Μαθηματικά Γ Γυμνασίου

1

Αλγεβρικές Παραστάσεις

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (Επαναλήψεις-συμπληρώσεις)

1.1 Πράξεις με πραγματικούς αριθμούς (Επαναλήψεις-συμπληρώσεις)

Α Οι πραγματικοί αριθμοί και οι πράξεις τους

Πραγματικοί αριθμοί είναι όλοι οι αριθμοί που γνωρίσαμε στις προηγούμενες τάξεις.
Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από τους ρητούς και τους άρρητους αριθμούς.

Π.χ.

$$\frac{3}{4},\quad -\frac{5}{2},\quad 7{,}34,\quad \sqrt{2},\quad 3,\quad \pi,\quad \frac{\sqrt{5}}{3},\quad \sqrt{4},\quad -0{,}5,\quad 1+\sqrt{3},\quad 6{,}1010010001\ldots$$

Ρητός λέγεται κάθε αριθμός που έχει ή μπορεί να πάρει τη μορφή ενός κλάσματος $\frac{\mu}{\nu}$ όπου μ ,ν ακέραιοι αριθμοί και $\nu \neq 0$.

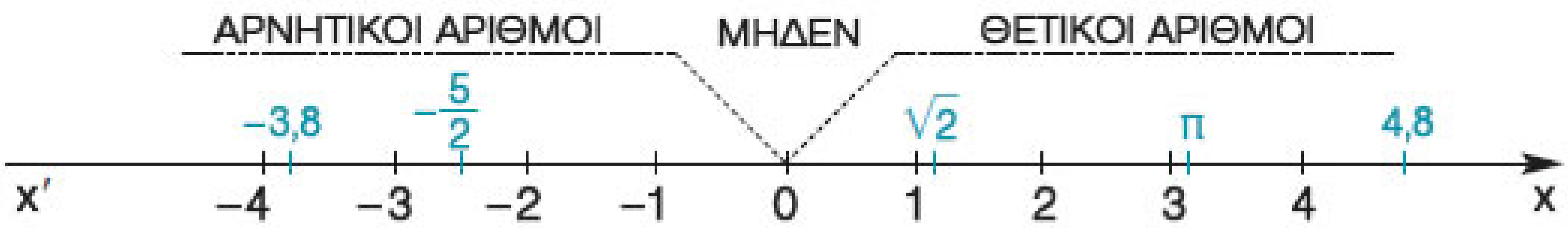
$$\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{2} = \frac{-5}{2}, \quad 7{,}34 = \frac{734}{100},$$

$$3 = \frac{3}{1}, \quad \sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}, \quad -0{,}5 = \frac{-5}{10}.$$

Άρρητος λέγεται κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός.

$$\sqrt{2}, \quad \pi, \quad \frac{\sqrt{5}}{3}, \quad 1 + \sqrt{3}, \quad 6{,}1010010001\ldots$$

Κάθε πραγματικός αριθμός παριστάνεται μ΄ ένα σημείο πάνω σ΄ έναν άξονα.



Η **απόλυτη τιμή** ενός πραγματικού αριθμού α συμβολίζεται με |α| και είναι ίση με την απόσταση του σημείου, που παριστάνει τον αριθμό α, από την αρχή του άξονα.

Για παράδειγμα: $|-2| = 2$, $|2| = 2$, $|0| = 0$

Οι πράξεις στους πραγματικούς αριθμούς

Πρόσθεση

- Για να προσθέσουμε δύο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμά αυτό βάζουμε ως πρόσημο το κοινό τους πρόσημο. **Π.χ. +7+5=+12, -7-5=-12**

- Για να προσθέσουμε δύο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε την μικρότερη απόλυτη τιμή από τη μεγαλύτερη και στη διαφορά αυτή βάζουμε πρόσημο, το πρόσημο του αριθμού που έχει τη μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. **Π.χ. +5-7=-2, -5+7=+2**

Πολλαπλασιασμός

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ομόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο +

Π.χ. (+5)(+7)=+35 , (-5)(-7)=+35

- Για να πολλαπλασιάσουμε δύο ετερόσημους αριθμούς, πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους, και στο γινόμενο αυτό βάζουμε πρόσημο -

Π.χ. (+5)(-7)= -35 , (-5)(+7)= - 35

Οι ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού

Για την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητα	**Πρόσθεση**	**Πολλαπλασιασμός**
Αντιμεταθετική	$\alpha + \beta = \beta + \alpha$	$\alpha\beta = \beta\alpha$
Προσεταιριστική	$\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$	$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$
Ουδέτερο στοιχείο	$\alpha + 0 = \alpha$	$\alpha \bullet 1 = \alpha$
	$\alpha + (-\alpha) = 0$	$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1, \alpha \neq 0$
Επιμεριστική	$\alpha\,(\beta + \gamma) = \alpha\,\beta + \alpha\,\gamma$	

Υπενθυμίζουμε ότι:

- $\alpha \cdot 0 = 0$.
- Αν $\alpha\beta = 0$, τότε $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.
- Δύο αριθμοί που έχουν άθροισμα μηδέν, λέγονται **αντίθετοι**.
- Δύο αριθμοί που έχουν γινόμενο τη μονάδα, λέγονται **αντίστροφοι**.

$-3\,,\quad 3$

$\frac{4}{5}\,,\quad \frac{5}{4}$

Αφαίρεση -Διαίρεση

Οι πράξεις της αφαίρεσης και της διαίρεσης γίνονται με τη βοήθεια της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αντιστοίχως.

- Για να βρούμε τη διαφορά δύο αριθμών, προσθέτουμε στο μειωτέο τον αντίθετο του αφαιρετέου.

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$$

Π.χ. 5-7=5+(-7)=-2, 5-(-7)=5+7=12

- Για να βρούμε το πηλίκο δύο αριθμών ($\alpha : \beta$, ή $\dfrac{\alpha}{\beta}$ με $\beta \neq 0$), πολλαπλασιάζουμε το διαιρετέο με τον αντίστροφο του διαιρέτη.

$$\boxed{\alpha : \beta = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}} \quad \text{ή} \quad \boxed{\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}}$$

π.χ. $$-5:15 = -5 \cdot \frac{1}{15} = -\frac{5}{15} = -\frac{1}{3}$$

Παραδείγματα-Εφαρμογές

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$

Λύση

Παραδείγματα-Εφαρμογές

1 Να υπολογιστούν οι παραστάσεις

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$

Λύση

α) $(-3)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)-\left(-\frac{1}{3}+3\right)-\left(+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3-\left(-\frac{1}{6}\right)=$

$=+\frac{9}{2}+\frac{1}{3}-3+\frac{1}{6}=\frac{27}{6}+\frac{2}{6}-\frac{18}{6}+\frac{1}{6}=\frac{12}{6}=2$

β) $\dfrac{-3+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{6}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{6}{3}-\frac{1}{3}}=\dfrac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{3}}=-\frac{15}{10}=-\frac{3}{2}$

2. Αν α+β = -3 και γ +δ = -5, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = -(\gamma - 2\alpha) + 2\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right).$$

Λύση

2. Αν α+β = -3 και γ +δ = -5, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = -(\gamma - 2\alpha) + 2\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right).$$

Λύση

$$A = -(\gamma - 2\alpha) + 2\left(\beta - \frac{\delta}{2}\right) = -\gamma + 2\alpha + 2\beta - \delta$$

$$= 2\alpha + 2\beta - \gamma - \delta = 2(\alpha + \beta) - (\gamma + \delta) =$$

$$= 2(-3) - (-5) = -6 + 5 = -1$$

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας «x» στην κατάλληλη θέση.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\overline{3}$	$-0,8$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος										
Ρητός										
Άρρητος										

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα σημειώνοντας «x» στην κατάλληλη θέση.

	-3	$\frac{1}{2}$	6	$0,\overline{3}$	$-0,8$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{16}$	$3,14$	π	$\frac{22}{7}$
Ακέραιος	x		x				x			
Ρητός	x	x	x	x	x		x	x		x
Άρρητος						x			x	

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-3 + 7 = \dots\dots$

β) $-6 + 6 = \dots\dots$

γ) $-2 - 9 = \dots\dots$

δ) $(-2) \cdot \frac{1}{3} = \dots\dots$

ε) $0 \cdot \left(-\frac{2}{7}\right) = \dots\dots$

στ) $\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{5}{4}\right) = \dots\dots$ **1**

ζ) $(-6) : \left(-\frac{12}{5}\right) = \dots\dots$

η) $\left(-\frac{8}{5}\right) : (+4) = \dots\dots$

θ) $\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(+\frac{4}{3}\right) = \dots\dots$ **-1**

3. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(-3 \cdot 2 - 5)x = \dots\dots$

β) $-3(2 - 5x) = \dots\dots$

γ) $-3(2 - 5)x = \dots\dots$

δ) $-2(x \quad \dots) = \dots + 6$

ε) $(3 + x)(2 + y) = \dots\dots$

στ) $4(\dots + \dots) = 12x + 8$

2. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $-3+7=4$ β) $-6+6=0$ γ) $-2-9=-11$

δ) $(-2)\cdot\frac{1}{3}=-2/3$ ε) $0\cdot\left(-\frac{2}{7}\right)=0$ στ) $\left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)=1$

ζ) $(-6):\left(-\frac{12}{5}\right)=5/2$ η) $\left(-\frac{8}{5}\right):(+4)=-2/5$ θ) $\left(-\frac{4}{3}\right):\left(+\frac{4}{3}\right)=-1$

3. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $(-3\cdot2-5)x=-11x$ **β)** $-3(2-5x)=-6+15x$

γ) $-3(2-5)x=9x$ **δ)** $-2(x-3)=-2x+6$

ε) $(3+x)(2+y)=6+3y+2x+xy$

στ) $4(3x+2)=12x+8$

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:

α. είναι ομόσημοι
β. έχουν ίσες απόλυτες τιμές
γ. έχουν γινόμενο μηδέν
δ. έχουν γινόμενο τη μονάδα.

ii. Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:

α. είναι ετερόσημοι
β. έχουν άθροισμα μηδέν
γ. έχουν ίσες απόλυτες τιμές
δ. έχουν γινόμενο τη μονάδα.

Μικροπείραμα

4. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

i. Αν δύο αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε:

α. είναι ομόσημοι

β. έχουν ίσες απόλυτες τιμές

γ. έχουν γινόμενο μηδέν

δ. έχουν γινόμενο τη μονάδα.

ii. Αν δύο αριθμοί είναι αντίστροφοι, τότε:

α. είναι ετερόσημοι

β. έχουν άθροισμα μηδέν

γ. έχουν ίσες απόλυτες τιμές

δ. έχουν γινόμενο τη μονάδα.

Μικροπείραμα

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι.

β. Το άθροισμα δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός.

γ. Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός.

δ. Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί.

5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Οι αντίστροφοι αριθμοί είναι ομόσημοι. Σ

β. Το άθροισμα δύο ομόσημων αριθμών είναι θετικός αριθμός. Λ

γ. Η απόλυτη τιμή κάθε πραγματικού αριθμού είναι θετικός αριθμός. Λ

δ. Δύο αριθμοί με γινόμενο θετικό και άθροισμα αρνητικό είναι αρνητικοί. Σ

6. Να συμπληρωθεί ο πίνακας αν το άκρο κάθε βέλους δείχνει το άθροισμα της αντίστοιχης στήλης ή γραμμής.

6	–5	–4	8	→	
7		3	6	→	7
	8		–6	→	
–18	7	18	–15	→	
↓	↓	↓	↓		↓
–2				→	0

6. Να συμπληρωθεί ο πίνακας αν το άκρο κάθε βέλους δείχνει το άθροισμα της αντίστοιχης στήλης ή γραμμής.

Λύση

6	–5	–4	8	→	5
7	-9	3	6	→	7
3	8	-9	–6	→	-4
–18	7	18	–15	→	-8
↓	↓	↓	↓		↓
–2	1	8	-7	→	0

Β Δυνάμεις πραγματικών αριθμών

Η **δύναμη** με βάση έναν πραγματικό αριθμό α και εκθέτη ένα φυσικό αριθμό $\nu \geq 2$ συμβολίζεται με α^ν και είναι το γινόμενο ν παραγόντων ίσων με τον αριθμό α.

Δηλαδή $$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha \cdot \alpha \cdot \alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{\nu\text{ - παράγοντες}}$$

Ορίζουμε ακόμη:

$$\alpha^1 = \alpha$$

$$\alpha^0 = 1 \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

$$\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu} \quad \text{με} \quad \alpha \neq 0$$

Για τις δυνάμεις με εκθέτες ακέραιους αριθμούς και εφόσον αυτές ορίζονται, ισχύουν οι ιδιότητες:

Ιδιότητες	Παραδείγματα
$\alpha^{\mu} \cdot \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$	$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$
$\alpha^{\mu} : \alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$	$3^5 : 3^3 = 3^{5-3} = 3^2$
$(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\beta^{\nu}$	$(2x)^2 = 2^2x^2 = 4x^2$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$
$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$	$(2^{-3})^{-2} = 2^6 = 64$
$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\nu}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4$

Η προτεραιότητα των πράξεων

- Πρώτα υπολογίζουμε τις δυνάμεις.
- Στη συνέχεια κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς και τις διαιρέσεις.
- Τέλος, κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις.
- Όταν η παράσταση περιέχει και παρενθέσεις, εκτελούμε πρώτα τις πράξεις μέσα στις παρενθέσεις με τη σειρά που αναφέραμε παραπάνω.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α. Για κάθε αριθμό α ισχύει $α + α + α + α = α^4$.

β. Για κάθε αριθμό α ισχύει $α·α·α·α = α^4$.

γ. Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι.

δ. Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι.

ε. Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3α)^2 = 9α^2$.

στ. Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός.

ζ. Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός.

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

Απάντηση

α. Για κάθε αριθμό α ισχύει $α + α + α + α = α^4$. **Λ**

β. Για κάθε αριθμό α ισχύει $α·α·α·α = α^4$. **Σ**

γ. Οι αριθμοί $(-5)^6$ και -5^6 είναι αντίθετοι. **Σ**

δ. Οι αριθμοί $\left(\frac{2}{3}\right)^8$ και $\left(\frac{3}{2}\right)^8$ είναι αντίστροφοι. **Σ**

ε. Για κάθε αριθμό α ισχύει $(3α)^2 = 9α^2$. **Σ**

στ. Ο αριθμός $-(-5)^2$ είναι θετικός. **Λ**

ζ. Ο αριθμός -3^{-2} είναι θετικός. **Λ**

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (=ή≠).

α) $(-1)^6 \ldots 1$ β) $3^{-2} \ldots 9$ γ) $-4^2 \ldots -16$ δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \ldots \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \ldots \frac{1}{-25}$ στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \ldots 0$ ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \ldots \frac{1}{32}$ η) $(7+2)^2 \ldots 7^2 + 2^2$

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i. Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ είναι

α. $-\frac{4}{9}$ β. $-\frac{9}{4}$ γ. $\frac{9}{4}$ δ. $\frac{4}{9}$

2. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά χρησιμοποιώντας το κατάλληλο σύμβολο (=ή≠).

α) $(-1)^6 = 1$ β) $3^{-2} \neq 9$ γ) $-4^2 = -16$ δ) $\left(\frac{5}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{5}$

ε) $5^{-2} \neq \frac{1}{-25}$ στ) $\left(\frac{2}{5}\right)^0 \neq 0$ ζ) $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \neq \frac{1}{32}$ η) $(7+2)^2 \neq 7^2 + 2^2$

3. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

i. Η τιμή της παράστασης $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$ είναι

α. $-\frac{4}{9}$ β. $-\frac{9}{4}$ γ. $\frac{9}{4}$ δ. $\frac{4}{9}$

ii. Η τιμή της παράστασης $\left[(-2)^0\right]^3$ είναι

α. -2^3 β. -6 γ. 2^3 δ. 1

iii. Η τιμή της παράστασης $2^3 + 3^2$ είναι:

α. 5^5 β. 17 γ. 5^6 δ. 6^5

ii. Η τιμή της παράστασης $\left[(-2)^0\right]^3$ είναι

α. -2^3 β. -6 γ. 2^3 δ. 1

iii. Η τιμή της παράστασης $2^3 + 3^2$ είναι:

α. 5^5 β. 17 γ. 5^6 δ. 6^5

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\left(2^4\right)^{-1}$	**1.** $\frac{1}{4}$
β. $\left(2^{-5}\right)^2 \cdot 2^{10}$	**2.** -2^4
γ. $(-2)^{-2}$	**3.** 4
δ. $\left(2^4 : 2^3\right) \cdot 2^2$	**4.** 2^3
	5. 2^{-4}
	6. 1

α	β	γ	δ

4. Να συμπληρώσετε τον πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το αποτέλεσμά της από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\left(2^{4}\right)^{-1}$	**1.** $\frac{1}{4}$
β. $\left(2^{-5}\right)^{2}\cdot 2^{10}$	**2.** -2^{4}
γ. $(-2)^{-2}$	**3.** 4
δ. $\left(2^{4}:2^{3}\right)\cdot 2^{2}$	**4.** 2^{3}
	5. 2^{-4}
	6. 1

α	β	γ	δ
5	**6**	**1**	**4**

Γ Τετραγωνική ρίζα πραγματικού αριθμού

Η **τετραγωνική ρίζα** ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x.

Π.χ. $\sqrt{25}=5$, αφού $5^2=25$

Ορίζουμε ακόμη $\sqrt{0}=0$

Όμως και $(-5)^2=25$,οπότε έχουμε $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=|-5|$

Άρα, για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Δεν ορίζεται τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού, γιατί δεν υπάρχει αριθμός που το τετράγωνο του να είναι αρνητικός αριθμός.

Παρατηρούμε ακόμη ότι: $(\sqrt{9})^2 = 3^2 = 9$ δηλαδή $(\sqrt{9})^2 = 9$

Γενικά

Αν $x \geq 0$, τότε $(\sqrt{x})^2 = x$

Ιδιότητες των ριζών

Για δύο μη αρνητικούς αριθμούς α, β μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

- Το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του γινομένου τους. Δηλαδή:

$$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$$

Απόδειξη:

Υπολογίζουμε το τετράγωνο κάθε μέλους χωριστά.

Είναι: $\left(\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \alpha \cdot \beta$

$$\left(\sqrt{\alpha\beta}\right)^2 = \alpha\beta$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο μη αρνητικοί αριθμοί $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ και $\sqrt{\alpha\beta}$ έχουν το ίδιο τετράγωνο , οπότε είναι ίσοι. Άρα $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$

- Το πηλίκο των τετραγωνικών ριζών τους ισούται με την τετραγωνική ρίζα του πηλίκου τους.

Δηλαδή:

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}, \beta > 0$$

Απόδειξη: **Με τον ίδιο τρόπο**

Προσοχή:

Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί, τότε $\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \neq \sqrt{\alpha + \beta}$

Π.χ.

$\sqrt{16} + \sqrt{9}$=4+3=7. Ενώ $\sqrt{16+9} = \sqrt{25}$=5

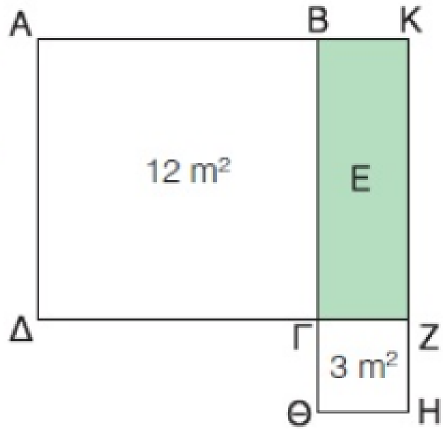
Δηλαδή $\sqrt{16} + \sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

Να μετατραπεί το κλάσμα $\frac{5}{\sqrt{3}}$, που έχει άρρητο παρονομαστή, σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή.

Πολλαπλασιάζουμε και τους δύο όρους του κλάσματος με τον παρονομαστή.

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΓΖΗΘ έχουν εμβαδόν 12 m^2 και 3 m^2 αντιστοίχως. Να βρεθεί το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ και το μήκος του τμήματος ΒΘ.



Το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι $ΒΓ^2 = 12\ m^2$, οπότε η πλευρά του είναι $ΒΓ = \sqrt{12}$ m.

Το εμβαδόν του τετραγώνου ΓΖΗΘ είναι $ΓΖ^2 = 3\ m^2$, οπότε η πλευρά του είναι $ΓΖ = \sqrt{3}$ m. Επομένως

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΚΖΓ είναι:

$$E = ΒΓ \cdot ΓΖ = \sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = 6\ m^2.$$

Το μήκος του τμήματος ΒΘ είναι:

$$ΒΘ = ΒΓ + ΓΘ = ΒΓ + ΓΖ = \sqrt{12} + \sqrt{3} = \sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3}\ m.$$

Μικροπείραμα

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} =$ .....

β) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} =$ .....

γ) $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} =$ .....

δ) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} =$ .....

ε) $\sqrt{18} : \sqrt{2} =$ .....

στ) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} =$ .....

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από τη στήλη Β

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α) $3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ β) $5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ γ) $\sqrt{5} + 4\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 0$

δ) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = 6$ ε) $\sqrt{18} : \sqrt{2} = 3$ στ) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 12$

2. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε στοιχείο της στήλης Α ένα στοιχείο από τη στήλη Β

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{25}$	
β. $\sqrt{-25}$	**1.** -5
γ. $-\sqrt{25}$	**2.** Δεν ορίζεται
δ. $\sqrt{5^2}$	**3.** 5
ε. $\sqrt{(-5)^2}$	
στ. $\sqrt{-5^2}$	

α	
β	
γ	
δ	
ε	
στ.	

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $\sqrt{25}$	
β. $\sqrt{-25}$	**1.** -5
γ. $-\sqrt{25}$	**2.** Δεν ορίζεται
δ. $\sqrt{5^2}$	**3.** 5
ε. $\sqrt{(-5)^2}$	
στ. $\sqrt{-5^2}$	

α	3
β	2
γ	1
δ	3
ε	3
στ.	2

3. Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

Άθροισμα **Γινόμενο**

α	**β**	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$
4	1		
9	16		
64	36		

$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$

$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

3. Να συμπληρώσετε τους πίνακες:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$
4	1	2	1
9	16	3	4
64	36	8	6

Άθροισμα

$\sqrt{\alpha+\beta}$	$\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$
$\sqrt{5}$	3
5	7
10	14

Γινόμενο

$\sqrt{\alpha\beta}$	$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$
2	2
12	12
48	48

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$

β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$

γ) $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

δ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$

ε) $\sqrt{\left(\frac{1}{2} - 1\right)^2} = \frac{1}{2} - 1$

στ) Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$.

ζ) Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$.

4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες:

α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$ Σ

β) $\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{5}$ Λ

γ) $\sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ Σ

δ) $\sqrt{(-3)^2} = 3$ Σ

ε) $\sqrt{\left(\dfrac{1}{2} - 1\right)^2} = \dfrac{1}{2} - 1$ Λ

στ) Το διπλάσιο του $\sqrt{5}$ είναι το $\sqrt{10}$. Λ

ζ) Το μισό του $\sqrt{12}$ είναι το $\sqrt{3}$. Σ

5. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50 m^2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$m;

5. Ένα τετράγωνο έχει εμβαδόν 50 m^2. Είναι σωστό να ισχυριστούμε ότι η πλευρά του είναι $5\sqrt{2}$m;

Απάντηση: Ναι

Συμπληρωματικά Θέματα

1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{12}}$

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$

2. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

i) $\alpha = \sqrt{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 2\sqrt{2}$, $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\tau = \sqrt{\frac{2}{4}}$

ii) $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{12}$, $\delta = \sqrt{3+3}$, $\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

$A = \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$ $\quad B = \sqrt{57+\sqrt{44+\sqrt{15+\sqrt{99+\sqrt{1}}}}}$

Συμπληρωματικά Θέματα

1. Ποιος από τους παρακάτω αριθμούς είναι διαφορετικός από τους άλλους;

α) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\frac{3}{\sqrt{3}}$, $\frac{2}{\sqrt{12}}$ (Απ: $\frac{3}{\sqrt{3}}$)

β) $3\sqrt{8}$, $\sqrt{72}$, $2\sqrt{18}$, $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $2\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ (Απ: $3\sqrt{2}$)

2. Ποιοι από τους παρακάτω αριθμούς είναι ίσοι;

i) $\alpha = \sqrt{8}$, $\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma = 2\sqrt{2}$, $\delta = \frac{4}{\sqrt{2}}$, $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma\tau = \sqrt{\frac{2}{4}}$

(Απ: $\alpha=\gamma=\delta$, $\beta=\varepsilon=\sigma\tau$)

ii) $\alpha = \sqrt{3}+\sqrt{3}$, $\beta = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}$, $\gamma = \sqrt{12}$, $\delta = \sqrt{3+3}$, $\varepsilon = \sqrt{27} - \sqrt{3}$

(Απ: $\alpha=\gamma=\varepsilon$)

3. Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων

$A = \sqrt{21+\sqrt{13+\sqrt{7+\sqrt{3+\sqrt{1}}}}}$ $B = \sqrt{57+\sqrt{44+\sqrt{15+\sqrt{99+\sqrt{1}}}}}$

(Απ: A=5, B=8)