνίες του είναι τετραπλάσια από την γωνία της κορυφής του, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του.

1.24. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A} = 150^\circ$, ΑΔ = 10 cm και ΑΒ = 20 cm. Να υπολογίσετε το ύψος ΑΕ και το εμβαδό του παραλληλογράμμου.

(Οι ασκήσεις 1.4, 1.5 προέρχονται από το βιβλίο: Αλεξίου, Κ.Τ., Αμπλιανίτου, Γ., Καββαδίας, Κ. (1990). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βιβλιοεκδοτική Αναστασάκη, Αθήνα.)